

Nuova biblioteca di cultura scientifica

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Fisica teorica 10

Editori Riuniti Edizioni Mir

Evgenij M. Lifšits Lev P. Pitaevskij

Fisica cinetica

Editori Riuniti Edizioni Mir

II edizione: ottobre 1999

Titolo originale: *Fizičeskaja kinetika*

Traduzione di Aleksandr Machov

© Copyright Edizioni Mir, Mosca

© Copyright Editori Riuniti, 1984

via Alberico II, 33 - 00193 Roma

ISBN 88-359-4782-0

Indice

<i>Prefazione</i>	9
<i>Alcune notazioni</i>	11

CAPITOLO I. TEORIA CINETICA DEI GAS

§ 1. Funzione di distribuzione	13
§ 2. Principio dell'equilibrio dettagliato	17
§ 3. Equazione cinetica di Boltzmann	21
§ 4. Teorema <i>H</i>	25
§ 5. Passaggio alle equazioni macroscopiche	28
§ 6. Equazione cinetica per un gas debolmente non omogeneo	32
§ 7. Conducibilità termica dei gas	36
§ 8. Viscosità dei gas	39
§ 9. Simmetria dei coefficienti cinetici	43
§ 10. Soluzione approssimata dell'equazione cinetica	47
§ 11. Diffusione di un gas leggero in uno pesante	53
§ 12. Diffusione di un gas pesante in uno leggero	57
§ 13. Fenomeni cinetici in un gas in un campo esterno	60
§ 14. Fenomeni in gas debolmente rarefatti	66
§ 15. Fenomeni in gas fortemente rarefatti	76
§ 16. Deduzione dinamica dell'equazione cinetica	89
§ 17. Equazione cinetica tenuto conto degli urti tripli	95
§ 18. Sviluppo viriale dei coefficienti cinetici	101
§ 19. Fluttuazioni della funzione di distribuzione in un gas in equilibrio	104
§ 20. Fluttuazioni della funzione di distribuzione in un gas non in equilibrio	109

CAPITOLO II. APPROSSIMAZIONE DIFFUSIONALE

§ 21. Equazione di Fokker-Planck	114
§ 22. Gas debolmente ionizzato in un campo elettrico	118
§ 23. Fluttuazioni in un gas debolmente ionizzato non in equilibrio	124
§ 24. Ricombinazione e ionizzazione	129
§ 25. Diffusione ambipolare	133
§ 26. Mobilità degli ioni in soluzioni di elettroliti forti	136

CAPITOLO III. PLASMA SENZA URTI

§ 27. Campo autocompatibile	143
§ 28. Dispersione spaziale in un plasma	147
§ 29. Costante dielettrica di un plasma senza urti	150
§ 30. Smorzamento di Landau	154
§ 31. Costante dielettrica del plasma di Maxwell	158
§ 32. Onde di plasma longitudinali	164
§ 33. Onde ionico-acustiche	167
§ 34. Rilassamento della perturbazione iniziale	169
§ 35. Eco di plasma	173
§ 36. Cattura adiabatica di elettroni	179
§ 37. Plasma quasi-neutro	182
§ 38. Idrodinamica di un plasma a doppia temperatura	185
§ 39. Solitoni in un mezzo debolmente dispersivo	188
§ 40. Costante dielettrica di un plasma degenerare senza urti	196

CAPITOLO IV. URTI IN UN PLASMA

§ 41. Integrale degli urti di Landau	203
§ 42. Trasmissione dell'energia tra elettroni e ioni	210
§ 43. Lunghezza del cammino delle particelle nel plasma	212
§ 44. Plasma di Lorentz	214
§ 45. Elettroni in fuga	218
§ 46. Integrale degli urti convergente	222
§ 47. Interazione attraverso onde di plasma	233
§ 48. Assorbimento nel plasma nel limite delle alte frequenze	237
§ 49. Teoria quasi-lineare dello smorzamento di Landau	240
§ 50. Equazione cinetica per un plasma relativistico	247
§ 51. Fluttuazioni in un plasma	251

CAPITOLO V. PLASMA IN UN CAMPO MAGNETICO

§ 52. Costante dielettrica di un plasma freddo senza urti	260
§ 53. Funzione di distribuzione in un campo magnetico	264
§ 54. Costante dielettrica di un plasma maxwelliano magneticamente attivo	268
§ 55. Smorzamento di Landau in un plasma magneticamente attivo	270
§ 56. Onde elettromagnetiche in un plasma freddo magneticamente attivo	276
§ 57. Influenza del moto termico sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un plasma magneticamente attivo	283
§ 58. Equazioni idrodinamiche di un plasma magneticamente attivo	287
§ 59. Coefficienti cinetici di un plasma in un campo magnetico forte	291
§ 60. Approssimazione di deriva	303

CAPITOLO VI. TEORIA DELLE INSTABILITÀ

§ 61. Instabilità di fascio	314
§ 62. Instabilità assoluta e convettiva	317
§ 63. Amplificazione e impenetrabilità	323
§ 64. Instabilità per legame debole di due rami dello spettro delle oscillazioni	328
§ 65. Instabilità di sistemi finiti	332

CAPITOLO VII. DIELETTRICI

§ 66. Interazione tra fononi	335
§ 67. Equazione cinetica per i fononi in un dielettrico	339
§ 68. Conducibilità termica dei dielettrici. Alte temperature	344
§ 69. Conducibilità termica dei dielettrici. Basse temperature	350
§ 70. Diffusione di fononi su impurità	354
§ 71. Idrodinamica del gas fononico in un dielettrico	355
§ 72. Assorbimento del suono in un dielettrico. Onde lunghe	359
§ 73. Assorbimento del suono in un dielettrico. Onde corte	364

CAPITOLO VIII. LIQUIDI QUANTISTICI

§ 74. Equazione cinetica delle quasi-particelle nel liquido di Fermi	367
§ 75. Conducibilità termica e viscosità del liquido di Fermi	374
§ 76. Assorbimento del suono nel liquido di Fermi	376
§ 77. Equazione cinetica per le quasi-particelle nel liquido di Bose	380

CAPITOLO IX. METALLI

§ 78. Resistenza residua	387
§ 79. Interazione elettrone-fonone	392
§ 80. Coefficienti cinetici di un metallo. Alte temperature	397
§ 81. Processi umklapp in un metallo	401
§ 82. Coefficienti cinetici di un metallo. Basse temperature	405
§ 83. Diffusione di elettroni sulla superficie di Fermi	414
§ 84. Fenomeni galvanomagnetici in campi forti. Teoria generale	419
§ 85. Fenomeni galvanomagnetici in campi forti. Casi particolari	425
§ 86. Effetto skin anormale	430
§ 87. Effetto skin nella regione infrarossa	440
§ 88. Onde elicoidali in un metallo	443
§ 89. Onde magnetoplasmiche in un metallo	447
§ 90. Oscillazioni quantistiche della conduttività di un metallo in un campo magnetico	449

CAPITOLO X. TECNICA DEI DIAGRAMMI PER SISTEMI NON IN EQUILIBRIO

§ 91. <i>Suscettività di Matsubara</i>	458
§ 92. <i>Funzioni di Green di un sistema non in equilibrio</i>	462
§ 93. <i>Tecnica dei diagrammi per sistemi non in equilibrio</i>	469
§ 94. <i>Autofunzioni energetiche</i>	474
§ 95. <i>Equazione cinetica nella tecnica dei diagrammi</i>	478

CAPITOLO XI. SUPERCONDUTTORI

§ 96. <i>Proprietà alle alte frequenze dei superconduttori. Formula generale</i>	484
§ 97. <i>Proprietà alle alte frequenze dei superconduttori. Casi limite</i>	490
§ 98. <i>Conducibilità termica dei superconduttori</i>	495

CAPITOLO XII. CINETICA DELLE TRANSIZIONI DI FASE

§ 99. <i>Cinetica delle transizioni di fase di prima specie. Formazione dei germi</i>	499
§ 100. <i>Cinetica delle transizioni di fase di prima specie. Stadio di coalescenza</i>	505
§ 101. <i>Rilassamento del parametro d'ordine nell'intorno del punto di una transizione di fase di seconda specie</i>	512
§ 102. <i>Invarianza di scala dinamica</i>	515
§ 103. <i>Rilassamento nell'elio liquido nell'intorno del punto λ</i>	517
<i>Indice analitico</i>	524

Prefazione

Il presente volume, che conclude il corso di Fisica teorica, è dedicato alla fisica cinetica intesa in senso largo come teoria microscopica dei processi in sistemi non in equilibrio statistico.

A differenza delle proprietà dei sistemi in equilibrio statistico, le proprietà cinetiche sono legate molto più strettamente al carattere delle interazioni microscopiche fra i diversi oggetti fisici. Di qui deriva l'enorme varietà di queste proprietà e il carattere notevolmente più complicato della loro teoria. Ciò rende meno univoca la scelta stessa del materiale da includere in un corso generale di fisica teorica.

Il contenuto del libro risulta chiaro dall'indice. A questo proposito facciamo alcune osservazioni.

Il libro presta un'attenzione notevole alla teoria dei gas, in quanto, in via di principio, oggetto più semplice della teoria cinetica. Alcuni capitoli sono dedicati alla teoria del plasma non solo per l'importanza fisica di questa branca della cinetica, ma anche perché molti problemi della cinetica del plasma si possono risolvere completamente e danno un'illustrazione istruttiva dei metodi generali della teoria cinetica.

Le proprietà cinetiche dei solidi sono particolarmente varie. Nella scelta del materiale per i corrispondenti capitoli del libro abbiamo dovuto, ovviamente, limitarci alle sole questioni generali, che mostrano i fenomeni fisici cinetici fondamentali e i metodi del loro studio. A tale proposito sottolineiamo ancora una volta che questo libro fa parte di un corso di fisica teorica e non pretende affatto di fungere da corso di teoria dei solidi.

Il contenuto del presente libro pecca di due difetti evidenti: mancano i problemi relativi alla cinetica dei processi magnetici e la teoria dei fenomeni cinetici legati al passaggio di particelle veloci attraverso la materia. Questi difetti sono dovuti alla mancanza di tempo, e ci siamo rassegnati ad essi pur di non ritardare ancora di più l'uscita del libro. Vogliamo sperare, tuttavia, che, sebbene il libro sia privo di quanto dovrebbe contenere, cionondimeno, il suo contenuto presenti interesse e sia utile al lettore.

Questo libro completa il programma tracciato da Lev D. Landau più di quarant'anni fa. Tutto il corso consta dei seguenti volumi:

I. Meccanica.

II. Teoria dei campi.

- III. *Meccanica quantistica (teoria non relativistica).*
- IV. *Teoria quantistica relativistica.*
- V. *Fisica statistica, parte 1.*
- VI. *Idrodinamica.*
- VII. *Teoria dell'elasticità.*
- VIII. *Elettrodinamica dei mezzi continui.*
- IX. *Fisica statistica, parte 2.*
- X. *Fisica cinetica.*

Ricordiamo che la comparsa del volume IX in questo programma editoriale è dovuta al fatto che esso contiene nozioni di idrodinamica e di elettrodinamica macroscopica.

Nella nuova edizione italiana dal 1975 ad oggi sono usciti già i volumi I, II, III, IV, V, VII, IX. I volumi VI e VIII, usciti in russo molto tempo fa, necessitano di una rielaborazione notevole, e in futuro prossimo speriamo di occuparci di questo lavoro.

Vogliamo esprimere il nostro più sentito ringraziamento ad A. F. Andreev, R. N. Gurža, V. L. Gurevič, Ju. M. Kagan, M. I. Kaganov e I. M. Lifšits con i quali abbiamo discusso questioni trattate nel presente libro.

Siamo grati a L. P. Gorkov e A. A. Ruchadze, che hanno letto il manoscritto e fornito alcune osservazioni preziose.

Mosca, gennaio 1980

E. M. Lifšits,
L. P. Pitaevskij

Alcune notazioni

Funzione di distribuzione delle particelle f (capitoli I-VI); negli impulsi si riferisce sempre a d^3p .

Funzioni di distribuzione, ossia numeri di riempimento degli stati quantistici degli elettroni e dei fononi, $n(p)$ e $N(k)$ (capitoli VII, IX-XI); negli impulsi si riferiscono sempre a $d^3p/(2\pi\hbar)^3$.

Integrale degli urti: St .

Integrale degli urti linearizzato: I .

Grandezze termodinamiche: temperatura T , pressione P , potenziale chimico μ , densità del numero di particelle N , numero totale di particelle \mathcal{N} , volume totale \mathcal{V} .

Intensità del campo elettrico: E .

Induzione magnetica: B .

Carica elettrica elementare: e (carica dell'elettrone $-e$).

Nelle stime sono utilizzate le seguenti notazioni: lunghezze caratteristiche del problema L ; dimensioni atomiche, costante del reticolo d ; lunghezza del cammino libero l ; velocità del suono u .

La media è indicata con parentesi angolari $\langle \dots \rangle$ o con un trattino sopra la lettera.

Gli indici vettoriali tridimensionali sono denotati con le lettere dell'alfabeto greco α, β, \dots .

Nei capitoli III-VI:

Massa dell'elettrone e dello ione: m e M .

Cariche dell'elettrone e dello ione: $-e$ e ze .

Velocità termiche degli elettroni e degli ioni:

$$v_{Te} = (T_e/m)^{1/2}, \quad v_{Ti} = (T_i/M)^{1/2}.$$

Frequenza del plasma:

$$\Omega_e = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2},$$

$$\Omega_i = (4\pi N_i z^2 e^2/M)^{1/2}.$$

Raggio di Debye:

$$a_e = (T_e/4\pi N_e e^2)^{1/2}, \quad a_i = (T_i/4\pi N_i z^2 e^2)^{1/2},$$

$$a^{-2} = a_e^{-2} + a_i^{-2}.$$

Frequenza di Larmor:

$$\omega_{Be} = eB/mc, \quad \omega_{Bi} = zeB/Mc.$$

I rimandi ai paragrafi e alle formule degli altri volumi di questo Corso sono indicati mediante cifre romane: I (*Meccanica*, 1975), II (*Teoria dei campi*, 1975), III (*Meccanica quantistica*, 1976), IV (*Teoria quantistica relativistica*, 1977), V (*Fisica statistica*, parte 1, 1978), VII (*Teoria dell'elasticità*, 1978), VIII (*Elettrodinamica dei mezzi continui*, uscirà nel 1985), IX (*Fisica statistica*, parte 2, 1981).

TEORIA CINETICA DEI GAS

§ 1. Funzione di distribuzione

Questo capitolo è dedicato all'esposizione della teoria cinetica dei gas ordinari composti di atomi elettricamente neutri e di molecole. L'oggetto di studio di questa teoria è rappresentato da stati e processi di non equilibrio in un gas perfetto. Si ricordi che con perfetto si intende un gas così rarefatto che ogni sua molecola si muove liberamente per quasi tutto il tempo e interagisce con le altre molecole solo nel caso di collisioni dirette. In altre parole, ciò significa che la distanza media fra le molecole $\bar{r} \sim N^{-1/3}$ (dove N è il numero di molecole nell'unità di volume) è supposta grande rispetto alla loro dimensione σ , più precisamente, rispetto al raggio d'azione delle forze intermolecolari d ; la grandezza piccola $Nd^3 \sim (d/\bar{r})^3$ si chiama spesso « parametro di gassosità ».

La descrizione statistica del gas è data dalla *funzione di distribuzione* $f(t, q, p)$ delle molecole di gas nel loro spazio delle fasi. Questa è, in generale, una funzione delle coordinate generalizzate della molecola scelte in un determinato modo (indichiamone l'insieme con q) e dei corrispondenti impulsi generalizzati (la cui totalità è indicata con p); in uno stato non stazionario essa è anche funzione del tempo t . Denotiamo con $d\tau = dq dp$ l'elemento di volume dello spazio delle fasi della molecola, dove dq e dp indicano convenzionalmente i prodotti dei differenziali di tutte le coordinate e di tutti gli impulsi, rispettivamente. Il prodotto $f d\tau$ è il numero medio di molecole contenute in un dato elemento $d\tau$, cioè aventi i valori q e p in dati intervalli dq e dp . Sul significato della nozione di media così definita torneremo ancora più avanti.

Anche se la funzione f verrà ovunque intesa definita come densità di distribuzione proprio nello spazio delle fasi, nella teoria cinetica è opportuno esprimerla mediante variabili determinate in un certo modo, che possono anche non essere coordinate ed impulsi generalizzati canonicamente coniugati. Prima di tutto, conveniamo su questa scelta.

Il moto traslatorio della molecola è sempre classico. Esso è descritto dalle coordinate $\mathbf{r} = (x, y, z)$ del suo centro di inerzia e dall'impulso \mathbf{p} (o dalla velocità $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$) del suo moto come un tutt'uno. In un gas monoatomico il moto traslatorio esaurisce il movimento

di tutte le particelle (atomi). Nei gas poliatomici, invece, le molecole godono anche di gradi di libertà rotatori ed oscillatori.

Il moto rotatorio della molecola nel gas praticamente è sempre classico ¹⁾. Esso è descritto, soprattutto, dall'assegnazione del vettore momento angolare della molecola M . Ciò è sufficiente per una molecola biatomica. Questa molecola è un rotatore che gira nel piano perpendicolare al vettore M . Quanto all'angolo φ di rotazione dell'asse della molecola in questo piano, nei problemi fisici reali si può considerare la funzione di distribuzione indipendente da φ , vale a dire che tutte le orientazioni della molecola nel detto piano sono equiprobabili. Questa proprietà è legata alla velocità con cui l'angolo φ varia al ruotare della molecola, e la sua origine si può precisare nel seguente modo.

La velocità di variazione di φ (velocità angolare di rotazione della molecola) è $\dot{\varphi} \equiv \Omega = M/I$. La media di questa velocità vale $\bar{\Omega} \sim \bar{v}/d$, dove d sono le dimensioni molecolari e \bar{v} la media delle velocità lineari. Ma molecole diverse hanno valori diversi di Ω , distribuiti secondo una determinata legge attorno a $\bar{\Omega}$. Pertanto le molecole che all'istante iniziale avevano φ uguali molto presto divergono rispetto ai valori di φ ; come si dice, avviene un rapido « mescolamento » degli angoli. Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ la distribuzione degli angoli delle molecole sia $\varphi = \varphi_0$ (nell'intervallo da 0 a 2π) e su Ω sia data una funzione $f(\varphi_0, \Omega)$. Ricaviamo da essa la media, indipendente da φ

$$f = \bar{f}(\Omega) + f'(\varphi_0, \Omega), \quad \bar{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0, \Omega) d\varphi_0,$$

in modo che $f'(\varphi_0, \Omega)$ è una funzione a segno alterno, con valore medio nullo. Nel corso dell'evoluzione ulteriore, tenendo conto della rotazione libera delle molecole ($\varphi = \Omega t + \varphi_0$), la funzione di distribuzione varia in base alla legge

$$f(\varphi, \Omega, t) = \bar{f}(\Omega) + f'(\varphi - \Omega t, \Omega)$$

(dove f' è una funzione periodica rispetto all'argomento $\varphi - \Omega t$ di periodo 2π). Col passare del tempo f' diventa una funzione di Ω oscillante sempre più rapidamente: il periodo caratteristico delle oscillazioni è $\Delta\Omega \sim 2\pi/t$ e diventa piccolo rispetto a $\bar{\Omega}$ già durante il cammino libero (fra due collisioni) delle molecole. Ma tutte le grandezze fisiche osservabili contengono una media della funzione di distribuzione di Ω ; il contributo della funzione rapidamente oscil-

¹⁾ Si ricordi che la condizione di classicità della rotazione consiste nella disuguaglianza $\hbar^2/2I \ll T$ (dove I è il momento d'inerzia della molecola, T la temperatura del gas). Questa condizione nei gas ordinari può essere violata soltanto per l'idrogeno e il deuterio a temperature basse.

lante f' a queste medie è trascurabile. Questa circostanza permette di sostituire la funzione di distribuzione $f(\varphi, \Omega)$ con la sua media rispetto agli angoli $\bar{f}(\Omega)$.

È evidente che le considerazioni esposte sono di carattere generale e si riferiscono a tutte le grandezze rapidamente variabili (fasi) che assumono valori in intervalli finiti.

Tornando ai gradi di libertà di rotazione delle molecole, notiamo che nei gas poliatomici la funzione di distribuzione può dipendere anche dagli angoli che determinano l'orientazione fissata degli assi molecolari rispetto al vettore M . Così, nelle molecole del tipo a trottola simmetrica questo angolo è quello formato da M e dall'asse della trottola (angolo di precessione); ma la funzione di distribuzione si può considerare di nuovo indipendente dagli angoli di rotazione della trottola intorno al proprio asse, rapidamente variabili, e dalla rotazione di precessione di questo asse intorno al vettore M ¹⁾.

Il moto oscillatorio degli atomi all'interno della molecola si può praticamente sempre quantizzare, cosicché lo stato oscillatorio della molecola è definito dai numeri quantici corrispondenti. In condizioni ordinarie (a temperature non troppo alte) tuttavia le oscillazioni non sono in generale eccitate e la molecola si trova al suo livello oscillatorio fondamentale (nullo).

In seguito, in questo capitolo indicheremo con il simbolo Γ la totalità di tutte le variabili, dalle quali dipende la funzione di distribuzione, ad eccezione delle coordinate della molecola, come un tutt'uno (anche il tempo t). Separiamo il fattore $dV = dx dy dz$ dall'elemento di volume $d\tau$ dello spazio delle fasi e indichiamo con il simbolo $d\Gamma$ la sua parte restante trasformata nelle variabili utilizzate (e integrata sugli angoli dai quali la funzione f non dipende). Le grandezze Γ godono di una proprietà generale importante: sono integrali del moto che restano costanti per ogni molecola durante il suo moto libero (in assenza di un campo esterno) fra due collisioni successive; dopo ogni collisione queste grandezze, in generale, cambiano. Al contrario, le coordinate x, y, z della molecola come un tutt'uno variano, ovviamente, durante tutto il moto libero.

Per un gas monoatomico le grandezze Γ sono le tre componenti dell'impulso dell'atomo $p = mv$, in modo che $d\Gamma = d^3p$. Per una molecola biatomica la grandezza Γ contiene, oltre all'impulso p , anche il momento angolare M ; l'elemento $d\Gamma$ si può rappresentare

¹⁾ Nella rotazione di una molecola del tipo a trottola sferica (CH_4 , ad esempio) restano costanti due angoli che definiscono l'orientazione della molecola rispetto alla direzione M (coincidente con quella della velocità angolare Ω). Nella rotazione di una molecola del tipo a trottola asimmetrica resta costante una combinazione di angoli espressa dalla costanza dell'energia rotazionale $E_{rot} = M_\xi^2/2I_1 + M_\eta^2/2I_2 + M_\zeta^2/2I_3$, dove M_ξ, M_η, M_ζ sono le proiezioni del vettore costante M sugli assi principali di inerzia della molecola, che ruotano.

corrispondentemente nella forma

$$d\Gamma = 2\pi d^3p M dM do_M, \quad (1,1)$$

dove do_M è l'elemento di angolo solido per la direzione del vettore M ¹⁾. Per una molecola del tipo a trottola simmetrica la grandezza Γ comprende anche l'angolo θ formato da M e dall'asse della trottola; l'elemento è

$$d\Gamma = 4\pi^2 d^3p M^2 dM do_M d \cos \theta$$

(un fattore 2π è comparso in seguito all'integrazione sull'angolo di rotazione della trottola intorno al proprio asse; l'altro fattore 2π è dovuto all'integrazione sugli angoli di rotazione di precessione).

L'integrale

$$\int f(t, r, \Gamma) d\Gamma = N(t, r)$$

rappresenta la densità di distribuzione spaziale delle particelle di gas; $N dV$ è il numero medio di molecole contenute nell'elemento di volume dV . A questo proposito dobbiamo fare la seguente osservazione.

Quando si parla di un elemento di volume dV infinitesimo, si intende un volume, propriamente parlando, piccolo non matematicamente, bensì fisicamente, cioè una zona spaziale di dimensioni piccole rispetto a quelle caratteristiche L del problema, ma grandi al tempo stesso se si tiene conto delle dimensioni delle molecole. In altre parole, l'affermazione che la molecola si trova in un dato elemento di volume dV , nel migliore dei casi significa unicamente che la sua posizione è definita con un'approssimazione fino a distanze dell'ordine delle dimensioni della molecola stessa. Questa circostanza è di importanza fondamentale. Infatti, se le coordinate delle particelle di gas fossero definite precisamente, allora il risultato della collisione, diciamo fra due atomi di un gas monoatomico descriventi due traiettorie classiche, sarebbe anch'esso definito completamente. Nella teoria cinetica dei gas si ha sempre a che fare invece con la collisione fra atomi in un dato elemento di volume fisicamente piccolo. Data l'indeterminazione sulla precisa posizione reciproca degli atomi, il risultato della collisione sarà anch'esso indeterminato, e si

¹⁾ Si può ottenere l'espressione (1,1) scrivendo prima $d\Gamma$ nella forma

$$d\Gamma = d^3p \delta(Mn) d^3M do_n = d^3p \delta(M \cos \theta) M^2 dM do_M d \cos \theta d\varphi,$$

dove $do_n = d \cos \theta d\varphi$ è l'elemento di angolo solido per le direzioni dell'asse della molecola (θ è l'angolo fra questo asse e M). La funzione δ esprime il fatto che M ha due sole componenti indipendenti (corrispondenti al numero di gradi di libertà di rotazione della molecola biatomica): il momento M è perpendicolare all'asse della molecola. Integrando l'espressione scritta su $d \cos \theta d\varphi$, otteniamo la formula (1,1).

può parlare soltanto della probabilità di questo o di quell'altro esito.

Possiamo ora precisare che, parlando della densità media del numero di particelle, intendiamo con ciò la media rispetto a elementi di volume fisicamente infinitesimi e quindi rispetto a tempi dell'ordine di grandezza di quelli necessari alle particelle per attraversare tali elementi.

Poiché le dimensioni degli elementi di volume, in relazione ai quali è definita la funzione di distribuzione, sono grandi rispetto alle dimensioni molecolari d , le distanze L , alle quali questa funzione varia notevolmente, devono essere grandi anch'esse rispetto a d . Il rapporto fra le dimensioni degli elementi di volume fisicamente infinitesimi e la distanza intermolecolare media \bar{r} può essere, in generale, arbitrario. Però, il carattere della densità N , definita dalla funzione di distribuzione, cambia in funzione del valore di questo rapporto. Se le dimensioni degli elementi dV non sono grandi rispetto a \bar{r} , la densità N non è una grandezza macroscopica: le fluttuazioni del numero di particelle contenute in dV sono commensurabili con il suo valore medio. La densità N diventa una grandezza macroscopica solo se è definita in rapporto a volumi dV contenenti molte particelle; in questo caso le fluttuazioni del numero di particelle in questi volumi sono relativamente piccole. È chiaro, tuttavia, che questa definizione è possibile solo nel caso in cui anche le dimensioni caratteristiche del problema siano $L \gg \bar{r}$.

§ 2. Principio dell'equilibrio dettagliato

Consideriamo gli urti tra molecole, di cui una ha i valori delle grandezze Γ appartenenti a un dato intervallo $d\Gamma$, e l'altra all'intervallo $d\Gamma_1$; inoltre, in seguito alla collisione, queste molecole assumono i valori di Γ negli intervalli $d\Gamma'$ e $d\Gamma'_1$, rispettivamente. Per brevità, parleremo semplicemente degli urti fra le molecole Γ e Γ_1 con transizione $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$. Il numero totale di questi urti, riferito all'unità di tempo e all'unità di volume del gas, si può scrivere sotto forma di prodotto del numero di molecole nell'unità di volume (questo numero vale $f(t, r, \Gamma) d\Gamma$) per la probabilità di ogni molecola di essere soggetta a un urto del tipo considerato. In ogni caso questa probabilità è proporzionale al numero di molecole Γ_1 nell'unità di volume (uguale a $f(t, r, \Gamma_1) d\Gamma_1$) e agli intervalli $d\Gamma'$ e $d\Gamma'_1$ dei valori delle grandezze Γ delle due molecole dopo l'urto. Quindi, il numero di urti con transizione $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$, che si producono in 1 s in 1 cm³, si può scrivere nella forma

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 \quad (2,1)$$

(qui e più avanti gli indici delle funzioni f corrispondono a quelli dei loro argomenti Γ : $f_1 \equiv f(t, r, \Gamma_1)$, $f' \equiv f(t, r, \Gamma')$ ecc.); il

coefficiente w è funzione di tutti gli argomenti Γ in essa citati ¹⁾. Il rapporto fra $w d\Gamma' d\Gamma_1'$ e il valore assoluto della velocità relativa $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ delle molecole collidenti ha la dimensione di un'area e rappresenta la sezione efficace d'urto

$$d\sigma = \frac{w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|} d\Gamma' d\Gamma_1'. \quad (2,2)$$

La funzione w può essere definita, in teoria, solo mediante la soluzione del problema meccanico dell'urto tra particelle che interagiscono secondo la data legge. Ma alcune proprietà di questa funzione possono essere precisate già in base a considerazioni generali ²⁾.

Come è noto, la probabilità d'urto ha una proprietà importante che deriva dalla simmetria delle leggi meccaniche (classiche o quantistiche) rispetto all'inversione del segno del tempo (si veda III, § 144). Indichiamo con Γ^T i valori delle grandezze che si ottengono da Γ per inversione del tempo. Questa operazione cambia i segni di tutti gli impulsi e i momenti; pertanto se $\Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{M})$, allora $\Gamma^T = (-\mathbf{p}, -\mathbf{M})$. Poiché l'inversione del tempo permuta gli stati « prima » e « dopo » l'urto, allora

$$w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma_1'^T). \quad (2,3)$$

È da notare che questa relazione garantisce che nello stato di equilibrio statistico sia verificato il *principio dell'equilibrio dettagliato* secondo il quale, in equilibrio, il numero di urti con transizione $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma_1'$ è uguale al numero di urti con transizione $\Gamma'^T, \Gamma_1'^T \rightarrow \Gamma^T, \Gamma_1^T$. Infatti, rappresentando questi numeri nella forma (2,1), abbiamo

$$\begin{aligned} w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) f_0 f_{01} d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1' = \\ = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma_1'^T) f_0' f_{01}' d\Gamma^T d\Gamma_1^T d\Gamma'^T d\Gamma_1'^T, \end{aligned}$$

dove f_0 è la funzione di distribuzione di equilibrio (di Boltzmann). Il prodotto degli elementi di volume dello spazio delle fasi $d\Gamma d\Gamma_1 \times \times d\Gamma' d\Gamma_1'$ non cambia per inversione del tempo; pertanto si possono omettere i differenziali in entrambi i membri dell'uguaglianza scritta. Inoltre, sostituendo t con $-t$ l'energia non cambia: $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma^T)$, dove $\varepsilon(\Gamma)$ è l'energia della molecola in funzione delle grandezze Γ . Poiché la funzione di distribuzione di equilibrio (in un gas

¹⁾ Le caratteristiche degli stati iniziale (*i*) e finale (*f*) nella funzione w si scrivono nell'ordine da destra a sinistra, cioè $w(f; i)$, come si usa in meccanica quantistica.

²⁾ Sottolineiamo subito che anche se il moto libero delle molecole è supposto classico, ciò non esclude affatto che la loro sezione d'urto debba essere definita quantomeccanicamente (come, fra l'altro, avviene). Tutta la deduzione esposta dell'equazione cinetica è indipendente dalla natura (classica o quantistica) della funzione w .

fermo nel suo insieme) dipende unicamente dall'energia, ossia

$$f_0(\Gamma) = \text{costante} \cdot e^{-\varepsilon(\Gamma)/T} \quad (2,4)$$

(dove T è la temperatura del gas), allora anche $f_0(\Gamma) = f_0(\Gamma^T)$. Infine, in virtù della legge di conservazione dell'energia nell'urto di due molecole, $\varepsilon + \varepsilon_1 = \varepsilon' + \varepsilon'_1$. Pertanto

$$f_0 f_{01} = f'_0 f'_{01}, \quad (2,5)$$

e l'uguaglianza scritta sopra si riduce a quella (2,3).

Questa affermazione resta valida, ovviamente, anche per un gas che si muove a velocità macroscopica V . In questo caso la funzione di distribuzione di equilibrio è

$$f_0(\Gamma) = \text{costante} \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon(\Gamma) - pV}{T} \right), \quad (2,6)$$

e l'uguaglianza (2,5) continuerà ad essere verificata in virtù della conservazione della quantità di moto negli urti: $p + p_1 = p' + p'_1$ ¹⁾.

Sottolineiamo che l'uguaglianza (2,5) è legata unicamente alla forma della distribuzione (2,4) o (2,6) come funzione delle grandezze Γ ; quanto ai parametri T e V , essi possono variare in funzione del volume del gas.

Si può dare anche un'altra formulazione del principio dell'equilibrio dettagliato. A tale scopo, oltre all'inversione del tempo, facciamo cambiare di segno tutte le coordinate. Se le molecole non hanno una simmetria sufficiente, esse « si trasformeranno » per inversione in molecole stereoisomeriche, con le quali non potrebbero coincidere per nessuna rotazione della molecola come un insieme unico²⁾. In altre parole, in questi casi la trasformazione d'inversione significherebbe la sostituzione del gas con un'altra sostanza (stereoisomerica) e sulle sue proprietà non si potrebbe trarre nessuna conclusione nuova. Se invece la simmetria delle molecole non ammette stereoisomeria, allora il gas resta immutato per inversione e le grandezze che descrivono le proprietà del gas macroscopicamente omogeneo devono restare invariate.

Indichiamo con Γ^{TP} l'insieme di grandezze che si ottengono da Γ per inversione simultanea del tempo e del segno. L'inversione fa cambiare di segno tutti i vettori comuni (polari), compreso il vettore quantità di moto p , lasciando però invariati i vettori assiali, tra cui il vettore momento angolare M . Perciò, se $\Gamma = (p, M)$, allora

¹⁾ La formula (2,6) si ottiene dalla (2,4) trasformando l'energia della molecola dal sistema di riferimento K_0 , in cui il gas si trova a riposo, in quella del sistema K , dove il gas si muove a velocità V : $\varepsilon_0(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma) - pV + mV^2/2$ (cfr. I, (3,5)).

²⁾ Si ricordi che la stereoisomeria esiste per molecole che non hanno né centro, né piani di simmetria.

$\Gamma^{TP} = (\mathbf{p}, -\mathbf{M})$. Accanto all'uguaglianza (2,3) avremo anche l'uguaglianza ¹⁾

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^{TP}, \Gamma_1^{TP}; \Gamma'^{TP}, \Gamma_1'^{TP}). \quad (2,7)$$

Le transizioni, alle quali si riferiscono le funzioni w in ambedue i membri dell'uguaglianza (2,3), sono dette *inverse rispetto al tempo* l'una dell'altra. Esse non sono *diretta* e *inversa* in senso letterale, in quanto differiscono per i valori di Γ (Γ e Γ^T). Tuttavia, per un gas monoatomico il principio dell'equilibrio dettagliato può essere formulato anche in termini di transizioni dirette e inverse. Poiché le grandezze Γ in questo caso sono solo le tre componenti della quantità di moto dell'atomo, allora $\Gamma = \Gamma^{TP} = \mathbf{p}$ e dalla (2,7) ricaviamo

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1). \quad (2,8)$$

Qui abbiamo a che fare con un « equilibrio dettagliato » nel senso letterale della parola: ogni processo di urto microscopico è bilanciato da un processo inverso.

La funzione w verifica ancora una relazione generale che non ha niente a che fare con la simmetria rispetto all'inversione del tempo. La deduzione di questa relazione è più evidente se effettuata in termini quantomeccanici, considerando le transizioni fra stati che formano una serie discreta; si tratta degli stati di una coppia di molecole che si muovono in un dato volume finito. Come è noto, le ampiezze delle probabilità dei diversi processi d'urto formano una matrice unitaria \hat{S} (detta *matrice di diffusione* o *matrice S*). La condizione di unitarietà afferma: $\hat{S}^* \hat{S} = 1$, oppure, in forma esplicita con gli indici matriciali (che numerano i diversi stati):

$$\sum_n S_{in}^* S_{nk} = \sum_n S_{ni}^* S_{nk} = \delta_{ik}.$$

In particolare, per $i = k$

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Il quadrato $|S_{ni}|^2$ definisce la probabilità d'urto con transizione $i \rightarrow n$ ²⁾, e l'uguaglianza scritta non esprime altro che la condizione

¹⁾ Se fra le grandezze Γ figurano anche variabili che definiscono l'orientazione rotatoria della molecola, allora, passando a Γ^T o a Γ^{TP} , queste variabili devono essere trasformate anch'esse in modo appropriato. Così, l'angolo di precessione della trottola simmetrica è dato dal prodotto Mn , dove n è la direzione dell'asse della molecola; questa grandezza cambia di segno sia per inversione del tempo che della direzione.

²⁾ Per tempi grandi il quadrato $|S_{ni}|^2$ è proporzionale a t e diviso per t dà la probabilità di transizione riferita all'unità di tempo (cfr. IV, § 64). Se le funzioni d'onda delle particelle iniziali e finali sono normalizzate « per 1 particella nel volume unitario », questa « probabilità » avrà la stessa dimensione (cm^3/s) della grandezza $w \, d\Gamma \, d\Gamma_1$ definita in base alla formula (2,1).

di normalizzazione delle probabilità: la somma delle probabilità di tutte le possibili transizioni da un dato stato iniziale è uguale a uno. Ma la condizione di unitarietà si può scrivere anche nella forma $\hat{S}\hat{S}^+ = 1$ con un altro ordine dei fattori \hat{S} e \hat{S}^+ . Allora otteniamo

$$\sum_n S_{in} S_{kn}^* = \delta_{ik} \text{ e, per } i = k, \\ \sum_n |S_{in}|^2 = 1,$$

vale a dire che è uguale a uno anche la somma delle probabilità di tutte le possibili transizioni in uno stato finale dato. Escludendo in ciascuna delle due somme il termine con $n = i$ (transizione senza cambiamento di stato), scriviamo

$$\sum_n' |S_{ni}|^2 = \sum_n' |S_{in}|^2.$$

Questa è l'uguaglianza cercata che, in termini della funzione w , si scrive nella forma

$$\int w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) d\Gamma' d\Gamma_1' = \int w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma_1') d\Gamma' d\Gamma_1'. \quad (2,9)$$

§ 3. Equazione cinetica di Boltzmann

Passiamo ora alla deduzione dell'equazione fondamentale della teoria cinetica dei gas, ossia dell'equazione che definisce la funzione di distribuzione $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$.

Se si potessero trascurare completamente le collisioni fra molecole, ogni molecola del gas rappresenterebbe un sottosistema chiuso e per la funzione di distribuzione delle molecole sarebbe valido il teorema di Liouville, secondo il quale

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (3,1)$$

(cfr. V, § 3). La derivata totale significa qui derivazione lungo la traiettoria di fase della molecola, definita dalle equazioni del moto. Si ricordi che il teorema di Liouville sussiste per la funzione di distribuzione definita esattamente come la densità nello spazio delle fasi (cioè nello spazio delle variabili, che sono le coordinate e i momenti generalizzati canonicamente coniugati). Questa circostanza non impedisce, naturalmente, che la funzione stessa f possa essere espressa poi anche mediante altre variabili qualsiasi.

In assenza di campo esterno, le grandezze Γ di una molecola che si muove di moto libero restano costanti e variano soltanto le coordinate \mathbf{r} ; in questo caso

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f. \quad (3,2)$$

Se, invece, il gas si trova, ad esempio, in un campo esterno $U(\mathbf{r})$ agente sulle coordinate del centro d'inerzia della molecola (in un campo di gravità, diciamo), allora

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3,3)$$

dove $\mathbf{F} = -\nabla U$ è la forza con cui il campo agisce sulla molecola.

L'uguaglianza (3,1) viene violata se si tiene conto degli urti; la funzione di distribuzione cessa di essere costante lungo le traiettorie di fase. In luogo della (3,1) si deve scrivere

$$\frac{df}{dt} = \text{St } f, \quad (3,4)$$

dove il simbolo $\text{St } f$ indica la velocità di variazione della funzione di distribuzione in seguito agli urti: $dV d\Gamma \cdot \text{St } f$ è la variazione in seguito ad urti del numero di molecole nel volume di fase $dV d\Gamma$, riferita all'unità di tempo. L'equazione (3,4) scritta nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla f + \text{St } f$$

(con df/dt dalla relazione (3,2)) definisce la variazione totale della funzione di distribuzione in un dato punto dello spazio delle fasi; il termine $dV d\Gamma (\mathbf{v} \nabla f)$ esprime la diminuzione (in 1 s) del numero di molecole in un dato elemento dello spazio delle fasi, dovuta al moto libero delle molecole.

La grandezza $\text{St } f$ si chiama *integrale degli urti*; le equazioni della forma (3,4) portano in generale il nome di *equazioni cinetiche*. Affinché un'equazione cinetica acquisti un significato reale è ovvio che prima si deve stabilire la forma dell'integrale degli urti. Ora passiamo a questo problema.

Quando due molecole si urtano, i valori delle loro grandezze Γ variano. Perciò ogni urto subito dalla molecola la fa uscire da un dato intervallo $d\Gamma$; questi urti si chiamano perciò atti di « uscita ». Il numero totale di urti con transizioni $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$, con tutti i valori possibili di $\Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$ per Γ dato, che avvengono nell'unità di tempo nel volume dV , è uguale all'integrale

$$dV d\Gamma \int w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

Tuttavia, avvengono anche degli urti (« arrivo ») tali che delle molecole, che inizialmente possedevano valori delle grandezze Γ non appartenenti a un dato intervallo $d\Gamma$, finiscono in questo intervallo. Sono gli urti con transizioni $\Gamma', \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma, \Gamma_1$, nuovamente con tutti i valori possibili $\Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$ per Γ dato. Il numero totale di questi urti (nell'unità di tempo nel volume dV) è pari a

$$dV d\Gamma \int w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

Sottraendo il numero degli atti di uscita da quello degli atti di arrivo, troviamo così che in seguito a tutti gli urti il numero di molecole in questione aumenta in 1 s di

$$dV d\Gamma \int (w' f' f'_1 - w f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1,$$

dove per brevità abbiamo indicato

$$w \equiv w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1), \quad w' \equiv w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1). \quad (3,5)$$

In tal modo troviamo la seguente espressione per l'integrale degli urti:

$$St f = \int (w' f' f'_1 - w f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (3,6)$$

Nel secondo termine dell'espressione integranda l'integrazione in $d\Gamma' d\Gamma'_1$ si riferisce unicamente alla funzione w ; i fattori f, f_1 non dipendono da queste variabili. Pertanto si può trasformare questa parte dell'integrale mediante la relazione di unitarietà (2,9). Dopo questa trasformazione l'integrale degli urti assume la forma

$$St f = \int w' (f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1, \quad (3,7)$$

dove i due termini figurano con lo stesso coefficiente w' ¹⁾.

Avendo stabilito la forma dell'integrale degli urti abbiamo ottenuto quindi la possibilità di scrivere l'equazione cinetica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \int w' (f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (3,8)$$

Questa equazione integro-differenziale si dice anche *equazione di Boltzmann*. È stato *Ludwig Boltzmann*, fondatore della teoria cinetica, a dedurla originariamente nel 1872.

La distribuzione statistica di equilibrio deve verificare identicamente l'equazione cinetica. Questa condizione viene effettivamente soddisfatta. La distribuzione di equilibrio è stazionaria e (in assenza di campo esterno) omogenea; perciò il primo membro dell'equazione (3,8) si annulla identicamente. L'integrale degli urti è anch'esso nullo poiché, in virtù dell'uguaglianza (2,5), si annulla l'espressione integranda. È ovvio che la distribuzione di equilibrio per un gas in un campo esterno verifica anch'essa l'equazione cinetica. È sufficiente ricordare che il primo membro dell'equazione cinetica rappresenta la derivata totale df/dt , che si annulla identicamente per ogni funzione f dipendente unicamente dagli integrali del moto; quanto alla distribuzione di equilibrio, essa si esprime soltanto mediante l'integrale del moto, l'energia totale della molecola $\varepsilon(\Gamma)$.

¹⁾ La possibilità di trasformare l'integrale degli urti mediante la relazione (2,9) è stata indicata da E.C.G. Stückelberg (1952).

Nella deduzione data dell'equazione cinetica gli urti fra le molecole venivano considerati, di fatto, come atti istantanei che avvengono in un punto dello spazio. È chiaro quindi che l'equazione cinetica consente di seguire, in principio, la variazione della funzione di distribuzione soltanto in intervalli di tempo grandi rispetto alla durata degli urti e a distanze altrettanto grandi rispetto alle dimensioni del dominio dell'urto. Queste ultime sono dell'ordine di grandezza del raggio d'azione delle forze molecolari d (coincidente per le molecole neutre con le loro dimensioni); la durata degli urti è dell'ordine di grandezza di d/\bar{v} . Sono questi valori a fissare il limite inferiore delle distanze e delle durate, il cui studio è possibile mediante l'equazione cinetica (sull'origine di queste limitazioni torneremo ancora al § 16). Di solito non c'è necessità (né possibilità) di una descrizione così dettagliata del comportamento di un sistema; a tale scopo si dovrebbero assegnare, in particolare, anche le condizioni iniziali (la distribuzione spaziale delle molecole del gas) con la stessa precisione, il che è di fatto irrealizzabile. Nelle questioni fisiche reali esistono parametri caratteristici di lunghezza L e di tempo T , imposti al sistema dalle ipotesi del problema (lunghezze caratteristiche dei gradienti delle grandezze macroscopiche del gas, lunghezze e periodi delle onde sonore che si propagano in esso ecc.). In questi problemi è sufficiente seguire il comportamento del sistema su distanze e intervalli di tempo piccoli soltanto rispetto ai parametri L e T . In altre parole, devono essere piccoli soltanto rispetto a L e T gli elementi di volume e di tempo fisicamente infinitesimi. Anche le condizioni iniziali del problema sono date da medie rispetto a questi elementi.

Per un gas monoatomico, le grandezze Γ si riducono alle tre componenti della quantità di moto dell'atomo \mathbf{p} , e secondo la (2,8) la funzione w' nell'integrale degli urti può essere sostituita con $w = w(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$. Esprimendo in seguito questa funzione mediante la sezione differenziale d'urto $d\sigma$ in base alla regola $w d^3p' d^3p_1' = v_{\text{rel}} d\sigma$ (dove $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$; si veda la (2,2)), otteniamo

$$\text{St } f = \int v_{\text{rel}} (f'f_1' - ff_1) d\sigma d^3p_1. \quad (3,9)$$

La funzione w , così come la sezione $d\sigma$ definita dalla (2,2), contiene fattori funzionali δ esprimenti le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia, in forza delle quali le variabili $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1'$ (per un dato \mathbf{p}) non sono in realtà indipendenti. Ma dopo aver espresso l'integrale degli urti nella forma (3,9) si può supporre che queste funzioni δ siano già eliminate dalle integrazioni corrispondenti; allora $d\sigma$ sarà una comune sezione di diffusione, dipendente unicamente (per v_{rel} data) dall'angolo di diffusione.

Per lo studio qualitativo dei fenomeni cinetici nel gas si ricorre a una stima approssimata dell'integrale degli urti, mediante la no-

zione di *lunghezza del cammino libero* l , cioè della distanza media percorsa da una molecola fra due urti consecutivi ¹⁾. È ovvio che questa grandezza non ha che un carattere qualitativo; la sua stessa definizione dipende da quale fenomeno cinetico si considera nel gas.

La lunghezza del cammino libero può essere espressa in funzione della sezione d'urto σ e della densità del numero di molecole N nel gas. Supponiamo che la molecola nel suo moto abbia percorso 1 cm; lungo questo percorso essa ha urtato contro le molecole contenute nel volume σ (volume del cilindro con sezione di area σ e lungo 1 cm); questo volume contiene σN molecole. È chiaro perciò che

$$l \sim 1/N\sigma. \quad (3,10)$$

La sezione d'urto $\sigma \sim d^2$, essendo d le dimensioni molecolari. Scrivendo anche $N \sim \bar{r}^{-3}$, dove \bar{r} è la distanza media fra le molecole, troviamo che

$$l \sim \bar{r} \left(\frac{\bar{r}}{d} \right)^2 = d \left(\frac{\bar{r}}{d} \right)^3. \quad (3,11)$$

Poiché nel gas $\bar{r} \gg d$, la lunghezza del percorso $l \gg \bar{r}$.

Il rapporto $\tau \sim l/\bar{v}$ si chiama *durata del cammino libero*. Per dare una stima grossolana dell'integrale degli urti si può porre

$$\text{St } f \sim -\frac{f-f_0}{\tau} \sim -\frac{\bar{v}}{l}(f-f_0). \quad (3,12)$$

Scrivendo al numeratore la differenza $f - f_0$, abbiamo tenuto conto, quindi, che l'integrale degli urti si annulla per la funzione di distribuzione d'equilibrio. Il segno negativo nella (3,12) esprime il fatto che gli urti rappresentano il meccanismo con cui si instaura l'equilibrio statistico, cioè che essi tendono a far diminuire la deviazione della funzione di distribuzione da quella d'equilibrio. In questo senso la grandezza τ funge da tempo di rilassamento necessario perché in ogni elemento di volume del gas si stabilisca l'equilibrio.

§ 4. Teorema H

Un gas a sé stante, come ogni sistema macroscopico chiuso, tende a passare allo stato d'equilibrio. Rispettivamente, l'evoluzione della funzione di distribuzione di non equilibrio deve accompagnarsi, in accordo con l'equazione cinetica, all'aumentare dell'entropia del gas. Mostriamo che ciò è effettivamente vero.

Come è noto, l'entropia di un gas perfetto, che si trova in uno stato di non equilibrio macroscopico, descritto dalla funzione di distribuzione f , è

$$S = \int f \ln \frac{e}{f} dV d\Gamma \quad (4,1)$$

¹⁾ Questa nozione è stata introdotta per la prima volta da R. Clausius (1858).

(si veda V, § 40). Derivando questa espressione rispetto al tempo, scriviamo

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(f \ln \frac{e}{f} \right) dV d\Gamma = - \int \ln f \frac{\partial f}{\partial t} dV d\Gamma. \quad (4,2)$$

Poiché sono gli urti fra le molecole a stabilire l'equilibrio statistico nel gas, l'aumento dell'entropia deve essere legato proprio alla parte della variazione della funzione di distribuzione da ascrivere agli urti. La variazione di questa funzione, legata invece al moto libero delle molecole, non può cambiare l'entropia del gas. Infatti, questa parte della variazione della funzione di distribuzione è data (per un gas in un campo esterno $U(\mathbf{r})$) dai primi due termini a secondo membro dell'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla f - \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \text{St } f.$$

Il loro contributo alla derivata dS/dt vale

$$\begin{aligned} - \int \ln f \left[-\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right] dV d\Gamma = \\ = \int \left[\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] \left(f \ln \frac{f}{e} \right) dV d\Gamma. \end{aligned}$$

Ma l'integrale in dV del termine contenente la derivata $\partial/\partial \mathbf{r}$ si trasforma, secondo il teorema di Gauss, in un integrale di superficie; integrando su tutto il volume, esso si annulla in quanto $f=0$ all'esterno del volume occupato dal gas. Analogamente, il termine contenente la derivata $\partial/\partial \mathbf{p}$, per integrazione in d^3p , si trasforma in un integrale esteso a una superficie infinitamente lontana nello spazio dei momenti lineari e anch'esso si annulla.

Quindi, per la variazione dell'entropia resta l'espressione

$$\frac{dS}{dt} = - \int \ln f \cdot \text{St } f d\Gamma dV. \quad (4,3)$$

Questo integrale si può trasformare mediante un procedimento che formuliamo (tenendo presente anche le applicazioni ulteriori) in forma generale per l'integrale

$$\int \varphi(\Gamma) \text{St } f d\Gamma,$$

dove $\varphi(\Gamma)$ è qualsiasi funzione delle grandezze Γ . Rappresentando l'integrale degli urti nella forma (3,6), scriviamo

$$\begin{aligned} \int \varphi(\Gamma) \text{St } f d\Gamma = \int \varphi w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma - \\ - \int \varphi w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d^4\Gamma, \end{aligned}$$

dove, per brevità, si è introdotta la notazione $d^4\Gamma = d\Gamma_1 d\Gamma'_1 d\Gamma'_1$. Poiché qui si integra su tutte le variabili $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$, si può, senza cambiare l'integrale, eseguire qualsiasi modifica nella notazione delle variabili. Cambiando reciprocamente le notazioni Γ, Γ_1 e Γ', Γ'_1 nel secondo integrale, otteniamo

$$\int \varphi(\Gamma) St f d\Gamma = \int (\varphi - \varphi') w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma.$$

Scambiando ora la notazione $\Gamma, \Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma'_1$, calcolando la semisomma degli integrali così ottenuti e tenendo conto della simmetria evidente della funzione w rispetto a due particelle collidenti, otteniamo la formula della trasformazione

$$\int \varphi(\Gamma) St f d\Gamma = \frac{1}{2} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) w' f' f'_1 d^4\Gamma. \quad (4,4)$$

In particolare, l'integrale $\int St f d\Gamma = 0$; rappresentando qui $St f$ nella forma (3,7), abbiamo

$$\int St f d\Gamma = \int w' (f' f'_1 - f f_1) d^4\Gamma = 0. \quad (4,5)$$

Applicata all'integrale (4,3) la formula (4,4) dà

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f' f'_1 \ln \frac{f' f'_1}{f f_1} d^4\Gamma dV = \frac{1}{2} \int w' f f_1 x \ln x d^4\Gamma dV,$$

dove $x = f' f'_1 / f f_1$. Sottraendo da questa espressione la metà dell'integrale nullo (4,5), la riscriviamo nella forma

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f f_1 (x \ln x - x + 1) d^4\Gamma dV. \quad (4,6)$$

La funzione fra parentesi nell'espressione integranda è non negativa per tutti gli $x > 0$: essa è nulla per $x = 1$ e cresce da ambo i lati di questo punto. Per definizione, i fattori w', f, f_1 sotto il segno di integrale sono anch'essi positivi. Quindi, siamo giunti al risultato richiesto

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad (4,7)$$

che esprime la legge dell'aumento dell'entropia (il segno di uguaglianza ha luogo in equilibrio)¹⁾.

Sottolineiamo che in virtù della non negatività dell'espressione integranda nella formula (4,6) (e, quindi, anche nella (4,3)) è positivo non soltanto tutto l'integrale (4,3) in $d\Gamma dV$, ma anche l'inte-

¹⁾ La dimostrazione della legge dell'aumento dell'entropia mediante l'equazione cinetica è stata data da Boltzmann ed è stata la prima giustificazione microscopica di questa legge. Applicata ai gas questa legge si chiama spesso *teorema H* (per via della notazione H usata da Boltzmann per l'entropia).

grale in $d\Gamma$. In altre parole, gli urti implicano l'aumento dell'entropia in ogni elemento di volume del gas. Ciò non significa, ovviamente, che l'entropia cresca in generale in ogni elemento di volume, poiché può essere trasportata da un elemento all'altro grazie al moto libero delle molecole.

§ 5. *Passaggio alle equazioni macroscopiche*

L'equazione cinetica di Boltzmann dà una descrizione microscopica dell'evoluzione dello stato di un gas. Mostriamo in che modo si passa dall'equazione cinetica alle equazioni idrodinamiche ordinarie che forniscono una descrizione macroscopica meno particolareggiata di questa evoluzione. Questa descrizione è applicabile nelle condizioni in cui le proprietà macroscopiche del gas (temperatura, densità, velocità ecc.) variano con sufficiente lentezza all'interno del volume occupato: le distanze L , alle quali queste proprietà variano sostanzialmente, devono essere grandi rispetto alla lunghezza del cammino libero l delle molecole.

Abbiamo già detto che l'integrale

$$N(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d\Gamma \quad (5.1)$$

è la densità di distribuzione delle molecole del gas nello spazio; il prodotto $\rho = mN$ rappresenta corrispondentemente la densità di massa del gas. Indichiamo con \mathbf{V} la velocità del moto macroscopico del gas (a differenza delle velocità microscopiche \mathbf{v} delle molecole); essa è definita come la media

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f d\Gamma. \quad (5.2)$$

Gli urti non cambiano né il numero di particelle collidenti, né le loro energie totali, né le quantità di moto totali. È chiaro perciò che la parte relativa agli urti della variazione della funzione di distribuzione non può implicare la variazione anche delle grandezze macroscopiche in ciascun elemento di volume del gas: la densità, l'energia interna e la velocità macroscopica \mathbf{V} . Infatti, le parti relative agli urti della variazione del numero, dell'energia e delle quantità di moto totali delle molecole nell'unità di volume del gas sono date dagli integrali nulli

$$\int St f d\Gamma = 0, \quad \int \varepsilon St f d\Gamma = 0, \quad \int \mathbf{p} St f d\Gamma = 0. \quad (5.3)$$

È facile provare queste uguaglianze applicando ai detti integrali la trasformazione (4.4), rispettivamente, con $\varphi = 1$, ε o \mathbf{p} (il primo integrale si annulla identicamente, e il secondo e il terzo si annullano in virtù della conservazione dell'energia e della quantità di moto per urti).

Scriviamo ora l'equazione cinetica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha f) = St f \quad (5,4)$$

ed integriamola su $d\Gamma$, moltiplicando preliminarmente per m , p_β o ε . In tutti e tre i casi il secondo membro dell'equazione si annulla, e noi otteniamo le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad (5,5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\alpha + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (5,6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N \bar{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (5,7)$$

La prima di esse è l'ordinaria equazione idrodinamica di continuità che esprime la conservazione della massa del gas. La seconda equazione esprime la conservazione del momento lineare; il tensore $\Pi_{\alpha\beta}$ è definito come

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\Gamma \quad (5,8)$$

e rappresenta il tensore di densità del flusso del momento lineare: la sua componente $\Pi_{\alpha\beta}$ è l' α -esima componente della quantità di moto trasportata dalle molecole in 1 s attraverso l'unità di superficie perpendicolare all'asse x_β . Infine, la (5,7) è l'equazione di conservazione dell'energia; il vettore \mathbf{q} è definito come

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f d\Gamma \quad (5,9)$$

e rappresenta la densità del flusso di energia nel gas.

Per ridurre le (5,6) e (5,7) alla forma delle equazioni idrodinamiche ordinarie occorre, però, esprimere ancora $\Pi_{\alpha\beta}$ e \mathbf{q} in funzione delle grandezze macroscopiche. Abbiamo già detto che la descrizione macroscopica del gas suppone che i gradienti delle sue caratteristiche macroscopiche siano sufficientemente piccoli. Allora, in prima approssimazione, si può supporre che in ogni piccola parte separata di gas si stabilisca in tempo l'equilibrio termico, mentre l'intero gas non si trova in equilibrio. In altre parole, in ogni elemento di volume la funzione di distribuzione f è supposta *d'equilibrio locale*, cioè coincidente con la funzione d'equilibrio f_0 con le stesse densità, temperatura e velocità macroscopica che esistono nell'elemento considerato. Questa approssimazione significa che vanno trascurati tutti i processi dissipativi nel gas, ossia la viscosità e la conduzione termica. È naturale che le equazioni (5,6-7) si trasformino in questo caso nelle equazioni idrodinamiche per un liquido perfetto. Proviamo a convincercene.

La distribuzione d'equilibrio in una parte di gas in moto come un tutt'uno a velocità V differisce dalla distribuzione d'equilibrio nel gas immobile per una sola trasformazione galileiana; passando al sistema di riferimento K' in moto con il gas, avremo la comune distribuzione di Boltzmann. Le velocità v' delle molecole in questo sistema sono legate alle loro velocità nel sistema iniziale K dalla relazione $v = v' + V$. Scriviamo

$$\Pi_{\alpha\beta} = mN \langle v_\alpha v_\beta \rangle = mN \langle (V_\alpha + v'_\alpha) (V_\beta + v'_\beta) \rangle = mN (V_\alpha V_\beta + \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle);$$

i termini $V_\alpha v'_\beta$ e $V_\beta v'_\alpha$ si annullano quando si calcola la media rispetto alle direzioni di v' , poiché tutte le direzioni della velocità molecolare nel sistema K' sono equiprobabili. Per la stessa ragione

$$\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \delta_{\alpha\beta}; \quad (5,10)$$

la media del quadrato della velocità termica, invece, $\langle v'^2 \rangle = 3T/m$, dove T è la temperatura del gas. Infine, osservando che NT è la pressione del gas P , otteniamo

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + \delta_{\alpha\beta} P, \quad (5,11)$$

cioè la nota espressione per il tensore del flusso della quantità di moto in un liquido perfetto; l'equazione (5,6) con questo tensore è equivalente all'equazione idrodinamica di Eulero (si veda VI, § 7).

Per trasformare l'integrale (5,9), osserviamo che l'energia ε della molecola nel sistema di riferimento K è legata alla sua energia ε' nel sistema K' dalla relazione

$$\varepsilon = \varepsilon' + mVv' + \frac{1}{2} mV^2.$$

Sostituendo questa espressione e la relazione $v = v' + V$ in $q = N\varepsilon v$, otteniamo

$$q = NV \left[\frac{mV^2}{2} + \frac{m}{3} \overline{v'^2} + \overline{\varepsilon'} \right] = V \left(\frac{\rho V^2}{2} + P + N\overline{\varepsilon'} \right)$$

(per calcolare la media del prodotto v' (Vv') abbiamo usato la formula (5,10)). Ma $N\overline{\varepsilon'}$ è l'energia interna termodinamica del gas riferita all'unità di volume; la somma $N\overline{\varepsilon'} + P$, invece, è la funzione termica W della stessa quantità di gas. In tal modo

$$q = V \left(\frac{\rho V^2}{2} + W \right) \quad (5,12)$$

in accordo con la nota espressione del flusso dell'energia nell'idrodinamica del liquido perfetto (si veda VI, § 6).

Infine, soffermiamoci sulla legge di conservazione del momento angolare nell'equazione cinetica. La legge di conservazione rigorosa deve aver luogo unicamente per il momento totale del gas, formato

dal momento orbitale delle molecole nel loro moto traslatorio e dai loro propri momenti angolari M ; la densità del momento totale è data dalla somma di due integrali

$$\int [\mathbf{rp}] f d\Gamma + \int M f d\Gamma. \quad (5,13)$$

Ma questi due termini hanno un ordine di grandezza diverso. Il momento orbitale del moto relativo di due molecole separate dalla distanza media \bar{r} è dell'ordine di grandezza $m\bar{v}\bar{r}$; il momento proprio della molecola è $M \sim m\bar{v}d$, cioè piccolo rispetto al momento orbitale (poiché è sempre $d \ll \bar{r}$).

È naturale perciò che l'equazione cinetica di Boltzmann, corrispondente alla prima approssimazione non trascurabile nella grandezza piccola d/\bar{r} , non possa tener conto delle piccole variazioni del momento orbitale, dovute allo scambio fra le due parti del momento totale (5,13). Di qui deriva il fatto che l'equazione di Boltzmann conserva il momento orbitale totale del gas: dall'uguaglianza $\int \mathbf{p} \mathbf{St} f d\Gamma = 0$, che esprime la conservazione della quantità di moto, segue automaticamente anche che

$$\int [\mathbf{rp}] \mathbf{St} f d\Gamma = \left[\mathbf{r} \int \mathbf{p} \mathbf{St} f d\Gamma \right] = 0. \quad (5,14)$$

L'origine di questa proprietà è evidente: siccome nell'equazione di Boltzmann gli urti sono considerati come se avvenissero in un solo punto, assieme alla somma delle quantità di moto delle molecole collidenti, si conserva anche la somma dei momenti orbitali. Per ottenere un'equazione, che descriva la variazione del momento orbitale, occorrerebbe tener conto dei termini di ordine successivo in d/\bar{r} , dovuti al fatto che all'istante dell'urto le molecole si trovano a distanza finita l'una dall'altra.

Al tempo stesso, però, il processo di scambio di momento fra i gradi di libertà traslatorio e rotatorio può essere descritto nei limiti dell'equazione di Boltzmann da una relazione della forma

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \int M \mathbf{St} f d\Gamma, \quad (5,15)$$

dove \mathfrak{M} è la densità del momento angolare proprio delle molecole. Poiché nell'urto fra le molecole la somma dei loro momenti propri non si conserva necessariamente, l'integrale a secondo membro della (5,15) è in generale diverso da zero e definisce la velocità di variazione della grandezza \mathfrak{M} . Se nel gas è stata creata in qualche modo artificiale una densità di momento non nulla, il suo rilassamento ulteriore verrà definito dall'equazione (5,15).

§ 6. Equazione cinetica per un gas debolmente non omogeneo

Per poter considerare i processi dissipativi (conduzione termica e viscosità) in un gas debolmente non omogeneo, si deve ricorrere all'approssimazione che segue (dopo quella studiata al paragrafo precedente). Invece di supporre che la funzione di distribuzione in ogni piccola parte di gas sia la funzione d'equilibrio locale f_0 , terremo conto di una piccola differenza tra f e f_0 , cioè scriviamo f nella forma

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \chi(\Gamma) = \frac{1}{T} f_0 \chi, \quad (6,1)$$

dove δf è una correzione piccola ($\delta f \ll f_0$). È opportuno rappresentare quest'ultima nella forma suindicata portando fuori da essa il fattore $-\partial f_0/\partial \epsilon$; per la distribuzione di Boltzmann questa derivata differisce per il solo fattore $1/T$ dalla funzione stessa f_0 . La correzione δf deve essere definita, in principio, dalla soluzione di un'equazione cinetica linearizzata rispetto ad essa ¹⁾.

Oltre all'equazione cinetica stessa, la funzione χ deve soddisfare ancora alcune condizioni supplementari. Il fatto è che f_0 rappresenta la funzione di distribuzione d'equilibrio, corrispondente alla densità del numero di particelle, all'energia e alla quantità di moto del gas date (nell'elemento di volume considerato), cioè ai valori dati degli integrali

$$\int f_0 d\Gamma, \quad \int \epsilon f_0 d\Gamma, \quad \int \mathbf{p} f_0 d\Gamma. \quad (6,2)$$

La funzione di distribuzione non d'equilibrio (6,1) deve condurre agli stessi valori di queste grandezze, vale a dire che gli integrali in f e f_0 devono essere uguali. In altre parole, ciò significa che la funzione χ deve soddisfare le condizioni

$$\int f_0 \chi d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \epsilon d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \mathbf{p} d\Gamma = 0. \quad (6,3)$$

Sottolineiamo che la nozione stessa di temperatura in un gas che non sia in equilibrio diventa definita soltanto in seguito all'assegnazione agli integrali (6,2) di determinati valori. Questa nozione ha un carattere incondizionato soltanto nello stato completamente d'equilibrio del gas nel suo insieme; per la definizione della temperatura in un gas che non è in equilibrio occorre una condizione supplementare, quale è l'assegnazione dei suddetti valori.

Prima di tutto trasformiamo l'integrale degli urti nell'equazione cinetica (3,8). Sostituendovi le funzioni nella forma (6,1), i termini non contenenti la piccola correzione χ si elidono mutuamente, poiché la funzione di distribuzione d'equilibrio annulla l'integrale degli

¹⁾ Questo metodo di soluzione dell'equazione cinetica appartiene a D. Enskog (1917).

urti. I termini del primo ordine danno

$$\text{St } f = \frac{f_0}{T} I(\chi), \quad (6,4)$$

dove $I(\chi)$ indica l'operatore integrale lineare

$$I(\chi) = \int w' f_{01} (\chi' + \chi'_1 - \chi - \chi_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (6,5)$$

Qui è stata utilizzata l'uguaglianza $f_0 f_{01} = f'_0 f'_{01}$; il fattore f_0 può essere portato fuori dal segno di integrale, poiché non si integra su $d\Gamma$.

Sottolineiamo che l'integrale (6,5) si annulla identicamente per le funzioni

$$\chi = \text{costante}, \quad \chi = \text{costante} \cdot \varepsilon, \quad \chi = p \delta V \quad (6,6)$$

(dove δV è un vettore costante); l'annullarsi dell'integrale per la seconda e la terza di queste funzioni è dovuto alla conservazione dell'energia e della quantità di moto in ogni urto. Essendo indipendenti dal tempo e dalle coordinate, le funzioni (6,6) verificano, quindi, tutta l'equazione cinetica.

Queste soluzioni hanno un'origine assai semplice. L'equazione cinetica è verificata identicamente dalla funzione di distribuzione d'equilibrio con qualsiasi densità (costante) di particelle e temperatura. Perciò la verifica automaticamente anche la piccola correzione

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial N} \delta N = f_0 \frac{\delta N}{N},$$

che compare al variare della densità di δN ; ne deriva la prima delle soluzioni (6,6). Analogamente verifica l'equazione anche la correzione

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial T} \delta T,$$

che compare in seguito al cambiamento della temperatura T di una piccola grandezza costante δT . Quanto alla derivata $\partial f_0 / \partial T$, essa è formata dalla somma di un termine della forma costante $\cdot f_0$ (che compare per derivazione del fattore di normalizzazione in f_0) e di un termine proporzionale ad εf_0 ; ne segue la seconda delle soluzioni (6,6). La terza di queste soluzioni compare come espressione del principio di relatività galileiano: una funzione di distribuzione d'equilibrio deve verificare l'equazione cinetica anche dopo il passaggio ad un altro sistema inerziale di riferimento. Passando a un sistema in moto rispetto al sistema iniziale con velocità costante piccola δV , le velocità v delle molecole vanno sostituite con $v - \delta V$, in modo che la funzione di distribuzione abbia l'incremento

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial v} \delta V = -\frac{f_0}{T} p \delta V,$$

cui corrisponde esattamente la terza delle soluzioni (6,6). Le soluzioni « parassite » (6,6) vengono escluse con l'imposizione delle tre condizioni (6,3).

Trasformiamo immediatamente in forma generale il primo membro dell'equazione cinetica, in modo da includere sia il problema della conducibilità termica, sia quello della viscosità. In altre parole, supponiamo l'esistenza dei gradienti di tutte le caratteristiche macroscopiche del gas, compresa la velocità macroscopica V .

La funzione di distribuzione d'equilibrio in un gas immobile ($V = 0$) è la distribuzione di Boltzmann che scriviamo nella forma

$$f_0 = \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T} \right), \quad (6,7)$$

dove μ è il potenziale chimico del gas. La distribuzione in un gas in moto differisce dalla (6,7) (come è stato già notato al § 5) per la sola trasformazione galileiana della velocità. Per scrivere questa funzione in forma esplicita, separiamo dall'energia totale $\varepsilon(\Gamma)$ della molecola quella cinetica del suo moto traslatorio:

$$\varepsilon(\Gamma) = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon_{\text{int}}; \quad (6,8)$$

l'energia interna ε_{int} include in sé l'energia di rotazione e l'energia di oscillazione della molecola. Sostituendo v con $v - V$, otteniamo la distribuzione di Boltzmann nel gas in moto

$$f_0 = \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_{\text{int}}}{T} \right) \exp \left(- \frac{m(v - V)^2}{2T} \right). \quad (6,9)$$

In un gas debolmente non omogeneo f_0 dipende dalle coordinate e dal tempo, e questa dipendenza si origina dal variare delle caratteristiche macroscopiche all'interno del gas (e con il tempo): la velocità V , la temperatura T e la pressione P (e con esse anche il potenziale chimico μ). Poiché i gradienti di queste grandezze sono supposti piccoli, a primo membro dell'equazione cinetica è sufficiente sostituire (nell'approssimazione considerata) f con f_0 .

I calcoli si possono semplificare alquanto, tenendo conto dell'indipendenza evidente dei coefficienti cinetici, che ci interessano in ultima analisi, dalla velocità V . Pertanto è sufficiente considerare un solo punto nel gas e scegliere quello in cui la velocità V (ma, ovviamente, non le sue derivate) è nulla.

Derivando l'espressione (6,9) rispetto al tempo e ponendo $V = 0$, otteniamo

$$\frac{T}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P - \frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T \frac{\partial P}{\partial t} + m v \frac{\partial V}{\partial t}.$$

In accordo con le note formule termodinamiche abbiamo

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P = -s, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{N}, \quad \mu = w - Ts,$$

dove w , s e $1/N$ sono la funzione termica, l'entropia e il volume riferiti a una sola particella di gas. Perciò

$$\frac{T}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial t} + m \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (6,10)$$

Analogamente troviamo

$$\frac{T}{f_0} \mathbf{v} \nabla f_0 = \frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T} \mathbf{v} \nabla T + \frac{1}{N} \mathbf{v} \nabla P + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}, \quad (6,11)$$

dove per brevità abbiamo introdotto la notazione

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad V_{\alpha\alpha} = \text{div } \mathbf{V}; \quad (6,12)$$

nell'ultimo termine della (6,11) abbiamo eseguito la sostituzione

$$v_\alpha v_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}.$$

Il primo membro dell'equazione cinetica si ottiene sommando le espressioni (6,10-11). In questo caso tutte le derivate rispetto al tempo delle grandezze macroscopiche si possono esprimere con i loro gradienti spaziali, in base alle equazioni idrodinamiche di un mezzo perfetto (cioè non viscoso e non termoconduttore); se qui tenessimo conto dei termini dissipativi, ciò implicherebbe la comparsa di grandezze di ordine infinitesimo superiore. Nel punto in cui $\mathbf{V} = 0$ l'equazione di Eulero dà

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P = -\frac{1}{Nm} \nabla P. \quad (6,13)$$

Nello stesso punto dall'equazione di continuità abbiamo $\partial N / \partial t = -N \text{div } \mathbf{V}$, ossia

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{V} \quad (6,14)$$

(qui è stata adoperata l'equazione di stato di un gas perfetto $N = P/T$). Infine, l'equazione di conservazione dell'entropia, $\partial s / \partial t + \mathbf{V} \nabla s = 0$, dà $\partial s / \partial t = 0$, ossia

$$\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad (6,15)$$

dove abbiamo sfruttato le formule termodinamiche

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{P}$$

(c_p è il calore specifico riferito anch'esso a una sola molecola); la seconda di queste formule si riferisce al gas perfetto. Dalle ugua-

glianze (6,14-15) ricaviamo

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c_p}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (6,16)$$

(si è tenuto conto che per il gas perfetto $c_p - c_v = 1$).

Ora dopo un calcolo semplice otteniamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_0 = \\ = \frac{f_0}{T} \left\{ \frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T} \mathbf{v} \nabla T + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - T c_p - \varepsilon(\Gamma)}{c_v} \operatorname{div} \mathbf{V} \right\}. \end{aligned} \quad (6,17)$$

Sottolineiamo che finora non abbiamo avanzato nessuna ipotesi specifica sul carattere della dipendenza delle grandezze termodinamiche dalla temperatura; abbiamo utilizzato la sola equazione generale di stato del gas perfetto. Per un gas con rotazione classica delle molecole e oscillazioni non eccitate il calore specifico non dipende dalla temperatura e la funzione termica è ¹⁾

$$w = c_p T. \quad (6,18)$$

Allora l'ultimo termine nella (6,17) si semplifica; eguagliando le (6,17) e (6,4), scriviamo infine l'equazione cinetica nella forma

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \nabla T + \left[m v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta} \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} \right] V_{\alpha\beta} = I(\chi). \quad (6,19)$$

Nei due paragrafi successivi questa equazione verrà studiata in modo più dettagliato nell'applicazione ai problemi della conduzione termica e della viscosità.

Ricordiamo che già dalla legge della crescita dell'entropia deriva che il gradiente della pressione (in assenza dei gradienti della temperatura e della velocità) non implica la comparsa di processi dissipativi (cfr. VI, § 49). Nell'equazione cinetica questa condizione viene soddisfatta automaticamente e si manifesta con la scomparsa del gradiente della pressione dal primo membro della (6,19).

§ 7. Conducibilità termica dei gas

Per calcolare il coefficiente di conducibilità termica dei gas occorre risolvere l'equazione cinetica con il gradiente della temperatura. Conservando nella (6,19) il solo primo termine a primo membro, abbiamo

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \nabla T = I(\chi). \quad (7,1)$$

¹⁾ È supposto che l'energia $\varepsilon(\Gamma)$ della molecola sia calcolata a partire dal suo minimo; in accordo con ciò è omessa la costante additiva in w indipendente dalla temperatura.

Si deve cercare la soluzione di questa equazione nella forma

$$\chi = g \nabla T, \quad (7,2)$$

dove il vettore g è una funzione delle sole grandezze Γ . Infatti, sostituendola nella (7,1) otteniamo il fattore ∇T in ambedue i membri dell'uguaglianza. Poiché l'equazione deve essere verificata per valori arbitrari del vettore ∇T , i coefficienti in ∇T devono essere uguali in ambedue i membri dell'uguaglianza in modo che otteniamo per g l'equazione

$$v \frac{e(\Gamma) - c_p T}{T} = I(g), \quad (7,3)$$

non contenente più ∇T (e, quindi, una dipendenza esplicita dalle coordinate).

La funzione χ deve soddisfare anche le condizioni (6,3). Le prime due di queste condizioni sono verificate automaticamente con la funzione χ nella forma (7,2); ciò è evidente già dal fatto che l'equazione (7,3) non contiene parametri vettoriali lungo i quali potrebbero essere diretti vettori costanti, ossia gli integrali $\int f_0 g d\Gamma$ e $\int f_0 \varepsilon g d\Gamma$. Quanto alla terza delle condizioni (6,3), essa impone alla soluzione dell'equazione (7,3) la condizione complementare

$$\int f_0 v g d\Gamma = 0. \quad (7,4)$$

Se l'equazione cinetica è risolta e se la funzione χ è nota, si può determinare il coefficiente di conducibilità termica calcolando il flusso d'energia, e precisamente la sua parte dissipativa non legata semplicemente al trasporto di energia per convezione (indicheremo con q' questa parte del flusso d'energia). Se nel gas non esiste moto macroscopico, q' coincide con il flusso totale d'energia q espresso dall'integrale (5,9). Per $f = f_0$ questo integrale scompare identicamente con l'integrazione lungo le direzioni v . Perciò sostituendo f la (6,1) resta

$$q = \frac{1}{T} \int v f_0 \chi \varepsilon d\Gamma = \frac{1}{T} \int f_0 \varepsilon v (g \nabla T) d\Gamma,$$

o, in componenti,

$$q_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \int f_0 \varepsilon v_\alpha g_\beta d\Gamma. \quad (7,5)$$

In virtù dell'isotropia del gas in equilibrio non esistono in esso direzioni fisse e il tensore $\kappa_{\alpha\beta}$ può essere espresso unicamente in funzione del tensore unità $\delta_{\alpha\beta}$, cioè si riduce allo scalare

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta}, \quad \kappa = \kappa_\alpha / 3.$$

Quindi, il flusso d'energia è

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (7,6)$$

dove il coefficiente scalare di conducibilità termica vale

$$\kappa = -\frac{1}{3T} \int f_0 \varepsilon \mathbf{v} g d\Gamma. \quad (7,7)$$

La positività di questa grandezza (il flusso \mathbf{q} deve essere diretto in direzione opposta al gradiente della temperatura) è garantita automaticamente dall'equazione cinetica (si veda il § 9).

Nei gas monoatomici la velocità \mathbf{v} è l'unico vettore dal quale dipende la funzione g ; è chiaro quindi che questa funzione deve avere la forma

$$g = \frac{\mathbf{v}}{v} g(v). \quad (7,8)$$

Nei gas poliatomici la funzione g dipende già da due vettori: dalla velocità \mathbf{v} e dal momento \mathbf{M} . Se la simmetria delle molecole non consente l'esistenza di stereoisomeria, allora l'integrale degli urti e, con esso, l'equazione (7,3) sono invarianti rispetto all'inversione; della stessa invarianza deve godere anche la soluzione χ . In altre parole, $\chi = g \nabla T$ deve essere uno scalare proprio, e poiché il gradiente ∇T è un vettore proprio, la funzione g deve essere anch'essa tale. Così, per un gas biatomico in cui con i vettori \mathbf{v} e \mathbf{M} si esauriscono le grandezze Γ , la funzione $g(\Gamma)$ ha la forma

$$g = v g_1 + \mathbf{M} (\mathbf{v} \mathbf{M}) g_2 + [\mathbf{v} \mathbf{M}] g_3, \quad (7,9)$$

dove g_1, g_2, g_3 sono funzioni scalari degli argomenti scalari $v^2, \mathbf{M}^2, (\mathbf{v} \mathbf{M})^2$; questa è la forma più generale di un vettore proprio che può essere costruito mediante il vettore proprio \mathbf{v} e lo pseudovettore \mathbf{M} ¹⁾.

Se, invece, la sostanza è stereoisomera, non esiste invarianza rispetto all'inversione: come è stato già detto al § 2, l'inversione in questo caso « trasforma » di fatto il gas in un'altra sostanza. Rispettivamente la funzione χ potrà contenere anche termini pseudoscalari, vale a dire che la funzione g contiene termini pseudovettoriali (un termine della forma $g_4 \mathbf{M}$, ad esempio).

La condizione di applicabilità del metodo esposto di soluzione dell'equazione cinetica (basato sull'ipotesi che f sia vicina a f_0) si può stabilire stimando l'integrale degli urti in base alla formula (3,12). L'energia media della molecola è $\bar{\varepsilon} \sim T$, perciò la stima di entrambi i membri dell'equazione (7,3) dà $\bar{v} \sim g/\tau \sim g\bar{v}/l$, da cui $g \sim l$. La condizione $\chi/T \sim g |\nabla T|/T \ll 1$ (equivalente alla condizione $\delta f \ll f_0$) significa, quindi, che le distanze L , sulle quali la

¹⁾ Le soluzioni dell'equazione di Boltzmann per gas con molecole rotanti sono state studiate originariamente da Ju.M. Kagan e A.M. Afanasjev (1961).

temperatura varia notevolmente ($|\nabla T| \sim T/L$), devono essere grandi rispetto a l . In altre parole, la funzione della forma (6,1) rappresenta i primi termini dello sviluppo dell'equazione cinetica in potenze del piccolo rapporto l/L .

La stima dell'integrale (7,7) con $g \sim l$ conduce alla formula

$$\kappa \sim cN\bar{l}\bar{v}, \quad (7,10)$$

dove c è il calore specifico di una molecola di gas. Questa è la nota formula elementare di cinetica dei gas (si veda la nota a pag. 57). Ponendovi $l \sim 1/N\sigma$, $c \sim 1$ e $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$, abbiamo

$$\kappa \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{T}{m}}. \quad (7,11)$$

In questa stima la sezione σ si riferisce alla velocità termica media delle molecole, e in tal senso bisogna intendere questa grandezza come funzione della temperatura. All'aumentare della velocità la sezione, in generale, decresce e, rispettivamente, σ sarà una funzione decrescente della temperatura. A temperature non troppo basse le molecole del gas si comportano qualitativamente come particelle solide elastiche interagenti mutuamente soltanto per urti diretti. A questo carattere dell'interazione corrisponde una sezione d'urto dipendente debolmente dalla velocità (e pertanto anche dalla temperatura). In queste condizioni la dipendenza di κ dalla temperatura è quasi proporzionale a \sqrt{T} .

Per una data temperatura il coefficiente di conducibilità termica, come si vede dalla (7,11), è indipendente dalla densità del gas o, che è lo stesso, dalla sua pressione. Sottolineiamo che questa proprietà importante non è legata alle ipotesi fatte nella stima ed è precisa nei limiti dell'equazione cinetica di Boltzmann. Essa deriva dal fatto che questa equazione tiene conto dei soli urti fra coppie di molecole (ragione per cui la lunghezza del cammino risulta essere inversamente proporzionale alla densità del gas).

§ 8. Viscosità dei gas

Il calcolo della viscosità dei gas mediante l'equazione cinetica è analogo al calcolo della conducibilità termica. La differenza è che la deviazione dall'equilibrio è dovuta non al gradiente della temperatura, bensì alla disomogeneità del flusso di gas rispetto alla velocità del moto macroscopico V . In questo caso è supposto di nuovo che le dimensioni caratteristiche del problema siano $L \gg l$.

Come è noto, esistono due tipi di viscosità, i cui coefficienti si suole indicare con η e ζ . Essi sono definiti come coefficienti nel tensore degli sforzi viscosi $\sigma'_{\alpha\beta}$, che figura come componente nel

tensore della densità di flusso della quantità di moto

$$\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}, \quad (8,1)$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (8,2)$$

dove $V_{\alpha\beta}$ è definito secondo la (6,12) (si veda VI, § 15). In un liquido incompressibile appare la sola viscosità η . Quanto alla « seconda » viscosità ζ , essa appare nei moti in cui $\operatorname{div} \mathbf{V} \neq 0$. È opportuno calcolare separatamente i due coefficienti.

Omettendo nell'equazione cinetica generale (6,19) il termine con il gradiente della temperatura, riscriviamola nella forma

$$mv_\alpha v_\beta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} \right) \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi), \quad (8,3)$$

dove a primo membro sono separati i termini che generano la prima e la seconda viscosità. Per il calcolo della prima viscosità bisogna ritenere che $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Riscriviamo come segue l'equazione così ottenuta:

$$m \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} v^2 \right) V_{\alpha\beta} = I(\chi), \quad (8,4)$$

dove ambedue i fattori tensoriali a primo membro hanno traccia nulla.

Cerchiamo la soluzione di questa equazione nella forma

$$\chi = g_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}, \quad (8,5)$$

dove $g_{\alpha\beta}(\Gamma)$ è un tensore simmetrico; poiché la traccia $V_{\alpha\alpha} = 0$, allora, aggiungendo a $g_{\alpha\beta}$ un termine $\propto \delta_{\alpha\beta}$, si può sempre ottenere anche $g_{\alpha\alpha} = 0$ senza cambiare la funzione χ . Per $g_{\alpha\beta}$ abbiamo l'equazione

$$m \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} v^2 \right) = I(g_{\alpha\beta}). \quad (8,6)$$

Le condizioni aggiunte (6,3) sono verificate automaticamente.

Il flusso della quantità di moto si calcola mediante la funzione di distribuzione come l'integrale (5,8). La parte di questo tensore che ci interessa, ossia il tensore degli sforzi viscosi, è data dall'integrale

$$\sigma'_{\alpha\beta} = -\frac{m}{T} \int v_\alpha v_\beta f_0 \chi d\Gamma = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}, \quad (8,7)$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{m}{T} \int f_0 v_\alpha v_\beta g_{\gamma\delta} d\Gamma. \quad (8,8)$$

Le grandezze $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ costituiscono un tensore di quarto rango, simmetrico rispetto alle coppie di indici α, β e γ, δ che si annulla per riduzione rispetto alla coppia γ, δ . Per l'isotropia del gas questo

tensore può essere espresso soltanto in funzione del tensore unità $\delta_{\alpha\beta}$. L'espressione soddisfacente tali condizioni è

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta \left[\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right].$$

Allora $\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta V_{\alpha\beta}$, cosicchè η è il coefficiente di viscosità cercato. Esso è definito mediante la riduzione del tensore rispetto alle coppie di indici α , γ e β , δ

$$\eta = -\frac{m}{10T} \int v_{\alpha} v_{\beta} g_{\alpha\beta} f_0 d\Gamma. \quad (8,9)$$

In un gas monoatomico $g_{\alpha\beta}$ è funzione del solo vettore \mathbf{v} . La forma generale di questo tensore simmetrico con traccia nulla è

$$g_{\alpha\beta} = \left(v_{\alpha} v_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} v^2 \right) g(v) \quad (8,10)$$

con una sola funzione scalare $g(v)$. Nei gas poliatomici il tensore $g_{\alpha\beta}$ è composto di un numero più grande di variabili, compresi i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{M} . In assenza di stereoisomeria il tensore $g_{\alpha\beta}$ può contenere unicamente termini propriamente tensoriali; nel gas di una sostanza stereoisomera sono possibili anche termini pseudotensoriali.

La stima del coefficiente di viscosità, analoga a quella (7,10) per il coefficiente di conducibilità termica, conduce alla nota formula elementare della cinetica dei gas

$$\eta \sim m \bar{v} N l \quad (8,11)$$

(si veda la nota a pag. 57). La conducibilità termica e la viscosità cinematica risultano essere grandezze dello stesso ordine:

$$\kappa / N c_p \sim \eta / N m \sim \bar{v} l. \quad (8,12)$$

Ponendo nella (8,11) $l \sim 1/N\sigma$ e $\bar{v} \sim (T/m)^{1/2}$ otteniamo

$$\eta \sim \sqrt{mT} / \sigma. \quad (8,13)$$

Quanto detto al § 7 circa la dipendenza di κ dalla pressione e dalla temperatura si riferisce ugualmente al coefficiente di viscosità η .

Per il calcolo del secondo coefficiente di viscosità bisogna supporre non nullo il secondo termine a primo membro dell'equazione cinetica (8,3)

$$\left(\frac{mv^2}{3} - \frac{e(\Gamma)}{c_v} \right) \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi). \quad (8,14)$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\chi = g \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (8,15)$$

e per la funzione g troviamo l'equazione

$$\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} = I(g). \quad (8,16)$$

Calcolando il tensore degli sforzi e confrontandolo con l'espressione $\zeta \delta_{\alpha\beta} \text{div } V$, otteniamo il coefficiente di viscosità nella forma

$$\zeta = -\frac{m}{3T} \int v^2 g f_0 d\Gamma. \quad (8,17)$$

Nei gas monoatomici $\varepsilon(\Gamma) = mv^2/2$, $c_v = 3/2$ e il primo membro dell'equazione (8,16) si annulla. Dall'equazione $I(g) = 0$ segue allora che anche $g = 0$ e, quindi $\zeta = 0$. Siamo giunti così all'interessante seguente conclusione: nei gas monoatomici la seconda viscosità è nulla¹).

PROBLEMA

Mostrare che la seconda viscosità di un gas di particelle ultrarelativistiche è nulla (*I. M. Chalatnikov*, 1955).

Soluzione. L'energia ε della particella relativistica nel sistema di riferimento K , in cui il gas si muove con velocità (non relativistica) V , è legata alla sua energia ε' nel sistema di riferimento K' , in cui il gas si trova a riposo, dalla formula $\varepsilon' = \varepsilon - pV$, dove p è la quantità di moto della particella nel sistema K (è la formula di trasformazione di Lorentz in cui sono omessi i termini in V di ordine superiore al primo). La funzione di distribuzione nel sistema K è $f_0(\varepsilon - pV)$, dove $f_0(\varepsilon')$ è la distribuzione di Boltzmann.

Poiché ci interessa la sola viscosità, possiamo fin dall'inizio supporre nulli i gradienti di tutte le grandezze macroscopiche, tranne la sola velocità V ; allora anche $\partial V / \partial t = 0$ in modo che l'ultimo termine nella (6,10) scompaia²). Nella (6,11) i primi due termini sono assenti anch'essi e il terzo termine va sostituito con

$$v \nabla(pV) = v_\alpha p_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = v_\alpha p_\beta V_{\alpha\beta}$$

(le direzioni v e p coincidono, perciò $p_\alpha v_\beta = p_\beta v_\alpha$). Le equazioni di continuità e di conservazione dell'entropia nella forma usata al § 6 restano valide anche per il moto (con piccole velocità V) di un gas relativistico. Quindi restano in vigore anche le formule (6,16). Come risultato l'equazione cinetica assume la

¹) Sottolineiamo che si tratta dei gas proprio nell'approssimazione rispetto al « parametro di gassosità » Nd^3 , cui corrisponde l'equazione di Boltzmann (e nella quale la viscosità η risulta essere indipendente dalla densità). Nelle approssimazioni successive (termini successivi dello « sviluppo viriale », si veda il § 18) compare anche la viscosità non nulla ζ . È essenziale anche la dipendenza quadratica dell'energia della particella dalla sua quantità di moto; nel gas « monoatomico » relativistico la seconda viscosità non è più nulla (tuttavia essa si annulla di nuovo in un altro caso limite, ossia ultrarelativistico; si veda il problema).

²) A scanso di equivoci, ricordiamo che in un gas relativistico il gradiente della pressione dà un suo contributo al flusso di conduzione termica dell'energia (si veda VI, § 126).

forma

$$\left(v_{\alpha\beta} p_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\varepsilon}{c_p} \right) V_{\alpha\beta} = I(\chi).$$

Nel problema della seconda viscosità bisogna porre $V_{\alpha\beta} = 1/3 \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}$, e allora

$$\left(\frac{vp}{3} - \frac{\varepsilon}{c_v} \right) \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi).$$

Nel gas ultrarelativistico $v \approx c$, $\varepsilon = cp$ e il calore specifico $c_p = 3$ (si veda V, § 44, il problema) in modo che il primo membro dell'equazione, e con esso χ , si annullano.

§ 9. Simmetria dei coefficienti cinetici

I coefficienti di conducibilità termica e di viscosità si riferiscono a una categoria di grandezze che determinano processi di rilassamento in sistemi debolmente non in equilibrio. Queste grandezze, ossia i *coefficienti cinetici*, verificano il principio di simmetria (*principio di Onsager*) che può essere stabilito in forma generale a prescindere dai meccanismi di rilassamento concreti. Ma nel calcolo concreto dei coefficienti cinetici mediante le equazioni cinetiche il principio di simmetria non fornisce alcuna condizione supplementare, che dovrebbe essere imposta alla soluzione delle equazioni. Per questo calcolo le condizioni del principio di simmetria si verificano automaticamente. È utile vedere in che modo ciò avviene.

Ricordiamo che nella formulazione generale del principio di Onsager (si veda V, § 120) figura un insieme di grandezze x_a che caratterizzano lo stato di non equilibrio del sistema, e un insieme di grandezze « termodinamicamente coniugate » $X_a = -\partial S / \partial x_a$ (S è l'entropia del sistema). Il processo di rilassamento di un sistema debolmente non in equilibrio è descritto dalle equazioni che definiscono le velocità di variazione delle grandezze x_a sotto forma di funzioni lineari delle grandezze X_a

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b, \quad (9,1)$$

dove γ_{ab} sono i coefficienti cinetici. Secondo il principio di Onsager, se x_a e x_b si comportano allo stesso modo per inversione del tempo, allora

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (9,2)$$

Inoltre la velocità di variazione dell'entropia è data dalla forma quadratica

$$\dot{S} = - \sum_a X_a \dot{x}_a = \sum_{a,b} \gamma_{ab} X_a X_b. \quad (9,3)$$

Spesso è comodo usare la prima di queste espressioni per stabilire la corrispondenza tra le grandezze \dot{x}_a e X_a .

Nel caso della conducibilità termica come « velocità » \dot{x}_a consideriamo le componenti q'_a del vettore del flusso dissipativo di calore (in ogni dato punto del mezzo); l'indice a coincide in questo caso con l'indice vettoriale α . Le grandezze corrispondenti a X_a saranno le derivate $T^{-2} \partial T / \partial x_\alpha$ (si veda IX, § 88). Le uguaglianze $q'_a = -\kappa_{\alpha\beta} \partial T / \partial x_\beta$ svolgono il ruolo delle equazioni (9,1) in modo che le grandezze $T^2 \kappa_{\alpha\beta}$ sono i coefficienti cinetici γ_{ab} . In accordo con il principio di Onsager deve essere $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha}$.

Analogamente, nel caso della viscosità come grandezze \dot{x}_a consideriamo le componenti del tensore del flusso viscoso della quantità di moto $\sigma'_{\alpha\beta}$; in questo caso alle X_a corrispondono $-V_{\alpha\beta}/T$ (all'indice a corrisponde la coppia degli indici tensoriali $\alpha\beta$). Le relazioni $\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}$ svolgono il ruolo delle equazioni (9,1) e le grandezze $T\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sono i coefficienti cinetici. Secondo il principio di Onsager deve essere $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

Nei problemi sulla conducibilità termica e sulla viscosità dei gas, considerati ai paragrafi precedenti, la suddetta simmetria dei tensori $\kappa_{\alpha\beta}$ e $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è comparsa automaticamente come conseguenza dell'isotropia del mezzo, a prescindere dalla soluzione dell'equazione cinetica. Mostriamo, tuttavia, che questa simmetria comparirebbe anche in seguito alla soluzione dell'equazione cinetica a prescindere dall'isotropia del mezzo.

Lo schema di soluzione dei problemi sulla conducibilità termica e la viscosità in un gas debolmente disomogeneo era il seguente: la correzione alla funzione di distribuzione di equilibrio si cerca nella forma

$$\chi = \sum_a g_a(\Gamma) X_a \quad (9,4)$$

e per le funzioni g_a si ottengono equazioni della forma

$$L_a = I(g_a). \quad (9,5)$$

Le grandezze L_a sono le componenti del vettore

$$T [\varepsilon(\Gamma) - c_p T] v_\alpha$$

nel caso della conducibilità termica, o del tensore

$$-T \left[m v_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

nel caso della viscosità (si veda la (6,19)). Le soluzioni dell'equazione (9,5) devono soddisfare le condizioni complementari

$$\int f_0 g_a d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a \varepsilon d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a p d\Gamma = 0.$$

Tenendo conto di queste condizioni, i coefficienti cinetici γ_{ab} si possono scrivere in forma di integrali:

$$T^2 \gamma_{ab} = - \int f_0 L_a g_b d\Gamma. \quad (9,6)$$

La dimostrazione della simmetria $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$ si riduce quindi alla dimostrazione dell'uguaglianza degli integrali

$$\int f_0 L_a g_b d\Gamma = \int f_0 L_b g_a d\Gamma. \quad (9,7)$$

Essa è basata sulla proprietà di « autoconiugazione » dell'operatore linearizzato I , cui si può arrivare nel seguente modo.

Consideriamo l'integrale

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 f_{01} w' \varphi (\psi' + \psi'_1 - \psi - \psi_1) d^4\Gamma,$$

dove $\psi(\Gamma)$, $\varphi(\Gamma)$ sono due funzioni qualsiasi della variabile Γ . Poiché si integra rispetto a tutte le variabili Γ , Γ_1 , Γ' , Γ'_1 , si può, senza cambiare l'integrale, operare un qualunque cambio di notazione (come abbiamo già fatto al § 4). Eseguiamo la trasformazione $\Gamma, \Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma'_1$ e, in seguito, in ciascuna delle due forme integrali così ottenute il cambio di notazione $\Gamma, \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma', \Gamma'_1$. Calcolando la somma di tutte e quattro le espressioni abbiamo

$$\begin{aligned} \int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w'(\varphi + \varphi_1) - w(\varphi' + \varphi'_1)] \times \\ \times [(\psi' + \psi'_1) - (\psi + \psi_1)] d^4\Gamma \end{aligned} \quad (9,8)$$

(le notazioni w e w' sono prese dalla formula (3,5)). Consideriamo ora lo stesso integrale in cui le funzioni $\psi(\Gamma)$ e $\varphi(\Gamma)$ sono sostituite rispettivamente con $\varphi(\Gamma^T)$ e $\psi(\Gamma^T)$ (senza cambiare le variabili in w e w'). Operando il cambio di notazione $\Gamma^T, \Gamma_1^T, \dots \rightarrow \Gamma, \Gamma_1, \dots$ e usando il principio dell'equilibrio dettagliato (2,3), otteniamo

$$\begin{aligned} \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma = \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w(\psi + \psi_1) - w'(\psi' + \psi'_1)] \times \\ \times [(\varphi' + \varphi'_1) + (\varphi + \varphi_1)] d^4\Gamma \end{aligned} \quad (9,9)$$

(si è tenuto conto che $f_0(\Gamma^T) = f_0(\Gamma)$). Sviluppando nelle (9,8) e (9,9) le parentesi quadre e confrontandole termine a termine vediamo che ambedue gli integrali sono uguali. Nel confronto si deve tener conto della relazione di unitarietà (2,9) in virtù della quale abbiamo, ad esempio,

$$\int f_0 f_{01} w(\psi + \psi_1) (\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma = \int f_0 f_{01} w'(\psi' + \psi'_1) (\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma$$

(la relazione (2,9) è applicabile qui all'integrazione rispetto alle variabili Γ' e Γ'_1 , dalle quali nell'espressione integranda dipendono soltanto w e w').

Otteniamo così l'uguaglianza

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma. \quad (9,10)$$

È da notare che se il principio dell'equilibrio dettagliato è valido nella sua forma più semplice (2,8), $w = w'$, allora la relazione (9,10) si riduce all'autoconiugazione letterale dell'operatore I , cioè

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi I(\varphi) d\Gamma, \quad (9,11)$$

dove in ambedue gli integrali figurano le funzioni φ e ψ delle stesse variabili Γ (ciò è evidente immediatamente, per $w = w'$, dall'espressione (9,8)).

Tornando ai coefficienti cinetici, facciamo il cambio di notazione $\Gamma \rightarrow \Gamma^T$ nel primo integrale della (9,7) e teniamo conto che

$$L_a(\Gamma^T) = \pm L_a(\Gamma) \quad (9,12)$$

(il segno superiore si riferisce al caso della viscosità, quello inferiore alla conducibilità termica). Usiamo ora le relazioni (9,5) e (9,10). In questo caso nella (9,10) si può integrare rispetto a Γ^T , anziché rispetto a Γ ; è evidente che il valore dell'integrale in questo caso non cambia. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int f_0 g_b L_a d\Gamma &= \pm \int f_0 g_b^T I(g_a) d\Gamma^T = \pm \int f_0 g_a^T I(g_b) d\Gamma^T = \\ &= \pm \int f_0 g_a^T L_b(\Gamma) d\Gamma^T. \end{aligned}$$

Ora è sufficiente fare il cambio di notazione $\Gamma^T \rightarrow \Gamma$ a secondo membro dell'uguaglianza e, tenendo conto della (9,12), otteniamo il risultato richiesto (9,7).

I coefficienti cinetici devono soddisfare anche le condizioni derivanti dalla legge della crescita dell'entropia; in particolare, devono essere positivi i coefficienti « diagonali » $\gamma_{\alpha\alpha}$. Poiché l'equazione cinetica garantisce la crescita dell'entropia è naturale che, calcolando i coefficienti cinetici mediante questa equazione, queste condizioni siano verificate automaticamente.

L'aumento dell'entropia si esprime mediante la disuguaglianza

$$-\int \ln f \cdot \text{St } f d\Gamma > 0$$

(si veda il § 4). Sostituendovi

$$f = f_0 \left(1 + \frac{\chi}{T}\right), \quad \text{St } f = \frac{f_0}{T} I(\chi),$$

abbiamo

$$-\int \ln f_0 \text{St } f d\Gamma - \frac{1}{T} \int f_0 \ln \left(1 + \frac{\chi}{T}\right) I(\chi) d\Gamma > 0.$$

Il primo integrale si annulla identicamente e nel secondo, dopo aver scritto, poiché χ è piccolo, $\ln(1 + \chi/T) \approx \chi/T$, troviamo

$$-\int f_0 \chi I(\chi) d\Gamma > 0. \quad (9,13)$$

Questa disuguaglianza garantisce ai coefficienti cinetici le proprietà necessarie. In particolare, per $\chi = g_a$ la disuguaglianza esprime la positività di γ_{aa} .

§ 10. Soluzione approssimata dell'equazione cinetica

Poiché la legge di interazione delle molecole (soprattutto di quelle poliatomiche), che definisce la funzione w nell'integrale degli urti, è complicata, è impossibile in sostanza scrivere l'equazione di Boltzmann in forma precisa per gas concreti. Anche con semplici ipotesi circa il carattere dell'interazione molecolare la complessità della struttura matematica dell'equazione cinetica non consente in generale di trovare la soluzione in una forma analitica precisa; ciò riguarda anche l'equazione linearizzata. Stando così le cose, nella teoria cinetica dei gas hanno un'importanza particolare i metodi sufficientemente efficaci di soluzione approssimata dell'equazione di Boltzmann. Diamo qui l'idea di un tale metodo applicato a un gas monoatomico (*S. Chapman, 1916*).

Consideriamo dapprima il problema della conducibilità termica. Per un gas monoatomico il calore specifico è $c_p = 5/2$ e l'equazione linearizzata (7,3) assume la forma

$$-v \left(\frac{5}{2} - \beta v^2 \right) = I(g) \quad (10,1)$$

(dove $\beta = m/2T$); l'operatore integrale lineare $I(g)$ è dato dalla formula

$$I(g) = \iint v_{\text{rel}} f_{01} (g' + g'_1 - g - g_1) d^3 p_1 d\sigma \quad (10,2)$$

(corrispondente all'integrale degli urti (3,9)), e la funzione di distribuzione di equilibrio¹⁾ è

$$f_0(v) = \frac{N\beta^{3/2}}{m^3\pi^{3/2}} e^{-\beta v^2}. \quad (10,3)$$

Un metodo efficace di soluzione approssimata dell'equazione (10,1) è basato sullo sviluppo delle funzioni cercate in un sistema completo di funzioni mutuamente ortogonali; per queste stime è più comodo considerare i cosiddetti polinomi di Sonin (*D. Burnett,*

¹⁾ La funzione di distribuzione è supposta ovunque definita rispetto allo spazio dei momenti lineari. Tuttavia, ciò non impedisce che essa possa essere espressa, per ragioni di comodità, in funzione della velocità $v = p/m$.

1935). Queste funzioni sono definite dalla formula ¹⁾

$$S_r^s(x) = \frac{1}{s!} e^x x^{-r} \frac{d^s}{dx^s} e^{-x} x^{r+s}, \quad (10,4)$$

dove r è arbitrario e s un intero positivo o zero. In particolare,

$$S_r^0 = 1, \quad S_r^1(x) = r + 1 - x. \quad (10,5)$$

La proprietà di ortogonalità di questi polinomi per un indice r dato e per i diversi indici s è

$$\int_0^\infty e^{-x} x^r S_r^s(x) S_r^{s'}(x) dx = \frac{\Gamma(r+s+1)}{s!} \delta_{ss'}. \quad (10,6)$$

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (10,1) nella forma dello sviluppo

$$g(v) = \frac{\beta}{N} v \sum_{s=1}^\infty A_s S_{3/2}^s(\beta v^2). \quad (10,7)$$

Omettendo nello sviluppo il termine con $s = 0$, verifichiamo automaticamente la condizione (7,4) (l'integrale si annulla in virtù dell'ortogonalità dei polinomi con $s = 0$ e $s \neq 0$). L'espressione tra parentesi a primo membro della (10,1) è un polinomio in $S_{3/2}^1(\beta v^2)$ in modo che l'equazione assume la forma

$$-v S_{3/2}^1(\beta v^2) = \frac{\beta}{N} \sum_{s=1}^\infty A_s I(v S_{3/2}^s). \quad (10,8)$$

Moltiplicando i due membri per $v f_0(v) S_{3/2}^l(\beta v^2)$ e integrando in d^3p , otteniamo il sistema di equazioni algebriche

$$\sum_{s=1}^\infty a_{ls} A_s = \frac{15}{4} \delta_{l1}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (10,9)$$

con

$$a_{ls} = -\frac{\beta^2}{N^2} \int f_0 v S_{3/2}^l I(v S_{3/2}^s) d^3p = \frac{\beta^2}{4N^2} \{v S_{3/2}^l, v S_{3/2}^s\}, \quad (10,10)$$

dove si sono introdotte le notazioni

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int f_0(v) f_0(v_1) |v - v_1| \Delta(F) \Delta(G) d^3p d^3p_1 d\sigma, \\ \Delta(F) &= F(v') + F(v'_1) - F(v) - F(v_1). \end{aligned} \quad (10,11)$$

¹⁾ Essi differiscono soltanto per normalizzazione e indici dai polinomi generalizzati di Laguerre

$$S_r^s(x) = \frac{(-1)^r}{(r+s)!} L_{r+s}^r(x).$$

L'equazione (10,9) con $l = 0$ non figura qui poiché $a_{0s} = 0$ in virtù della conservazione della quantità di moto: $\Delta(vS_{3/2}^0) = \Delta(v) = 0$. Il coefficiente di conducibilità termica si calcola sostituendo la (10,7) nell'integrale (7,7). Secondo la condizione (7,4) si può rappresentare questo integrale (con $\varepsilon = mv^2/2$) nella forma

$$\kappa = -\frac{1}{3} \int f_0 S_{3/2}^1 (\beta v^2) v g d^3 p$$

e come risultato otteniamo

$$\kappa = \frac{5}{4} A_1. \quad (10,12)$$

Il vantaggio dello sviluppo in polinomi di Sonin consiste nella semplicità del secondo membro delle equazioni (10,9) e dell'espressione (10,12).

L'esecuzione dei calcoli per il problema della viscosità è completamente analoga. Cerchiamo la soluzione dell'equazione (8,6) nella forma

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{\beta^2}{N^2} \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \sum_{s=0}^{\infty} B_s S_{5/2}^s (\beta v^2). \quad (10,13)$$

La sostituzione nella (8,6) con la successiva moltiplicazione di questa equazione per

$$f_0(v) S_{5/2}^l (\beta v^2) \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta_{\alpha\beta} \right)$$

e l'integrazione in $d^3 p$ conducono al sistema di equazioni

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{ls} B_s = 5\delta_{l0}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (10,14)$$

dove

$$b_{ls} = \frac{\beta^3}{N^2} \left\{ \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) S_{5/2}^l, \quad \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) S_{5/2}^s \right\}. \quad (10,15)$$

Dalla (8,9) ricaviamo il coefficiente di viscosità

$$\eta = \frac{1}{4} m B_0. \quad (10,16)$$

La soluzione approssimata del sistema infinito di equazioni (10,9) o (10,14) si ottiene conservando negli sviluppi (10,7) o (10,13) soltanto i primi termini, cioè mediante un'interruzione artificiale del sistema. La convergenza del processo di approssimazione all'aumentare del numero di termini è estremamente rapida: già la conservazione di un solo termine conduce, in generale, alla precisione dell'1-2% nel valore di κ o di η ¹⁾.

¹⁾ La convergenza, tuttavia, risulta essere un po' peggiore nei problemi di diffusione e soprattutto di termodiffusione.

Mostriamo che la soluzione approssimata dell'equazione cinetica linearizzata per i gas monoatomici, realizzabile con il metodo descritto, conduce a valori dei coefficienti cinetici a priori inferiori a quelli che darebbe la soluzione precisa di questa equazione.

Scriviamo l'equazione cinetica nella forma simbolica seguente:

$$I(g) = L \quad (10,17)$$

(le funzioni g e L sono vettori per il problema della conducibilità termica e tensori del secondo rango nel problema della viscosità). Rispetto alla funzione g il coefficiente cinetico corrispondente è definibile come una grandezza proporzionale all'integrale

$$- \int f_0 g I(g) d^3 p \quad (10,18)$$

(si veda il § 9). Quanto alla funzione approssimata g , essa verifica non l'equazione stessa (10,17), ma soltanto la relazione integrale

$$\int f_0 g I(g) d^3 p = \int f_0 L g d^3 p \quad (10,19)$$

(come ciò è evidente dal modo di definizione dei coefficienti negli sviluppi di g).

L'affermazione espressa sopra deriva immediatamente dal « principio variazionale », secondo cui la soluzione dell'equazione (10,17) realizza il massimo del funzionale (10,18) nella classe di funzioni che soddisfano la condizione (10,19). La validità di questo principio si manifesta facilmente se consideriamo l'integrale

$$- \int f_0 (g - \varphi) I(g - \varphi) d^3 p,$$

dove g è la soluzione dell'equazione (10,17) e φ una funzione di prova qualsiasi, soddisfacente la sola condizione (10,19). In accordo con la proprietà generale (9,13) dell'operatore I questo integrale è positivo. Sviluppando le parentesi, scriviamo

$$- \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - \varphi I(g) - g I(\varphi)\} d^3 p.$$

Poiché per un gas monoatomico il principio dell'equilibrio dettagliato è valido nella forma (2,8), l'operatore I gode della proprietà di autoconiugazione (9,11)¹⁾. Perciò gli integrali provenienti dai due ultimi termini tra parentesi graffe sono uguali. Sostituendovi poi $I(g) = L$ abbiamo

$$\begin{aligned} & - \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2\varphi I(g)\} d^3 p = \\ & = - \int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2L\varphi\} d^3 p > 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Sottolineiamo che il principio variazionale così formulato è dovuto a questa proprietà e non sussiste se il principio dell'equilibrio dettagliato si verifica soltanto nella sua forma più generale (2,3).

Infine, trasformando l'integrale dell'ultimo termine mediante la condizione (10,19) troviamo

$$- \int f_0 g I(g) d^3 p > - \int f_0 \varphi I(\varphi) d^3 p,$$

come dovevasi dimostrare.

Ricordiamo un caso che presenta interesse dal punto di vista formale, anche se non ha significato fisico diretto. Si tratta di un gas di particelle interagenti secondo la legge $U = \alpha/r^4$ ¹⁾. Questo caso è caratterizzato dal fatto che la sezione d'urto di queste particelle (definita secondo la meccanica classica) è inversamente proporzionale alla loro velocità relativa v_{rel} , e perciò il prodotto $v_{rel} d\sigma$ che figura nell'integrale degli urti risulta essere dipendente dal solo angolo di diffusione θ e non dalla velocità v_{rel} . Questa proprietà deriva già da considerazioni dimensionali. Infatti, la sezione dipende in tutto da tre parametri: dalla costante α , dalla massa delle particelle m e dalla velocità v_{rel} . Da queste grandezze non si può formare una combinazione adimensionale e vi è una sola combinazione con le dimensioni di un'area: $v_{rel}^{-1}(\alpha/m)^{1/2}$, cui deve essere proporzionale la sezione. Questa proprietà della sezione conduce a una semplificazione notevole della struttura dell'integrale degli urti, per cui è possibile trovare soluzioni esatte per le equazioni cinetiche linearizzate dei problemi della conducibilità termica e della viscosità. Risulta che queste soluzioni sono date semplicemente dai primi termini degli sviluppi (10,7) e (10,13)²⁾.

PROBLEMI³⁾

1. Trovare la conducibilità termica di un gas monoatomico conservando nello sviluppo (10,7) il solo primo termine.

Soluzione. Per un solo termine dello sviluppo le equazioni (10,9) si riducono all'uguaglianza $A_1 = 15/4a_{11}$. Per il calcolo dell'integrale (10,10) con $l = s = 1$ introduciamo al posto di \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}' , \mathbf{v}'_1 la velocità del centro d'inerzia e le velocità relative di due atomi

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1), \quad \mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}'_{rel} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1,$$

$$v^2 + v_1^2 = 2V^2 + \frac{1}{2}v_{rel}^2, \quad d^3 p d^3 p_1 = m^6 d^3 V d^3 v_{rel}.$$

Il semplice calcolo dà

$$\Delta(\mathbf{v} S_{3/2}^1) = \Delta(\beta v^2 \mathbf{v}) = \beta [(\mathbf{V} \mathbf{v}'_{rel}) \mathbf{v}'_{rel} - (\mathbf{V} \mathbf{v}_{rel}) \mathbf{v}_{rel}].$$

¹⁾ Il primo a studiare le proprietà cinetiche di questo modello di gas è stato Maxwell (1866).

²⁾ Per una descrizione particolareggiata della teoria di questo caso si vedano i §§ 38-40 (articolo di L. Valdman) in « Termodinamica dei gas », Mosca, 1970. (traduzione dal Handbuch der Physik, Bd. XII, 1958).

³⁾ Le formule (1)-(6) sono state dedotte da Chapman e Enskog.

Elevando al quadrato questa espressione e calcolandone la media lungo le direzioni V , otteniamo

$$\frac{2\beta^2}{3} [v_{\text{rel}}^4 - (v_{\text{rel}} v'_{\text{rel}})^2] V^2 = \frac{2\beta^2}{3} v_{\text{rel}}^4 V^2 \sin^2 \theta.$$

Dopo aver integrato rispetto a $4\pi V^2 dV$ e alle direzioni v_{rel} (quest'ultima operazione significa la moltiplicazione per 4π) otteniamo infine

$$a_{11} = \frac{\beta^4}{4} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2} \int_0^\pi \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\beta v_{\text{rel}}^2}{2} \right) v_{\text{rel}}^7 \sin^2 \theta \frac{d\sigma}{d\theta} dv_{\text{rel}} d\theta; \quad (1)$$

il coefficiente di conducibilità termica è

$$\kappa = 75/16 a_{11}. \quad (2)$$

2. Risolvere il problema 1 per la viscosità di un gas monoatomico.

Soluzione. Analogamente abbiamo

$$B_0 = 5/b_{00}, \quad \eta = 5m/4b_{00}.$$

Dall'integrale (10,15) per $l = s = 0$ ricaviamo

$$\Delta \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3} v^2 \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} (v_{\text{rel } \alpha} v_{\text{rel } \beta} - v'_{\text{rel } \alpha} v'_{\text{rel } \beta}).$$

Il quadrato di questa espressione è

$$\frac{1}{2} v_{\text{rel}}^4 \sin^2 \theta.$$

Dopo l'integrazione rispetto a d^3V e alle direzioni v_{rel} risulta che $b_{00} = a_{11}$ in modo che

$$\eta = 4m\kappa/15. \quad (3)$$

Per un gas monoatomico il calore specifico $c_p = 5/2$. Perciò il rapporto tra la viscosità cinematica $\nu = \eta/Nm$ e la conducibilità della temperatura $\chi = \kappa/Nc_p$ (il cosiddetto numero di Prandtl) nell'approssimazione considerata vale

$$\nu/\chi = 2/3 \quad (4)$$

Indipendentemente dalla legge di interazione fra gli atomi¹⁾.

3. Nella stessa approssimazione trovare la conducibilità termica e la viscosità di un gas monoatomico considerando gli atomi come sferette elastiche solide di diametro d .

Soluzione. La sezione di diffusione di una sferetta su una sferetta è equivalente alla diffusione di una particella puntiforme su una sferetta impenetrabile di raggio d ; perciò la sezione è $d\sigma = (d/2)^2 d\omega$. Il calcolo dell'integrale (1) fornisce i seguenti risultati:²⁾

$$\kappa = \frac{75}{64 \sqrt{\pi} d^2} \sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{0,66}{d^2} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (5)$$

$$\eta = \frac{5}{16 \sqrt{\pi} d^2} \sqrt{mT} = 0,18 \frac{\sqrt{mT}}{d^2}. \quad (6)$$

¹⁾ Per il gas, le cui particelle interagiscono secondo la legge $U = \alpha/r^4$, le formule (1)-(4) sono esatte e conducono ai valori seguenti:

$$\kappa = 3,04 T (m\alpha)^{-1/2}, \quad \eta = 0,81 T (m\alpha)^{1/2}.$$

²⁾ Per caratterizzare la rapidità di convergenza delle approssimazioni successive diremo che, tenendo conto del secondo e del terzo termine negli sviluppi (10,7) e (10,13), le espressioni (5) e (6) vanno moltiplicate rispettivamente per $(1 + 0,015 + 0,001)$ e $(1 + 0,023 + 0,002)$.

§ 11. Diffusione di un gas leggero in uno pesante

Studieremo il fenomeno della diffusione in una miscela di due gas per alcuni casi particolari che consentono un'indagine teorica relativamente promettente.

Indichiamo con N_1 e N_2 le densità del numero di particelle delle due componenti della miscela e definiamo la concentrazione come $c = N_1/N$, dove $N = N_1 + N_2$. La densità totale del numero di particelle è legata alla pressione e alla temperatura mediante la relazione $N = P/T$. La pressione del gas è costante nel suo volume; quanto alla concentrazione e alla temperatura, supponiamo che esse varino lungo l'asse x (supponendo una variazione della temperatura, includiamo così nello studio anche la termodiffusione).

Consideriamo la diffusione in una miscela di gas, di cui uno (« pesante ») è composto di molecole di massa superiore alla massa delle particelle dell'altro (« leggero »). Supponiamo monoatomico il gas leggero. Poiché l'energia termica media del moto traslatorio di tutte le particelle (per una temperatura data) è uguale, la velocità media delle molecole pesanti è piccola rispetto alla velocità delle particelle leggere, così da poterle considerare approssimativamente fisse. Nell'urto di una particella leggera con una pesante si può ritenere che quest'ultima rimanga ferma; la velocità della particella leggera, invece, cambia direzione pur restando immutata in valore assoluto.

Consideriamo in questo paragrafo il caso in cui la concentrazione del gas leggero (il gas 1) sia piccola. Allora gli urti tra i suoi atomi sono relativamente rari e si può supporre che le particelle leggere collidano soltanto con le particelle pesanti ¹⁾.

Nel caso generale di una miscela di gas qualsiasi, per la funzione di distribuzione delle particelle di ciascuna componente della miscela, deve essere costruita un'equazione cinetica, a secondo membro della quale figura la somma degli integrali degli urti fra le particelle di questa componente e le particelle delle altre componenti. Tuttavia, nel caso considerato è opportuno dedurre ex-novo un'equazione cinetica semplificata.

L'equazione cercata deve definire la funzione di distribuzione delle particelle del gas leggero; indichiamola con $f(p, x)$. Per le ipotesi fatte gli urti delle particelle leggere con quelle pesanti non cambiano la distribuzione di queste ultime, e nel problema della diffusione si può supporre questa distribuzione come data.

Sia θ l'angolo formato dalla direzione del vettore quantità di moto della particella leggera $p = m_1 v$ e dall'asse x . Per la simmetria delle condizioni del problema è evidente che la funzione di distri-

¹⁾ La teoria cinetica di questo modello di gas è stata sviluppata originariamente da H. A. Lorentz (1905).

buzione dipenderà (oltre che dalle variabili p e x) soltanto dall'angolo θ . Indichiamo con $d\sigma = F(p, \alpha) d\alpha'$ la sezione degli urti, per i quali una particella leggera con quantità di moto p acquista la quantità di moto $p' = mv'$ diretta nell'elemento di angolo solido $d\alpha'$; α è l'angolo tra i vettori p e p' (di valori assoluti uguali). La probabilità che una particella abbia questo urto sull'unità di cammino vale $N_2 d\sigma$, dove N_2 è la densità del numero di particelle pesanti. Quanto alla probabilità riferita all'unità di tempo, essa si ottiene moltiplicando per la velocità della particella: $N_2 v d\sigma$.

Consideriamo le particelle che si trovano in una data unità di volume e con quantità di moto in un dato intervallo di valori assoluti dp , diretta nell'elemento di angolo solido $d\alpha$. Il numero di queste particelle è $f d^3p = f(p, \theta, x) p^2 dp d\alpha$. Di queste particelle un numero pari a

$$f(p, \theta, x) p^2 dp d\alpha \cdot N_2 v F(p, \alpha) d\alpha'$$

acquista nell'unità di tempo, in seguito agli urti, la quantità di moto p' diretta in $d\alpha'$. Sono in totale

$$d^3p \int N_2 v f(p, \theta, x) F(p, \alpha) d\alpha'$$

particelle a cambiare direzione della quantità di moto.

Viceversa, dal numero di particelle in $d^3p' = p'^2 dp' d\alpha'$ acquista una velocità diretta in $d\alpha$ un numero pari a

$$f(p', \theta', x) p'^2 dp' d\alpha' \cdot N_2 v' F(p', \alpha) d\alpha.$$

Poiché $p' = p$, il numero totale di particelle che in seguito agli urti acquista velocità in d^3p vale

$$d^3p \int N_2 v f(p, \theta', x) F(p, \alpha) d\alpha'.$$

In tal modo, il cambiamento del numero di particelle nell'elemento d^3p è uguale alla differenza

$$d^3p \cdot N_2 v \int F(p, \alpha) [f(p, \theta', x) - f(p, \theta, x)] d\alpha'.$$

D'altra parte, questo cambiamento deve essere uguale alla derivata totale rispetto al tempo

$$d^3p \frac{df}{dt} = d^3p \cdot v \nabla f = d^3p \frac{\partial f}{\partial x} v \cos \theta.$$

Uguagliando ambedue le espressioni otteniamo l'equazione cinetica cercata nella forma

$$v \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = N_2 v \int F(p, \alpha) [f(p, \theta', x) - f(p, \theta, x)] d\alpha' \equiv \text{St } f. \quad (11.1)$$

Notiamo che il secondo membro di questa equazione si annulla per ogni funzione f indipendente dalla direzione di \mathbf{p} e non soltanto per la funzione di Maxwell f_0 , come si verifica per l'equazione di Boltzmann. Questa circostanza è dovuta all'ipotesi che il valore assoluto della quantità di moto resti invariato per diffusione delle particelle leggere su quelle pesanti: questi urti lasciano, evidentemente, stazionaria qualunque distribuzione delle energie delle particelle leggere. L'equazione (11,1) corrisponde di fatto soltanto all'approssimazione di ordine zero rispetto alla piccola grandezza m_1/m_2 , e già nell'approssimazione successiva compare il rilassamento rispetto all'energia.

Se i gradienti della concentrazione e della temperatura non sono troppo grandi (le grandezze variano poco a distanze dell'ordine di lunghezza del cammino libero), si può cercare f sotto forma di somma,

$$f = f_0(p, x) + \delta f(p, \theta, x),$$

dove δf è una piccola correzione alla funzione di distribuzione di equilibrio locale f_0 , lineare rispetto ai gradienti c e T . Inoltre, cerchiamo δf nella forma

$$\delta f = \cos \theta \cdot g(p, x), \quad (11,2)$$

dove g è funzione delle sole p e x . Sostituendola nella (11,1), è sufficiente lasciare a primo membro dell'equazione il solo termine con f_0 ; nell'integrale degli urti, invece, il termine con f_0 scompare:

$$\text{St } f = g N_2 v \int F(p, \alpha) (\cos \theta' - \cos \theta) d\alpha;$$

la funzione g , indipendente dagli angoli, è portata fuori dal segno di integrale.

Si può semplificare questo integrale. Prendiamo la direzione della quantità di moto \mathbf{p} come asse polare per il calcolo degli angoli. Siano φ e φ' gli azimut delle direzioni dell'asse x e di \mathbf{p}' rispetto all'asse polare. Allora

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos (\varphi - \varphi').$$

L'elemento di angolo solido è $d\alpha' = \sin \alpha d\alpha d\varphi'$, poiché α è l'angolo polare per la quantità di moto \mathbf{p}' . L'integrale del termine con $\cos (\varphi - \varphi')$ si annulla per integrazione rispetto a $d\varphi'$. Come risultato troviamo che

$$\text{St } f = -N_2 \sigma_t(p) v g \cos \theta = -N_2 \sigma_t(p) v \delta f, \quad (11,3)$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\sigma_t(p) = 2\pi \int F(p, \alpha) (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \int (1 - \cos \alpha) d\sigma; \quad (11,4)$$

la grandezza σ_t si chiama *sezione d'urto di trasporto*.

Ora dall'equazione (11,1) ricaviamo

$$g(p, x) = -\frac{1}{N_2 \sigma_t} \frac{\partial f_0}{\partial x}. \quad (11,5)$$

Il flusso di diffusione i è, per definizione, la densità del flusso di molecole di una componente della miscela (nel caso in esame di quella leggera). Esso si calcola rispetto alla funzione di distribuzione come l'integrale

$$i = \int f v d^3 p, \quad (11,6)$$

oppure, poiché il vettore i è diretto lungo l'asse x ,

$$i = \int \cos \theta \cdot f v d^3 p = \int \cos^2 \theta \cdot g v d^3 p \quad (11,7)$$

(il termine con f_0 si annulla per integrazione rispetto agli angoli). Sostituendovi la (11,5) otteniamo

$$i = -\frac{1}{N_2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f_0 v \cos^2 \theta}{\sigma_t(p)} d^3 p = -\frac{1}{3N_2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f_0 v}{\sigma_t} d^3 p.$$

Questa espressione si può scrivere nella forma

$$i = -\frac{1}{3N_2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ N_1 \left\langle \frac{v}{\sigma_t} \right\rangle \right\},$$

dove la media è calcolata rispetto alla distribuzione di Maxwell. Introduciamo infine la concentrazione $c = N_1/N \approx N_1/N_2$ (ricordiamo che, per ipotesi, $N_2 \gg N_1$) e sostituiamo $N_2 \approx N = P/T$. Tenendo conto che la pressione è costante, otteniamo

$$\begin{aligned} i &= -\frac{T}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c}{T} \left\langle \frac{v}{\sigma_t} \right\rangle \right\} = \\ &= -\frac{1}{3} \left\langle \frac{v}{\sigma_t} \right\rangle \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{cT}{3} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left\langle \frac{v}{\sigma_t} \right\rangle \right] \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11,8)$$

Bisogna confrontare questa formula con l'espressione fenomenologica per il flusso di diffusione

$$i = -ND \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T \right), \quad (11,9)$$

comprendente in sé le definizioni del coefficiente di diffusione D e del rapporto di diffusione termica k_T (si chiama coefficiente di termodiffusione il prodotto $D_T = Dk_T$; si veda VI, § 58)¹⁾. Troviamo così

$$D = \frac{T}{3P} \langle v/\sigma_t \rangle, \quad (11,10)$$

$$k_T = cT \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{\langle v/\sigma_t \rangle}{T}. \quad (11,11)$$

¹⁾ Il fenomeno di termodiffusione è stato predetto da Enskog (1911), proprio per il modello di miscela di gas qui considerato.

Nell'equilibrio di diffusione in un gas riscaldato non uniformemente si stabilisce una distribuzione delle concentrazioni tale che il flusso di diffusione $i = 0$. Supponendo costante l'espressione tra parentesi graffe nella (11,8) abbiamo

$$c = \text{costante} \frac{T}{\langle v/\sigma_t \rangle}. \quad (11,12)$$

Supponendo la sezione σ_t indipendente dalla velocità e osservando che $\langle v \rangle \sim (T/m_1)^{1/2}$, troviamo che nell'equilibrio di diffusione in una miscela con piccola concentrazione del gas leggero quest'ultima è proporzionale a \sqrt{T} ; in altre parole, il gas leggero si concentra nelle zone a temperatura maggiore.

Come ordine di grandezza il coefficiente di diffusione è

$$D \sim \bar{v}l, \quad (11,13)$$

dove \bar{v} è la velocità termica media delle molecole del gas leggero e $l \sim 1/N\sigma$ la lunghezza del cammino libero. Ricordiamo la conclusione elementare di questa formula. Il numero per secondo di molecole del gas 1, che passano da sinistra a destra attraverso un elemento di area unitaria perpendicolare all'asse x , è uguale, come ordine di grandezza, al prodotto $N_1\bar{v}$, dove la densità N_1 deve essere calcolata alla distanza l a sinistra dall'area, cioè nei punti da cui le molecole raggiungono quest'area senza urti. Analogamente si determina il numero di molecole che attraversano la stessa area da destra a sinistra, e la differenza tra i due numeri dà il flusso di diffusione

$$i \sim N_1(x-l)\bar{v} - N_1(x+l)\bar{v} \sim -l\bar{v} \frac{dN_1}{dx},$$

da cui deriva la (11,13) ¹⁾.

§ 12. Diffusione di un gas pesante in uno leggero

Consideriamo ora il caso limite inverso, quando nella miscela la concentrazione del gas pesante è piccola. In questo caso il coefficiente di diffusione si può calcolare in modo indiretto, senza ricorrere all'equazione cinetica. E precisamente, determiniamo la cosiddetta *mobilità* delle particelle del gas pesante supponendo che esso si trovi in un campo esterno. La mobilità b , invece, è legata al coefficiente

¹⁾ La diffusione, la conducibilità termica e la viscosità sono realizzate dallo stesso meccanismo, ossia dal trasporto molecolare diretto. Si può considerare la condizione termica come « diffusione dell'energia » e la viscosità come « diffusione della quantità di moto ». Quindi si può affermare che il coefficiente di diffusione D , la conducibilità della temperatura $\chi = \kappa/Nc_p$ e la viscosità cinematica $\nu = \eta/Nm$ hanno lo stesso ordine di grandezza, donde si deducono le formule (7,10) per la conducibilità termica e (8,11) per la viscosità.

di diffusione delle stesse particelle dalla nota relazione di Einstein

$$D = bT \quad (12,1)$$

(si veda VI, § 59).

La mobilità è, per definizione, il coefficiente di proporzionalità tra la velocità media V acquistata dalla particella di gas nel campo esterno e la forza f agente sulla particella da parte del campo

$$V = bf. \quad (12,2)$$

In questo caso la velocità V è definita dalla condizione di compensazione reciproca della forza f e della forza di attrito f_r , alla quale è sottoposta la particella pesante in moto da parte delle particelle leggere (si possono trascurare gli urti reciproci tra le particelle pesanti in quanto sono relativamente rare). La funzione di distribuzione delle particelle leggere è maxwelliana, cioè

$$f_0 = \frac{N_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp \left(-\frac{m_1 v^2}{2T} \right),$$

dove m_1 è la massa di una particella leggera.

Consideriamo una particella pesante qualsiasi, supponendo che la sua velocità sia V . Passiamo ora al sistema di coordinate in moto assieme a questa particella, indicando con v le velocità delle particelle leggere in questo nuovo sistema. La funzione di distribuzione delle particelle leggere nel sistema di coordinate considerato è $f_0(v + V)$ (si veda la formula (6,9)). Supponendo piccola la velocità V , possiamo scrivere

$$f_0(v + V) \approx f_0(v) \left(1 - \frac{m_1 v V}{T} \right). \quad (12,3)$$

Si può calcolare la forza di attrito cercata f_r , come la quantità di moto totale trasmessa alla particella pesante dalle particelle leggere che urtano con essa nell'unità di tempo. La particella pesante resta ferma in seguito a un urto. Quanto alla particella leggera, essa porta con sé la quantità di moto $m_1 v$; dopo un urto, per il quale il vettore $m_1 v$ ruota di un angolo α , essa porta via una quantità di moto uguale in media a $m_1 v \cos \alpha$. Perciò la quantità di moto trasmessa con questo urto alla particella pesante vale in media $m_1 v (1 - \cos \alpha)$. Moltiplicandola per la densità del flusso di particelle leggere con velocità v , per la sezione $d\sigma$ di un tale urto e integrando, otteniamo la quantità di moto totale trasmessa alla particella pesante:

$$f_r = m_1 \int f_0(v + V) v v \sigma_t d^3 p,$$

dove di nuovo si è introdotta la notazione (11,4). Sostituendovi $f_0(v + V)$ nella forma (12,3), il primo termine si annulla (per inte-

grarione rispetto alle direzioni della velocità \mathbf{v}) in modo che resta

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{T} \int f_0(v) (\mathbf{V}\mathbf{v}) \mathbf{v} v \sigma_t d^3p,$$

o, calcolando la media lungo le direzioni \mathbf{v} ,

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{3T} \mathbf{V} \int f_0(v) \sigma_t v^3 d^3p = -N_1 \frac{m_1^2}{3T} \mathbf{V} \langle \sigma_t v^3 \rangle,$$

dove le parentesi angolari indicano nuovamente la media secondo l'ordinaria distribuzione di Maxwell. Infine, tenendo conto che nel caso considerato $N_1 = N_2$, scriviamo $N_1 \approx N = P/T$ in modo che

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2 P}{3T^2} \langle \sigma_t v^3 \rangle \mathbf{V}.$$

Uguagliando a zero la somma della forza di attrito \mathbf{f}_r e della forza esterna \mathbf{f} , otteniamo in accordo con la (12,2) la mobilità b e in seguito anche il coefficiente di diffusione cercato:

$$D = bT = \frac{3T^3}{m_1^2 P \langle \sigma_t v^3 \rangle}. \quad (12,4)$$

Quanto alla termodiffusione, per il suo calcolo nel caso in esame sarebbe necessario conoscere la funzione di distribuzione delle particelle del gas leggero in presenza di un gradiente della temperatura. Perciò è impossibile calcolare qui il coefficiente di termodiffusione in forma generale.

Come ordine di grandezza $D \sim \bar{v}/N\sigma$, dove $\bar{v} \sim \sqrt{T/m_1}$ è (come anche nella (11,13)) la velocità termica media delle molecole del gas leggero. Quindi, in ambedue i casi l'ordine di grandezza del coefficiente di diffusione è lo stesso, ossia

$$D \sim T^{3/2}/\sigma P m_1^{1/2}. \quad (12,5)$$

PROBLEMA

Determinare il coefficiente di diffusione in una miscela di due gas (leggero e pesante) considerando le particelle come palline elastiche solide di diametri d_1 e d_2 .

Soluzione. La sezione d'urto è $d\sigma = \pi (d_1 + d_2)^2 d\phi/16\pi$, da cui la sezione di trasporto $\sigma_t = \pi (d_1 + d_2)^2/4$ (coincidente in questo caso con la sezione totale σ). Il coefficiente di diffusione ha la forma

$$D = \frac{AT^{3/2}}{(d_1 + d_2)^2 P m_1^{1/2}},$$

dove m_1 è la massa di una particella leggera e A un coefficiente numerico. Per una piccola concentrazione del gas leggero il calcolo con la formula (11,10) dà

$$A = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} = 0,68.$$

Per una piccola concentrazione del gas pesante la (12,4) dà

$$A = 3/2 \sqrt{2\pi} = 0,6.$$

Osserviamo che i valori di A sono vicini per entrambi i casi limite.

§ 13. Fenomeni cinetici in un gas in un campo esterno

I gradi di libertà rotatori delle molecole creano il meccanismo mediante il quale un campo magnetico esterno o un campo elettrico possono incidere sui fenomeni cinetici nel gas¹⁾. Il carattere di questa influenza è lo stesso nel caso magnetico ed elettrico; consideriamo dapprima il gas in un campo magnetico.

Una molecola rotante ha, in generale, un momento angolare il cui valore medio (nel senso quantomeccanico) è indicato con μ . Supponiamo il campo magnetico limitato in modulo, in modo tale che il prodotto μB sia piccolo rispetto alla struttura fine dei livelli molecolari²⁾. Allora si può trascurare l'influenza del campo sullo stato della molecola, cosicché il momento magnetico si calcola in base al suo stato imperturbato. Per temperature non troppo basse (quali stiamo considerando) la grandezza μB sarà piccola anche rispetto a T , il che consente di trascurare l'influenza del campo sulla funzione di distribuzione d'equilibrio delle molecole del gas.

Il momento magnetico è diretto lungo il momento angolare M della molecola; scriviamolo nella forma

$$\mu = \gamma M. \quad (13,1)$$

Alla rotazione classica della molecola corrispondono grandi numeri quantici di rotazione; inoltre, si può trascurare in M la differenza tra il momento totale (comprendente lo spin) e quello angolare. Il valore del coefficiente costante γ dipende dalla specie della molecola e dalla natura del suo momento magnetico. Così, per una molecola biatomica di spin S non nullo abbiamo

$$\gamma \approx \frac{2\sigma}{M} \mu_B, \quad (13,2)$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr e il numero $\sigma = J - K$ la differenza tra i numeri quantici del momento totale J e del momento angolare K (questa differenza assume i valori $S, S - 1, \dots, -S$); al denominatore la differenza tra J e K è inessenziale: $M \approx \hbar J \approx \hbar K$. Nella formula (13,2) si è supposto che l'interazione spin-asse

¹⁾ Questo meccanismo è stato rivelato da Ju.M. Kagan e L.A. Maksimov (1961), ai quali appartengono i risultati esposti in questo paragrafo.

²⁾ Ricordiamo che nell'elettrodinamica macroscopica il valore medio (rispetto a volumi fisicamente infinitesimi) dell'intensità del campo magnetico si chiama induzione magnetica e si denota con B . Per una piccola densità del mezzo (gas) si può trascurare la magnetizzazione e allora il vettore B coincide con il vettore intensità macroscopica H .

nella molecola sia piccola rispetto agli intervalli della struttura rotatoria dei livelli (il caso *b* secondo Hund)¹⁾.

In un campo magnetico **B** la molecola è soggetta a un momento di forze pari a $[\mu\mathbf{B}]$. Sotto il suo influsso il vettore **M** cessa di essere costante durante il moto « libero » della molecola e varia secondo l'equazione

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mu\mathbf{B}] = -\gamma [\mathbf{B}\mathbf{M}], \quad (13,3)$$

vale a dire che il vettore **M** compie una precessione intorno alla direzione del campo con la velocità angolare $-\gamma\mathbf{B}$. Ciò premesso, al primo membro dell'equazione cinetica si deve aggiungere il termine $(\partial f/\partial \mathbf{M}) \dot{\mathbf{M}}$ in modo che l'equazione diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \gamma [\mathbf{B}\mathbf{M}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = \text{St } f. \quad (13,4)$$

Al numero di variabili Γ , dalle quali dipende la funzione di distribuzione, si deve aggiungere anche la variabile discreta σ che definisce il valore del momento magnetico (qualora esista come nella (13,2)).

Nei problemi della conducibilità termica e della viscosità consideriamo di nuovo una distribuzione vicina a quella d'equilibrio, rappresentandola nella forma

$$f = f_0 (1 + \chi/T). \quad (13,5)$$

Mostriamo anzitutto che il termine con la derivata $\partial f_0/\partial \mathbf{M}$ nell'equazione cinetica scompare. Infatti, poiché f_0 dipende unicamente dall'energia della molecola $\varepsilon(\Gamma)$ e la derivata $\partial \varepsilon/\partial \mathbf{M}$ è la velocità angolare Ω , allora

$$\gamma [\mathbf{B}\mathbf{M}] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{M}} = \gamma ([\mathbf{B}\mathbf{M}] \Omega) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (13,6)$$

Per le molecole di tipo rotatore o a trottola sferica le direzioni **M** e Ω coincidono in modo che l'espressione (13,6) si annulla identicamente. In altri casi, invece, essa si annulla dopo il calcolo della media rispetto alle fasi varianti rapidamente, la cui necessità è stata sottolineata al § 1. Per una rotazione delle molecole di tipo a trottola simmetrica o asimmetrica variano rapidamente sia la direzione degli assi della molecola stessa che la direzione della sua velocità angolare Ω . Dopo il suddetto calcolo della media, in Ω può re-

¹⁾ La formula (13,2) si deduce dalla formula esatta (per il caso *b*), trovata nel problema 3, III, § 113, con un passaggio al limite per *J* e *K* grandi e per una differenza *J* - *K* assegnata. In questo caso il contributo del momento orbitale Λ scompare (esso risulta essere un infinitesimo di un ordine di grandezza successivo rispetto a $1/J$).

stare la sola componente Ω_M lungo il vettore costante M , ma per questa componente il prodotto $[MB] \Omega_M$ è nullo.

Gli altri termini nell'equazione cinetica si trasformano così come abbiamo visto al § 7 o al § 8. Per il problema della conducibilità termica otteniamo così l'equazione

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T} \mathbf{v} \nabla T = -\gamma [MB] \frac{\partial \chi}{\partial M} + I(\chi). \quad (13,7)$$

Si deve cercare la soluzione di questa equazione di nuovo nella forma $\chi = g \nabla T$, ma per la costruzione della funzione vettoriale $g(\Gamma)$ abbiamo a disposizione non più due, bensì tre vettori: \mathbf{v} , M , B . Il campo esterno crea nel gas una direzione determinata per cui il processo di conducibilità termica diventa anisotropo e al posto del coefficiente scalare κ si deve introdurre il tensore della conducibilità termica $\kappa_{\alpha\beta}$, che determina il flusso di calore secondo la formula

$$q_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}. \quad (13,8)$$

Il tensore $\kappa_{\alpha\beta}$ si calcola mediante la funzione di distribuzione come l'integrale

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \int f_0 \varepsilon v_\alpha g_\beta d\Gamma \quad (13,9)$$

(si veda la (7,5)).

La forma generale di un tensore di secondo rango dipendente dal vettore B è

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa \delta_{\alpha\beta} + \kappa_1 b_\alpha b_\beta + \kappa_2 e_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma, \quad (13,10)$$

dove $\mathbf{b} = B/B$, $e_{\alpha\beta\gamma}$ è il tensore unità antisimmetrico, e κ , κ_1 , κ_2 sono scalari dipendenti dal valore assoluto del campo B . Il tensore (13,10) gode, evidentemente, della proprietà ¹⁾

$$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \kappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \quad (13,11)$$

All'espressione (13,10) corrisponde il flusso di calore

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \kappa_1 \mathbf{b} (b \nabla T) - \kappa_2 [\nabla T \cdot \mathbf{b}]. \quad (13,12)$$

L'ultimo termine è, come si dice, un *effetto dispari*: questa parte del flusso di calore cambia di segno quando il campo cambia di segno.

Il termine integrale $I(\chi)$ a secondo membro dell'equazione (13,7) è dato dalla formula (6,5). Nell'espressione integranda figura la funzione f_0 proporzionale alla densità N del gas. Separando questo fattore e dividendo per esso ambedue i membri dell'equazione, tro-

¹⁾ Questa proprietà esprime il principio di simmetria dei coefficienti cinetici in presenza di un campo magnetico. Nel caso considerato essa deriva automaticamente come conseguenza dell'esistenza di un unico vettore \mathbf{b} , mediante il quale si costruisce il tensore $\kappa_{\alpha\beta}$.

viamo che N figura nell'equazione soltanto nelle combinazioni B/N e $\nabla T/N$ con il campo e il gradiente della temperatura. Ne segue che la funzione $f_0\chi = f_0g\nabla T$ dipenderà dai parametri N e B soltanto sotto forma di rapporto B/N ; da questa sola grandezza dipenderanno anche gli integrali (13,9) e, quindi, i coefficienti κ , κ_1 , κ_2 nell'espressione (13,12). La densità N è proporzionale (per una data temperatura) alla pressione del gas P . Quindi la conducibilità termica del gas in un campo magnetico dipende dall'intensità del campo e dalla pressione soltanto in funzione del rapporto B/P^1).

All'aumentare di B il primo termine a secondo membro dell'equazione (13,7) cresce e il secondo non varia. Chiaramente al limite, per $B \rightarrow \infty$, la soluzione dell'equazione deve essere una funzione dipendente unicamente dalla direzione (e non dall'intensità) del campo, e inoltre essa deve annullare identicamente il termine $[MB] \partial\chi/\partial M$ dell'equazione; i coefficienti κ , κ_1 , κ_2 per $B \rightarrow \infty$ tendono corrispondentemente a limiti costanti (indipendenti da B).

Analogamente si studia il problema della viscosità di un gas in un campo magnetico. L'equazione cinetica corrispondente ha la forma

$$\left(mv_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} \delta_{\alpha\beta} \right) V_{\alpha\beta} = I(\chi) - \gamma[MB] \frac{\partial\chi}{\partial M} \quad (13,13)$$

(si veda la (6,19)). Si deve cercare la soluzione di questa equazione nella forma $\chi = g_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$. Al posto dei due coefficienti di viscosità η e ζ si deve ora introdurre il tensore di quarto rango $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ che definisce il tensore degli sforzi viscosi secondo la formula

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}; \quad (13,14)$$

il tensore $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$, per definizione, è simmetrico rispetto alle coppie di indici α , β e γ , δ . Mediante la funzione nota χ le sue componenti si calcolano come integrali

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \int mv_\alpha v_\beta f_0 g_{\gamma\delta} d\Gamma. \quad (13,15)$$

Il tensore di viscosità così calcolato soddisferà automaticamente la condizione

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{B}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \quad (13,16)$$

esprimente il principio di simmetria dei coefficienti cinetici.

Il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ (e i tensori unitari $\delta_{\alpha\beta}$ ed $e_{\alpha\beta\gamma}$) consentono di costruire le seguenti combinazioni tensoriali indipendenti con le

¹⁾ La variazione della conducibilità termica di un gas in un campo magnetico si chiama *effetto Zenftleben*.

proprietà di simmetria del tensore $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

- 1) $\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$,
- 2) $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$,
- 3) $\delta_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} + \delta_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta} + \delta_{\alpha\delta}b_{\beta}b_{\gamma} + \delta_{\beta\delta}b_{\alpha}b_{\gamma}$,
- 4) $\delta_{\alpha\beta}b_{\gamma}b_{\delta} + \delta_{\gamma\delta}b_{\alpha}b_{\beta}$,
- 5) $b_{\alpha}b_{\beta}b_{\gamma}b_{\delta}$,
- 6) $b_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + b_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta} + b_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma}$,
- 7) $b_{\alpha\gamma}b_{\beta}b_{\delta} + b_{\beta\gamma}b_{\alpha}b_{\delta} + b_{\alpha\delta}b_{\beta}b_{\gamma} + b_{\beta\delta}b_{\alpha}b_{\gamma}$,

(13,17)

dove $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha} = e_{\alpha\beta\gamma}b_{\gamma}$. In tutte queste combinazioni, tranne la quarta, la proprietà (13,16) compare automaticamente come conseguenza della simmetria rispetto alle coppie α, β e γ, δ ; nella quarta combinazione, invece, l'unione di due termini è dovuta alla sola condizione (13,16)¹⁾.

Corrispondentemente al numero di tensori (13,17) il gas nel campo magnetico è caratterizzato nel caso generale da sette coefficienti di viscosità indipendenti. Definiamoli come coefficienti nella seguente espressione del tensore degli sforzi viscosi:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta} = & 2\eta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} + \\ & + \eta_1 (2V_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} + \delta_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} b_{\gamma} b_{\delta} - 2V_{\alpha\gamma} b_{\gamma} b_{\beta} - \\ & - 2V_{\beta\gamma} b_{\gamma} b_{\alpha} + b_{\alpha} b_{\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} + b_{\alpha} b_{\beta} V_{\gamma\delta} b_{\gamma} b_{\delta}) + \\ & + 2\eta_2 (V_{\alpha\gamma} b_{\gamma} b_{\beta} + V_{\beta\gamma} b_{\gamma} b_{\alpha} - 2b_{\alpha} b_{\beta} V_{\gamma\delta} b_{\gamma} b_{\delta}) + \\ & + \eta_3 (V_{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} + V_{\beta\gamma} b_{\alpha\gamma} - V_{\gamma\delta} b_{\alpha\gamma} b_{\beta} b_{\delta} - V_{\gamma\delta} b_{\beta\gamma} b_{\alpha} b_{\delta}) + \\ & + 2\eta_4 (V_{\gamma\delta} b_{\alpha\gamma} b_{\beta} b_{\delta} + V_{\gamma\delta} b_{\beta\gamma} b_{\alpha} b_{\delta}) + \zeta_1 (\delta_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} b_{\gamma} b_{\delta} + b_{\alpha} b_{\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (13,18)$$

($V_{\alpha\beta}$ è definito nella (6,12)). Essa è costruita in modo tale che $\eta, \eta_1, \dots, \eta_4$ sono coefficienti per tensori, che si annullano in seguito a semplificazione rispetto agli indici α, β . I coefficienti ζ e ζ_1 , invece, stanno di fronte a tensori con traccia non nulla e si possono chiamare coefficienti della viscosità seconda. Osserviamo che essi contengono non soltanto lo scalare $\operatorname{div} \mathbf{V}$, ma anche $V_{\gamma\delta} b_{\gamma} b_{\delta}$. I primi due termini nella (13,18) corrispondono all'espressione ordinaria per il tensore degli sforzi, cosicché η e ζ sono gli ordinari coefficienti di viscosità.

Notiamo che i tensori $\kappa_{\alpha\beta}$ e $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ risultano automaticamente tensori propri, in modo che queste espressioni soddisfano la condizione di simmetria per inversione. Perciò la rinuncia a questa condizione (per un gas di una sostanza stereoisomera) non implicherebbe la comparsa di termini nuovi.

¹⁾ Non si deve scrivere la combinazione di termini con due fattori $b_{\alpha\beta}$: poiché il prodotto di due tensori $e_{\alpha\beta\gamma}$ si riduce a prodotti di tensori $\delta_{\alpha\beta}$, queste combinazioni si riconducono a quelle già scritte nella (13,17).

Tuttavia una tale rinuncia implica nuovi effetti, ossia la comparsa di un flusso di calore $q^{(V)}$ sotto l'influsso dei gradienti delle velocità e la comparsa degli sforzi viscosi $\sigma^{(T)}$ sotto l'influsso del gradiente della temperatura. Questi effetti (detti *incrociati*) sono descrivibili con le seguenti formule:

$$q_{\gamma}^{(V)} = c_{\gamma, \alpha\beta} V_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(T)} = -a_{\alpha\beta, \gamma} \frac{\partial T}{\partial x_{\gamma}}, \quad (13,19)$$

dove $c_{\gamma, \alpha\beta}$ e $a_{\alpha\beta, \gamma}$ sono tensori di terzo rango, simmetrici rispetto alla coppia di indici separati da una virgola. Scegliendo le grandezze x_a e X_a nel modo indicato al § 9, i coefficienti cinetici γ_{ab} e γ_{ba} sono $Tc_{\gamma, \alpha\beta}$ e $T^2 a_{\alpha\beta, \gamma}$. Perciò in virtù del principio di Onsager in presenza di un campo magnetico deve essere

$$Ta_{\alpha\beta, \gamma}(\mathbf{B}) = c_{\gamma, \alpha\beta}(-\mathbf{B}). \quad (13,20)$$

La forma generale di questi tensori è

$$a_{\alpha\beta, \gamma} = a_1 b_{\alpha} b_{\beta} b_{\gamma} + a_2 b_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} + a_3 (b_{\alpha} \delta_{\beta\gamma} + b_{\beta} \delta_{\alpha\gamma}) + \\ + a_4 (b_{\alpha\gamma} b_{\beta} + b_{\beta\gamma} b_{\alpha}). \quad (13,21)$$

Tutti i termini in questa espressione sono pseudotensori, cosicchè le relazioni (13,19) con questi coefficienti non sono invarianti per inversione.

Soffermiamoci brevemente sui fenomeni cinetici di un gas in un campo elettrico. Consideriamo un gas composto di molecole polari (possedenti cioè un momento di dipolo \mathbf{d}) del tipo a trottola simmetrica. In un campo elettrico sulla molecola polare agisce il momento di forze $[\mathbf{dE}]$ per cui nell'equazione cinetica compare il termine

$$\dot{\mathbf{M}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = [\mathbf{dE}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}.$$

La direzione \mathbf{d} coincide con l'asse della molecola e non ha niente a che vedere con il suo momento angolare \mathbf{M} . Tuttavia, in seguito al calcolo della media rispetto alla precessione rapida dell'asse della trottola attorno alla direzione del vettore costante \mathbf{M} , nel termine suindicato resta solo la proiezione d sulla direzione di \mathbf{M} ed esso diventa

$$\gamma [\mathbf{ME}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}, \quad (13,22)$$

dove $\gamma = \sigma d/M$; inoltre, la variabile σ (il coseno dell'angolo tra \mathbf{d} e \mathbf{M}) assume ora una serie continua di valori nell'intervallo da -1 a $+1$. L'espressione (13,22) differisce dal corrispondente termine nel caso magnetico per la sola sostituzione di \mathbf{B} con \mathbf{E} . Perciò re-

stano in vigore tutte le equazioni cinetiche dedotte sopra e le conseguenze che ne derivano¹⁾.

Una certa differenza esiste, tuttavia, in quanto il campo elettrico \mathbf{E} è un vettore proprio (e non un pseudovettore) e non varia per inversione del tempo. In forza di tale circostanza il principio di Onsager per i tensori della conducibilità termica e della viscosità sarà espresso ora dalle uguaglianze

$$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{E}) = \kappa_{\beta\alpha}(\mathbf{E}), \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{E}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{E}) \quad (13,23)$$

al posto delle (13,11) e (13,16). Corrispondentemente nelle espressioni (13,10) e (13,18), dove ora $\mathbf{b} = \mathbf{E}/E$, si avrà $\kappa_2 \equiv 0$, $\eta_3 = \eta_4 \equiv 0$ ²⁾. Al tempo stesso gli effetti incrociati risultano possibili non soltanto in un gas di una sostanza stereoisomera (dove l'espressione (13,21) resta completamente valida), ma anche in un gas di molecole non stereoisomere: l'espressione (13,21) con $a_4 \equiv 0$ è ora un tensore proprio.

§ 14. Fenomeni in gas debolmente rarefatti

Le equazioni idrodinamiche del moto dei gas, tenuto conto dei processi di conducibilità termica e dell'attrito interno, contengono il flusso di calore \mathbf{q}' (la parte dissipativa del flusso d'energia \mathbf{q}) e il tensore degli sforzi viscosi $\sigma'_{\alpha\beta}$ (la parte dissipativa del flusso della quantità di moto $\Pi_{\alpha\beta}$). Queste equazioni acquistano un significato reale dopo aver espresso \mathbf{q}' e $\sigma'_{\alpha\beta}$ in funzione dei gradienti della temperatura e della velocità del gas. Ma le espressioni ordinarie, lineari rispetto a questi gradienti, non rappresentano altro che i primi termini dello sviluppo nelle potenze del piccolo rapporto U/L tra la lunghezza del cammino libero e le dimensioni caratteristiche del problema (detto spesso *numero K di Knudsen*). Se questo rapporto non è molto piccolo, ha senso introdurre correzioni che tengano conto dei termini infinitesimi in U/L di ordine successivo. Queste correzioni compaiono sia nelle equazioni del moto stesse che nelle corrispondenti condizioni al contorno sulla superficie dei corpi immersi nel gas.

I termini successivi degli sviluppi dei flussi \mathbf{q}' e $\sigma'_{\alpha\beta}$ si esprimono in funzione delle derivate spaziali della temperatura, della pressione e della velocità dei diversi ordini e potenze. Questi termini, in teoria, si devono calcolare mediante un passaggio alle approssima-

¹⁾ Le molecole biatomiche ruotano nel piano perpendicolare a \mathbf{M} ; perciò per una molecola polare biatomica $\sigma = 0$. In questo caso l'influsso del campo elettrico sul moto delle molecole si manifesta nell'equazione cinetica soltanto nell'approssimazione quadratica rispetto al campo.

²⁾ In un gas di molecole non stereoisomere l'assenza di termini con κ_2 , η_3 , η_4 nel campo elettrico è richiesta anche dalla condizione di invarianza rispetto all'inversione.

zioni successive nella soluzione dell'equazione cinetica. All'approssimazione « zero » corrispondono la funzione di distribuzione d'equilibrio locale f_0 e le equazioni idrodinamiche di un fluido perfetto. Alla prima approssimazione corrispondono la funzione di distribuzione della forma $f = f_0 (1 + \chi^{(1)}/T)$, studiata ai §§ 6-8, le equazioni di Navier-Stokes e l'equazione della conducibilità termica. Nell'approssimazione successiva, la seconda, si deve cercare la funzione di distribuzione nella forma

$$f = f_0 \left[1 + \frac{1}{T} \chi^{(1)} + \frac{1}{T} \chi^{(2)} \right] \quad (14,1)$$

e linearizzare l'equazione cinetica rispetto alla correzione del secondo ordine $\chi^{(2)}$. L'equazione così ottenuta ha la forma

$$\frac{T}{f_0} \left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \frac{f_0 \chi^{(1)}}{T} + \frac{T}{f_0} \frac{\partial_1}{\partial t} f_0 - \\ - \frac{1}{T^2} \int w' f_{01} [\chi^{(1)'} \chi_1^{(1)'} - \chi^{(1)} \chi_1^{(1)}] d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 = \frac{1}{T} I(\chi^{(2)}), \quad (14,2)$$

dove I è l'operatore lineare integrale (6,5). Il simbolo $\partial_0/\partial t$ significa che le derivate temporali delle grandezze macroscopiche, che si ottengono per derivazione di $f_0 \chi^{(1)}/T$, devono essere espresse in funzione delle derivate spaziali mediante le equazioni idrodinamiche di approssimazione zero, le equazioni di Eulero. Quanto al simbolo $\partial_1/\partial t$, esso significa che l'omissione delle derivate temporali deve essere effettuata mediante i soli termini del primo ordine delle equazioni di Navier-Stokes e l'equazione della conducibilità termica.

Non scriveremo tutti i numerosi termini in \mathbf{q}' e $\sigma'_{\alpha\beta}$ che compaiono nella seconda approssimazione (questi termini sono detti di *Burnett*; *D. Burnett*, 1935). Nella maggioranza dei casi tali termini portano un contributo piccolo alla soluzione rispetto alle correzioni nelle condizioni al contorno di cui parleremo più avanti. In questi casi tener conto delle correzioni nelle equazioni stesse significherebbe un aumento ingiustificato della precisione ammissibile. Limitiamoci alla considerazione di alcuni termini correttivi tipici e valutiamoli per moti di vario tipo.

E da notare soprattutto che il piccolo parametro $K = l/L$ è legato in modo determinato ai due parametri, che caratterizzano il moto idrodinamico, ossia al numero di Reynolds R e al numero di Mach M . Ricordiamo che il primo è definito come $R \sim VL/\nu$, dove V è la scala caratteristica di variazione della velocità del moto e ν è la viscosità cinematica; il numero di Mach vale $M \sim V/u$, dove u è la velocità del suono. Nei gas l'ordine di grandezza della velocità del suono coincide con la velocità termica media delle molecole \bar{v} e la viscosità cinematica è $\nu \sim \bar{l}\bar{v}$. Perciò $R \sim VL/\bar{l}\bar{v}$, $M \sim V/\bar{v}$ e il nu-

mero di Knudsen vale

$$K \sim M/R. \quad (14,3)$$

Ne risulta che la condizione di idrodinamicità del moto, $K \ll 1$, impone una certa restrizione all'ordine di grandezza relativo dei numeri R e M . Consideriamo dapprima i moti « lenti » in cui

$$R \ll 1, \quad M \ll 1. \quad (14,4)$$

Consideriamo uno dei termini di Burnett nel tensore degli sforzi viscosi, che contenga il prodotto di due derivate prime rispetto alla velocità, per esempio

$$\rho l^2 \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\gamma}; \quad (14,5)$$

il coefficiente ρl^2 che figura in questa espressione (ρ è la densità del gas), è una stima rispetto all'ordine di grandezza. Questo termine dà in $\sigma'_{\alpha\beta}$ il contributo $\sigma^{(2)} \sim \rho l^2 V^2 / L^2$. Quanto all'ordine di grandezza dei termini fondamentali (quelli di Navier-Stokes) negli sforzi viscosi, esso è

$$\sigma^{(1)} \sim \eta \frac{\partial V}{\partial x} \sim \frac{\rho \bar{v} V}{L},$$

e il rapporto è

$$\frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}} \sim \frac{lV}{L\bar{v}} \sim \frac{l^2}{L^2} R.$$

Poiché $R \ll 1$, vediamo che i termini (14,5) portano negli sforzi viscosi una correzione dell'ordine relativo $\ll (l/L)^2$, mentre la correzione alle condizioni al contorno (si veda più avanti) porta nel moto correzioni dell'ordine relativo di l/L , cioè notevolmente più grandi.

Ancora più piccole saranno le correzioni provenienti dai termini della forma ¹⁾

$$\frac{\rho l^2}{m^2 v^2} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \quad (14,6)$$

se si tratta di gradienti della temperatura che compaiono di per se stessi in seguito al moto; è facile vederlo osservando che gli sbalzi caratteristici della temperatura sono $\Delta T \sim TV^2/u^2$. Se gli sbalzi di temperatura sono causati dall'« esterno » (da corpi riscaldati immersi nel gas, ad esempio), allora i termini di Burnett della forma (14,6) possono implicare la comparsa di un moto stazionario con velocità

¹⁾ È stato *Maxwell* (1879) il primo a studiare questi termini negli sforzi viscosi.

caratteristiche definibili dalla condizione

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}) = \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}.$$

Una stima della velocità di questo moto dà

$$V \sim l (\Delta T)^3 / L m \bar{\nu} T^2 \quad (14,7)$$

(*M. N. Kogan, V. S. Galkin, O. G. Fridlender, 1970*). Facendo la stima si deve tener presente che il laplaciano della temperatura può essere espresso mediante l'equazione della conducibilità termica $\text{div}(\kappa \nabla \tau) = 0$ in funzione del quadrato del suo gradiente e anche che il moto è dovuto solo a una parte non potenziale della forza $\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} / \partial t$. Una parte potenziale, invece, è data dalla pressione.

Considerazioni analoghe riguardano i termini correttivi nel flusso termico q' . In generale, è impossibile comporre il termine correttivo del secondo ordine mediante le derivate della sola temperatura; il primo termine (dopo $-\kappa \nabla T$) di questo tipo ha la forma costante $\cdot \nabla \Delta T$ (Δ è l'operatore di Laplace), vale a dire che è del terzo ordine. I termini contenenti accanto alle derivate rispetto alla temperatura anche quelle rispetto alla velocità, ad esempio

$$\frac{\rho l^2}{m} \text{div} \mathbf{V} \cdot \nabla T,$$

conducono di nuovo a una correzione dell'ordine relativo di l^2/L^2 .

Passiamo ora ai moti « veloci » in cui

$$R \gg 1, \quad M \leq 1. \quad (14,8)$$

In questi casi il quadro del moto idrodinamico dei gas è composto di due regioni: la regione di volume in cui i termini viscosi nelle equazioni del moto sono in generale inessenziali, e lo strato di frontiera sottile in cui la velocità del gas decresce rapidamente.

Supponiamo, ad esempio, che il gas fluisca attorno ad una lamina piana; prendiamo come asse x la direzione del moto del gas. Lo spessore δ dello strato di frontiera sulla lamina è

$$\delta \sim \left(\frac{xv}{V} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{x\bar{v}}{V} \right)^{1/2},$$

dove x è la distanza dal suo bordo anteriore (si veda VI, § 39). La dimensione caratteristica per la variazione della velocità lungo l'asse x è data dalla coordinata stessa x e lungo la direzione dell'asse y , perpendicolare alla lamina, dallo spessore δ dello strato di frontiera. In questo caso $V_y \sim V_x \delta / x$, come deriva dall'equazione di continuità. Il termine principale nel tensore degli sforzi viscosi di Navier-Stokes è

$$\sigma'_{xy} \sim \rho v \frac{\partial V_x}{\partial y} \sim \rho \frac{\bar{v} V}{\delta}.$$

Fra i termini di Burnett in σ'_{xy} non esiste tuttavia un termine che contenga il quadrato $(\partial V_x / \partial y)^2$; è facile capire perciò che dalle derivate $\partial V_\alpha / \partial x_\beta$ non si può costruire un tensore di secondo rango quadratico in esse, la cui componente xy contenga questo quadrato. I più grandi termini in σ'_{xy} possono essere soltanto quelli della forma

$$\rho l^2 \frac{\partial V_x}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{V} \sim \frac{\rho l^2 V^2}{x \delta}.$$

Il loro rapporto rispetto a $\sigma'_{xy}^{(1)}$ è $\sigma^{(2)} / \sigma^{(1)} \sim lV / x\bar{v} \sim (l/\delta)^2$, cioè di nuovo del secondo ordine.

Mostriamo ora che i termini correttivi nelle condizioni al contorno sulla frontiera tra il gas e i solidi conducono ad effetti del primo ordine in l/L . Perciò i fenomeni osservabili, dovuti alla rarefazione del gas, si verificano proprio in prossimità delle superfici solide.

Nei gas non rarefatti l'uguaglianza delle temperature del gas e del corpo costituisce la condizione al contorno sulla superficie del solido. In realtà, però, questa condizione è approssimata e si verifica in quanto si può supporre infinitesima la lunghezza del cammino libero. Se si tiene conto che la lunghezza del cammino libero è finita, sulla superficie di contatto tra il solido e il gas riscaldato non uniformemente vi è una certa differenza di temperature; questa differenza si annulla, in generale, soltanto nell'equilibrio termico completo, quando la temperatura del gas è costante¹⁾.

In prossimità della superficie solida (a distanze piccole, ma non troppo, da essa) si può supporre costante il gradiente della temperatura, in modo che l'andamento della temperatura in funzione della distanza sia rappresentato da una linea retta. Tuttavia a ridosso della parete (a distanze $\sim l$) l'andamento della temperatura, in generale, è più complicato e il suo gradiente non è costante. Nella fig. 1 è rappresentato con una linea piena l'andamento approssimato della temperatura del gas vicino alla superficie.

Tuttavia, questo andamento effettivo della temperatura in prossimità diretta della parete, riferito a distanze comparabili con la lunghezza del cammino libero, è inessenziale quando si considera la distribuzione della temperatura in tutto il volume del gas. Nello studio della distribuzione della temperatura vicino alla parete solida è importante di fatto la sola parte retta della curva nella fig. 1, che

¹⁾ Quando si parla della temperatura di un gas in una regione, le cui dimensioni sono dell'ordine di grandezza del cammino libero, è necessario, a rigore, determinare che cosa si intenda per temperatura. In questo caso definiremo la temperatura in base all'energia media delle molecole nella regione di gas considerata, e, inoltre, supporremo che la funzione, che definisce la temperatura in base all'energia media delle molecole, sia la stessa che per grandi volumi del gas.

si estende a distanze più grandi della lunghezza del cammino libero. L'equazione di questa retta è definita dall'angolo di inclinazione e dal segmento da essa tagliato sull'asse delle ordinate. Ci interessa dunque non il vero sbalzo di temperatura, bensì lo sbalzo ottenuto per estrapolazione della temperatura del gas fino alla parete stessa, supponendone costante il gradiente fino alla distanza zero (la linea tratteggiata nella fig. 1). Con δT intendiamo questo sbalzo estrapolato di temperatura e lo definiremo come temperatura del gas meno quella della parete (nella fig. 1 la temperatura della parete è supposta convenzionalmente uguale a zero).

Se il gradiente della temperatura è nullo, anche lo sbalzo δT scompare. Perciò, quando i gradienti della temperatura non sono troppo grandi, si ha

$$\delta T = g \frac{\partial T}{\partial n} \quad (14,9)$$

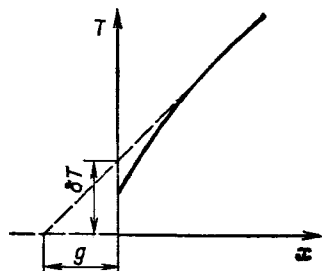


Fig. 1

(la derivata si calcola lungo la normale alla superficie, diretta verso

l'interno del gas). Si può chiamare g *coefficiente di sbalzo di temperatura*. Se la temperatura del gas aumenta verso l'interno del suo volume ($\partial T / \partial n > 0$) si deve avere anche $\delta T > 0$; di conseguenza, il coefficiente g è positivo.

Fenomeni analoghi si verificano sulla frontiera tra una parete solida e un gas in moto. Anziché « incollarsi » completamente alla superficie solida il gas rarefatto conserva nei suoi pressi una certa velocità finita, anche se piccola; come si dice, il gas scivola lungo la superficie. Analogamente alla formula (14,9) la velocità v_0 di questo scivolamento è

$$v_0 = \xi \frac{\partial V_t}{\partial n}, \quad (14,10)$$

dove V_t è la componente tangenziale della velocità del gas in prossimità della parete. Come g , è positivo anche il *coefficiente di scivolamento* ξ . Per la grandezza v_0 valgono le stesse osservazioni fatte nei riguardi dello sbalzo di temperatura δT definibile dalla formula (14,9). A rigore, v_0 non è la velocità vera del gas vicino alla parete, bensì una velocità estrapolata, nell'ipotesi della costanza del gradiente $\partial V_t / \partial n$ nello strato di gas prossimo alla parete.

I coefficienti g e ξ hanno le dimensioni di una lunghezza e come ordine di grandezza coincidono con la lunghezza del cammino libero

$$g \sim l, \quad \xi \sim l. \quad (14,11)$$

Lo sbalzo di temperatura e la velocità di scivolamento sono quindi grandezze del primo ordine in l/L . Per calcolare i coefficienti g e ξ

si dovrebbe risolvere l'equazione cinetica per la funzione di distribuzione delle molecole del gas in prossimità della superficie. In questa equazione si dovrebbe tener conto degli urti delle molecole contro la parete, e perciò è necessario conoscere la legge di diffusione delle molecole in seguito agli urti.

Se prolunghiamo nella fig. 1 la linea tratteggiata fino alla sua intersezione con l'asse delle ascisse, essa intercetta un segmento di lunghezza g . In altre parole, si può dire che la distribuzione della temperatura in presenza di uno sbalzo di temperatura è la stessa che sarebbe senza sbalzo, ma con la parete spostata di una distanza g . Lo stesso si può dire dello scivolamento del gas, con la parete spostata di una distanza ξ . È ovvio che con queste sostituzioni nelle soluzioni dei problemi idrodinamici si devono conservare i soli termini del primo ordine in g o in ξ . Poiché gli sbalzi della temperatura o della velocità sono equivalenti allo spostamento delle frontiere a distanze dell'ordine di grandezza di l , le correzioni causate da ciò nelle soluzioni dei problemi hanno ordine di grandezza pari a $l\partial/\partial x \sim \sim l/L$, ossia sono del primo ordine rispetto a l/L .

Accanto alle correzioni alle condizioni al contorno, si verificano altri effetti dello stesso ordine rispetto a l/L , che in numerosi casi sono più importanti, poiché compaiono alcuni fenomeni qualitativamente nuovi.

Uno di essi consiste nella comparsa di un moto del gas in prossimità di una superficie solida riscaldata non uniformemente, ossia il cosiddetto *scivolamento termico*. In un certo senso questo effetto è analogo alla termodiffusione in una miscela di gas. Così come in presenza di un gradiente della temperatura in una miscela gassosa, gli urti delle molecole con quelle del gas « estraneo » implicano la comparsa di un flusso di particelle, nel caso in esame il flusso è dovuto agli urti contro la parete riscaldata non uniformemente delle molecole di uno strato stretto (di spessore $\sim l$) di gas nell'intorno della superficie.

Indichiamo con V_t la velocità tangenziale acquistata dal gas nei pressi della parete, in seguito allo scivolamento termico, e con $\nabla_t T$ la componente tangenziale del gradiente della temperatura. In prima approssimazione si può affermare che V_t è proporzionale a $\nabla_t T$, cioè che per una superficie isotropa

$$V_t = \mu \nabla_t T. \quad (14,12)$$

Il coefficiente μ deve essere proporzionale alla lunghezza del cammino (essendo legato alle particelle in uno strato di gas di questo spessore). Allora, da considerazioni dimensionali, risulta chiaro che $\mu \sim l/m\bar{v}$. Esprimendo la lunghezza del cammino in funzione della sezione d'urto e della densità del gas abbiamo $l \sim 1/N\sigma \sim T/\sigma P$ e

$$\mu \sim \frac{1}{\sigma P} \sqrt{\frac{T}{m}}. \quad (14,13)$$

Il segno del coefficiente μ non è definibile dalle condizioni termodinamiche e secondo i dati sperimentali si ha, di regola, $\mu > 0$.

Infine, un altro effetto del primo ordine consiste nella comparsa in un gas in moto di un flusso di calore superficiale complementare (cioè concentrato in uno strato di spessore $\sim l$ vicino alla parete) q'_{sup} , che è proporzionale al gradiente normale della velocità tangenziale, cioè

$$q'_{\text{sup}} = \varphi \frac{\partial V_t}{\partial n} \quad (14,14)$$

(questo flusso ha dimensione erg/cm · s).

I coefficienti μ e φ sono mutuamente legati da una relazione che deriva dal principio di Onsager. Per dedurre questa relazione consideriamo la parte « superficiale » della crescita di entropia, \dot{S}_{sup} , legata al moto del gas vicino alla parete (e riferita all'unità di superficie della parete). Questo incremento è composto di due parti. In primo luogo, la presenza del flusso di calore q'_{sup} dà alla derivata di \dot{S}_{sup} il contributo

$$-T^{-2} q'_{\text{sup}} \nabla T$$

(si veda l'espressione analoga per l'aumento dell'entropia legato al flusso termico di volume: VI, § 49; IX, § 88). In secondo luogo, sulla parete su cui scorre il gas agisce una forza d'attrito uguale a $-\eta \partial V_t / \partial n$ (riferita all'unità d'area). L'energia dissipata nell'unità di tempo è uguale al lavoro eseguito da questa forza

$$-\eta \frac{\partial V_t}{\partial n} V_t,$$

e divisa per T dà il contributo corrispondente all'aumento di entropia. Quindi,

$$\dot{S}_{\text{sup}} = -\frac{1}{T^2} q'_{\text{sup}} \nabla T - \frac{1}{T} \eta V_t \frac{\partial V_t}{\partial n}. \quad (14,15)$$

Consideriamo ora al posto delle grandezze X_a , che figurano nella formulazione generale del principio di Onsager (§ 9), i vettori

$$X_1 = \frac{1}{T^2} \nabla T, \quad X_2 = \frac{1}{T} \frac{\partial V_t}{\partial n}.$$

Allora dal confronto fra la (14,15) e l'espressione generale (9,3) risulta che i vettori

$$\dot{x}_1 = q'_{\text{sup}}, \quad \dot{x}_2 = \eta V_t$$

saranno le grandezze \dot{x}_a corrispondenti. Le relazioni (14,12) e (14,14) fungono da « equazioni del moto » (9,1); riscrivendole nella forma

$$\dot{x}_1 = T \varphi X_2, \quad \dot{x}_2 = \eta \mu T^2 X_1,$$

otteniamo la relazione cercata

$$\varphi = T\eta\mu \quad (14,16)$$

(L. Waldmann, 1967).

PROBLEMI

1. Due recipienti contenenti gas a temperature diverse T_1 e T_2 sono congiunti da un tubo lungo. In seguito allo scivolamento termico si stabilisce una differenza di pressione tra i gas in ambedue i recipienti (*effetto termomeccanico*). Determinare questa differenza.

Soluzione. La condizione al contorno sulla superficie del tubo, per un moto di Poiseuille, sotto l'influsso dei gradienti della pressione e della temperatura e tenendo conto dello scivolamento termico è $v = \mu \, dT/dx$ per $r = R$ (R è il raggio del tubo e l'asse x è preso lungo la sua lunghezza). Nel modo ordinario (si veda VI, § 17) troviamo la distribuzione delle velocità rispetto alla sezione del tubo

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) + \mu \frac{dT}{dx}.$$

La quantità (massa) del gas passante attraverso la sezione del tubo nell'unità di tempo è

$$Q = -\frac{\rho\pi R^4}{8\eta} \frac{dP}{dx} + \rho\mu\pi R^2 \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

ρ è la densità del gas). In equilibrio meccanico $Q = 0$ da cui

$$\frac{dP}{dx} = \frac{8\eta\mu}{R^2} \frac{dT}{dx}.$$

Integrando lungo tutta la lunghezza del tubo troviamo la differenza di pressioni

$$P_2 - P_1 = \frac{8\eta\mu}{R^2} (T_2 - T_1)$$

(per differenze $T_2 - T_1$ non troppo grandi si possono supporre costanti i coefficienti η e μ). La stima dell'ordine di grandezza dell'effetto (mediante le formule (14,13) e (8,11)) dà

$$\frac{\delta P}{P} \sim \frac{l^2}{R^2} \frac{\delta T}{T}.$$

La distribuzione delle velocità sulla sezione del tubo per $Q = 0$ ha la forma

$$v = \mu \left(\frac{2r^2}{R^2} - 1 \right) \frac{dT}{dx}.$$

In prossimità delle pareti il gas si muove nella direzione del gradiente della temperatura ($v > 0$), e in prossimità dell'asse del tubo in direzione opposta ($v < 0$).

2. Due tubi (di lunghezza L) di raggi diversi ($R_1 < R_2$) sono congiunti agli estremi, dove le temperature sono diverse ($T_2 > T_1$; la differenza $T_2 - T_1$ è piccola). In seguito allo scivolamento termico si stabilisce un moto circolare del gas nei tubi; determinare il passaggio totale di gas attraverso la sezione dei tubi.

Soluzione. Dividendo per R^4 la relazione (1) del problema 1 e integrando lungo il contorno chiuso formato dai due tubi, troviamo

$$Q = \frac{\rho \mu \pi}{L} (T_2 - T_1) (R_2^2 - R_1^2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^4 + R_1^4}.$$

Il moto segue la direzione indicata nella fig. 2.

3. Determinare la forza F agente su una sfera (di raggio R) immersa in un gas in cui si mantiene costante il gradiente della temperatura $\nabla T = A$.

Soluzione. La distribuzione della temperatura all'interno della sfera è data dalla formula

$$T = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} A r \cos \theta,$$

dove κ_1 e κ_2 sono i coefficienti di conducibilità termica della sfera e del gas; r e θ le coordinate sferiche con origine nel centro della sfera e la direzione A come asse polare (si veda VI, § 50, il problema 2). Di qui ricaviamo per il gradiente della temperatura lungo la superficie della sfera

$$\frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} A \sin \theta.$$

Il moto laminare del gas che si produce in seguito allo scivolamento termico è definibile col solo vettore A . Perciò la soluzione corrispondente dell'equazione di Navier-Stokes si può cercare nella stessa forma del problema di una sfera immersa in un fluido (si veda VI, § 20).

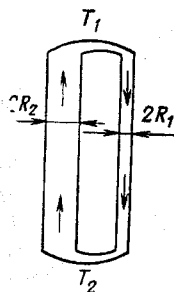


Fig. 2

$$\mathbf{v} = -a \frac{\mathbf{A} + n(\mathbf{A}n)}{r} + b \frac{3n(\mathbf{A}n) - \mathbf{A}}{r^3},$$

dove $n = r/r$ (omettiamo in \mathbf{v} la costante additiva in quanto deve essere $\mathbf{v} = 0$ per $r \rightarrow \infty$). Le costanti a e b vanno determinate mediante le condizioni

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\mu}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{per } r = R$$

e valgono

$$a = \frac{b}{R^2} = - \frac{3\kappa_2 R \mu}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)}.$$

La forza agente sulla sfera è

$$\mathbf{F} = 8\pi a \eta \mathbf{A} = - \frac{12\pi \eta \mu R \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \nabla T.$$

Affinché gli effetti superficiali studiati nei problemi siano effettivamente piccoli rispetto a quelli di volume, la temperatura deve variare poco: nei problemi 1 e 2 sul raggio del tubo, e nel problema 3 sul raggio della sfera.

4. Due recipienti congiunti da un tubo lungo contengono un gas a una stessa temperatura e pressioni P_1 e P_2 . Determinare il flusso di calore tra i recipienti che accompagna il moto di Poiseuille (*effetto meccanico-calorico*).

Soluzione. Secondo le formule (14,14) e (14,16) il flusso di calore lungo le pareti del tubo è

$$q' = 2\pi R q'_{\text{sup}} = 2\pi R T \eta \mu \frac{dV}{dr}$$

D'altra parte, dalla condizione di equilibrio meccanico di un fluido per il moto stazionario abbiamo

$$2\pi R\eta \frac{dV}{dr} = \pi R^2 \frac{dP}{dx} = \pi R^2 \frac{P_2 - P_1}{L}.$$

Di qui otteniamo infine

$$q' = \pi R^2 T \mu (P_2 - P_1)/L.$$

§ 15. Fenomeni in gas fortemente rarefatti

I fenomeni considerati al paragrafo precedente non rappresentano altro che effetti correttivi legati alle potenze di ordine superiore del rapporto tra lunghezza del cammino libero l e dimensioni caratteristiche del problema L ; prima, questo rapporto è stato supposto piccolo. Se, invece, il gas è così rarefatto (o se le dimensioni L sono talmente piccole) che $l/L \gtrsim 1$, allora le equazioni idrodinamiche diventano completamente inapplicabili anche con condizioni al contorno corrette.

Nel caso generale di un rapporto arbitrario l/L si deve risolvere, in via di principio, l'equazione cinetica con determinate condizioni al contorno sulle superfici solide a contatto con il gas. Queste condizioni sono definite dall'interazione delle molecole del gas con la superficie e legano la funzione di distribuzione delle particelle incidenti con la funzione di distribuzione delle particelle che lasciano la superficie. Se questa interazione si riduce alla diffusione delle molecole (senza una loro trasformazione chimica, ionizzazione o assorbimento da parte della superficie), allora essa è descritta dalla probabilità $w(\Gamma', \Gamma) d\Gamma'$ che una molecola con valore assegnato Γ dopo l'urto con la superficie sia riflessa da essa in un intervallo $d\Gamma'$; la funzione w è normalizzata dalla condizione

$$\int w(\Gamma', \Gamma) d\Gamma' = 1. \quad (15,1)$$

La condizione al contorno per la funzione di distribuzione $f(\Gamma)$ si scrive per mezzo di w nella forma

$$\int_{nv < 0} w(\Gamma', \Gamma) nv f(\Gamma) d\Gamma = -nv' f(\Gamma') \quad \text{per } nv' > 0. \quad (15,2)$$

L'integrale a primo membro (moltiplicato per $d\Gamma'$) rappresenta il numero di molecole incidenti su 1 cm^2 di superficie in un secondo, che per diffusione si vengono a trovare nell'intervallo $d\Gamma'$; l'integrazione è estesa alla regione di valori Γ corrispondente alle molecole che si muovono verso la superficie (n è il versore della normale esterna alla superficie del corpo). L'espressione a secondo membro della condizione (15,2) è il numero di molecole che lasciano la superficie

(dalla stessa area e nello stesso tempo); i valori di Γ' in ambedue i membri dell'uguaglianza devono corrispondere alle molecole che si muovono nella direzione proveniente dalla superficie.

In equilibrio, quando la temperatura del gas coincide con quella del corpo, la funzione di distribuzione delle particelle, sia incidenti che riflesse, deve essere quella di Boltzmann. Ne consegue che la funzione w deve verificare identicamente l'uguaglianza

$$\int_{\mathbf{nv} < 0} w(\Gamma', \Gamma) \mathbf{n} v e^{-\varepsilon/T_1} d\Gamma = -\mathbf{n} v' e^{-\varepsilon'/T_1}, \quad (15,3)$$

che si ottiene dalla sostituzione nella (15,2) di $f(\Gamma) = \text{costante} \times \exp(-\varepsilon/T_1)$, dove T_1 è la temperatura del corpo.

Nell'impostazione generale descritta la soluzione del problema del moto di un gas fortemente rarefatto è molto complicata. Tuttavia il problema può essere impostato in modo più semplice per i casi limite di un gas così fortemente rarefatto che il rapporto $l/L \gg 1$.

Una grande categoria di questi problemi è legata a situazioni in cui una massa notevole di gas occupa un volume, le cui dimensioni sono grandi sia rispetto alle dimensioni L dei solidi immersi nel gas sia rispetto alla lunghezza l del cammino libero. Allora gli urti delle molecole contro la superficie dei corpi sono relativamente rari ed inessenziali rispetto agli urti reciproci tra le molecole stesse. Se il gas di per sé si trova in equilibrio a una certa temperatura T_2 , allora in queste condizioni si può supporre che l'equilibrio non sia violato da un corpo immerso. In questo caso tra il gas e il corpo possono esistere differenze di temperature arbitrarie. Lo stesso si riferisce alle velocità del moto macroscopico.

Supponiamo che $\tau = T_2 - T_1$ sia la differenza tra la temperatura del gas e la temperatura di una piccola porzione $d\mathcal{f}$ della superficie del corpo, e che \mathbf{V} sia la velocità del gas rispetto al corpo. Per τ e \mathbf{V} non nulle vediamo che, in primo luogo, compare uno scambio di calore tra il gas e il corpo e che, in secondo luogo, sul corpo agisce una forza da parte del gas. Indichiamo con q la densità del flusso dissipativo di calore dal gas al corpo e con $\mathbf{F} = P\mathbf{n}$, dove \mathbf{n} è la normale esterna, la forza agente in ogni punto della superficie del corpo (riferita all'unità d'area). Qui il secondo termine è la pressione ordinaria del gas e \mathbf{F} la forza complementare da definire, legata a τ e \mathbf{V} . Le grandezze q e \mathbf{F} sono funzioni di τ e \mathbf{V} che si annullano con i loro argomenti.

Se τ e \mathbf{V} sono sufficientemente piccole (la prima rispetto alle temperature stesse del gas e del corpo, la seconda rispetto alla velocità termica delle molecole del gas), allora si possono sviluppare q e \mathbf{F} in serie di potenze di τ e \mathbf{V} limitandosi ai termini lineari. Indichiamo con F_n e V_n le componenti di \mathbf{F} e \mathbf{V} lungo la normale \mathbf{n} , e con F_t , V_t le loro componenti tangenziali; queste ultime sono vettori con due componenti indipendenti. Allora i suddetti sviluppi avranno la

forma

$$q = \alpha\tau + \beta V_n, \quad F_n = \gamma\tau + \delta V_n, \quad F_t = \theta V_t, \quad (15,4)$$

dove α , β , γ , δ , θ sono costanti (più precisamente, funzioni della temperatura e della pressione) che caratterizzano il gas e la sostanza del solido. Le grandezze « scalari » q e F_n non possono contenere, per ragioni di simmetria, termini lineari nel vettore V_t . Per la stessa ragione nello sviluppo del vettore F_t non esistono termini lineari negli « scalari » τ e V_n .

Le grandezze α , δ , θ sono positive. Così, se la temperatura del gas è superiore a quella del corpo ($\tau > 0$), il calore passerà dal gas al corpo, vale a dire che la parte corrispondente del flusso q sarà positiva; perciò $\alpha > 0$. Inoltre, le forze F_n , F_t agenti sul corpo e condizionate dal moto del gas rispetto al corpo devono essere dirette nella stessa direzione di V_n e V_t ; perciò deve essere $\delta > 0$ e $\theta > 0$. Quanto ai coefficienti β e γ , il loro segno non deriva da considerazioni termodinamiche generali (benché, probabilmente, essi siano come regola positivi). Tra questi coefficienti si verifica una semplice relazione, conseguenza del principio di simmetria dei coefficienti cinetici.

Per dedurre questa relazione calcoliamo la derivata temporale dell'entropia totale di tutto il sistema, formato dal gas e dal corpo immerso in esso. Nell'unità di tempo il corpo riceve dal gas una quantità di calore $q df$ attraverso ogni elemento di superficie df . In questo caso l'entropia del corpo S_1 ha un incremento

$$\dot{S}_1 = \oint \frac{q}{T_1} df,$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la superficie del corpo.

Per calcolare l'incremento di entropia del gas consideriamo un sistema di coordinate in cui il gas sia a riposo (nel luogo in cui si trova il corpo); in questo sistema la velocità di ogni punto della superficie del corpo è $-V$. Per la dimostrazione della relazione cercata supponiamo che la forma del corpo possa variare durante il suo moto; allora le velocità V dei diversi punti della sua superficie saranno grandezze variabili indipendenti qualsiasi. Secondo la relazione termodinamica $dE = T dS - P d\mathcal{V}$ la variazione dell'entropia del gas nell'unità di tempo vale

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2} (\dot{E}_2 + P_2 \dot{\mathcal{V}}_2)$$

(le grandezze con l'indice 2 si riferiscono al gas). La derivata \dot{E}_2 è uguale, in virtù della conservazione dell'energia totale del sistema, alla variazione dell'energia del corpo con segno opposto. Quest'ultima è composta dalla quantità di calore $\oint q df$ e dal lavoro compiuto sul corpo, uguale a $\oint (-V) (F - Pn) df$. Da qui rica-

viamo la variazione dell'energia del gas

$$\dot{E}_2 = \oint (-q + F_n V_n + F_t V_t - P_2 V_n) df.$$

Quanto alla variazione del volume del gas, essa è uguale alla variazione del volume del corpo con segno cambiato, ossia

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = \oint V_n df.$$

Otteniamo così la variazione dell'entropia del gas

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2} \oint (-q + F_n V_n + F_t V_t) df.$$

Sommando le derivate di S_1 , S_2 e ponendo in seguito (per τ piccole) $T_1 \approx T_2 \equiv T$, otteniamo infine la velocità di variazione dell'entropia totale del sistema

$$\dot{S} = \int \left[\frac{q\tau}{T^2} + \frac{F_n V_n}{T} + \frac{F_t V_t}{T} \right] df. \quad (15,5)$$

Consideriamo al posto delle grandezze $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$ nella formula generale che esprime il principio di Onsager (§ 9) rispettivamente q , F_n e le due componenti del vettore F_t (in ogni dato punto della superficie del corpo). Per precisare il significato delle grandezze X_α confrontiamo la formula (15,5) con l'espressione generale per la velocità di variazione dell'entropia (9,3). Vediamo che come grandezze X_1, X_2, X_3, X_4 fungono rispettivamente $-\tau/T^2$, $-V_n/T$ e le due componenti del vettore $-V_t/T$ nello stesso punto. Quanto ai coefficienti cinetici (i coefficienti nelle relazioni (9,1)), essi sono

$$\gamma_{11} = \alpha T^2, \quad \gamma_{22} = \delta T, \quad \gamma_{33} = \gamma_{44} = \theta T, \\ \gamma_{12} = \beta T, \quad \gamma_{21} = \gamma T^2.$$

Dalla simmetria $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ deriva quindi la relazione cercata

$$\beta = \gamma T. \quad (15,6)$$

E da notare anche che dalla condizione di positività della forma quadratica (9,3) ($\dot{S} > 0$) derivano le suddette disuguaglianze $\alpha, \beta, \theta > 0$ e in più la disuguaglianza

$$T\alpha\delta > \beta^2.$$

Il calcolo dei coefficienti nella (15,4) richiede di conoscere la legge di diffusione effettiva delle molecole del gas da parte della superficie del corpo, esprimibile con la funzione introdotta sopra w (Γ', Γ). A titolo di esempio otteniamo una formula che, in linea di principio, consente di calcolare la grandezza α .

La densità del flusso di energia dal gas al corpo è espressa dall'integrale

$$q = \int (\varepsilon - \varepsilon') |v_x| w(\Gamma', \Gamma) f(\Gamma) d\Gamma d\Gamma' \quad (15,7)$$

(esteso alla regione $v_x < 0$, $v'_x > 0$); per ogni urto di una molecola contro la parete questa riceve l'energia $\varepsilon - \varepsilon'$.

Trasformiamo questa espressione mediante il principio dell'equilibrio dettagliato, secondo il quale in stato di equilibrio il numero di transizioni $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ per diffusione delle molecole dalla parete è uguale al numero di transizioni $\Gamma'^T \rightarrow \Gamma^T$. Ciò significa che

$$\begin{aligned} w(\Gamma', \Gamma) |v_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{T_1}\right) = \\ = w(\Gamma^T, \Gamma'^T) |v'_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon'}{T_1}\right) \end{aligned} \quad (15,8)$$

(in equilibrio la temperatura del gas coincide con quella della parete).

Nella (15,7) effettuiamo il cambio di notazione delle variabili di integrazione $\Gamma \rightarrow \Gamma'^T$, $\Gamma' \rightarrow \Gamma^T$. Calcolando la semisomma delle due espressioni così ottenute scriviamo

$$\begin{aligned} q = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \varepsilon') e^{\mu/T_2} [w(\Gamma', \Gamma) |v_x| e^{-\varepsilon/T_2} - \\ - w(\Gamma^T, \Gamma'^T) |v'_x| e^{-\varepsilon'/T_2}] d\Gamma d\Gamma'. \end{aligned}$$

Infine, sostituendovi $w(\Gamma^T, \Gamma'^T)$ dalla (15,8) e sviluppando in seguito l'espressione integranda in potenze della piccola differenza $\tau = T_2 - T_1$, troviamo che $q = \alpha\tau$, dove

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{2T^2} \int (\varepsilon - \varepsilon')^2 |v_x| w(\Gamma', \Gamma) \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T}\right) d\Gamma d\Gamma' \\ (v_x < 0, v'_x > 0) \end{aligned} \quad (15,9)$$

(l'indice della temperatura $T_1 \approx T_2$ è omissso).

La funzione di distribuzione delle molecole diffuse dalla parete dipende dalla loro interazione con la parete. Si dice che si ha un *adattamento totale* se le molecole riflesse da ogni elemento della superficie del corpo hanno (indipendentemente dal valore e dalla direzione della loro velocità prima dell'urto) la stessa distribuzione che avrebbero avuto le molecole in un fascio uscente da un piccolo foro nel recipiente con gas a temperatura uguale a quella del corpo. In altre parole, per adattamento totale il gas diffuso dalla parete entra in equilibrio termico con quest'ultima. Ha senso confrontare il valore dei coefficienti nella (15,4) con i valori per adattamento totale. In particolare, lo scambio di energia tra le molecole del gas e la parete solida è caratterizzato generalmente dal coefficiente di adattamento definito come rapporto α/α_0 (dove α_0 corrisponde all'adattamento totale). Nei casi reali l'adattamento totale, in ge-

nerale, è irrealizzabile e il coefficiente di adattamento è minore dell'unità.

È facile vedere che il valore α_0 è effettivamente il più grande possibile con le seguenti considerazioni. Esaminiamo l'entropia S nella (15,5) da un altro punto di vista: non come l'entropia totale del gas e del corpo assieme, bensì come l'entropia del corpo e soltanto delle molecole del gas che durante il tempo Δt cadono sulla superficie del corpo. Per questo sistema la riflessione delle molecole con adattamento totale significa la transizione nello stato di equilibrio completo, in modo che l'entropia assume il valore massimo possibile. Rispettivamente sarà la massima possibile anche la variazione dell'entropia, $\Delta S = \dot{S} \Delta t$, che accompagna questa transizione ¹⁾. In altre parole, per adattamento totale la forma quadratica (9,3) deve essere massima, qualunque siano i valori assegnati delle grandezze X_a (cioè di τ , V_n , V_t). Denotando con l'indice zero i valori corrispondenti dei coefficienti γ_{ab} , scriviamo questa condizione nella forma

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{T^2} \tau^2 + \frac{2(\beta_0 - \beta)}{T^2} \tau V_n + \frac{\delta_0 - \delta}{T} V_n^2 + \frac{\theta_0 - \theta}{T} V_t^2 > 0.$$

Di qui derivano le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> \alpha, \quad \delta_0 > \delta, \quad \theta_0 > \theta, \\ T(\alpha_0 - \alpha)(\delta_0 - \delta) &> (\beta_0 - \beta)^2. \end{aligned} \quad (15,10)$$

Consideriamo la fuoriuscita di un gas fortemente rarefatto da un piccolo foro (di dimensioni lineari L). Nel caso limite $l/L \gg 1$ questo processo acquista un carattere assai semplice. Le molecole abbandoneranno il recipiente indipendentemente l'una dall'altra, formando un fascio molecolare in cui ciascuna molecola si muove con la stessa velocità con la quale si è avvicinata al foro. Il numero di molecole uscenti in un secondo dal foro coincide con il numero di urti che le molecole del gas avrebbero avuto durante questo tempo con un'area uguale all'area s del foro. Il numero di urti riferito all'unità di superficie della parete è $P(2\pi mT)^{-1/2}$, dove P è la pressione del gas, m la massa della molecola (si veda V , § 39). Quindi, la quantità (massa) di gas uscente in un secondo è

$$Q = sP \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}. \quad (15,11)$$

Se due recipienti di gas sono congiunti da un foro, allora nel caso $l \ll L$, in equilibrio meccanico, le pressioni P_1 e P_2 dei gas in entrambi i recipienti saranno le stesse, a prescindere dai valori delle

¹⁾ In queste considerazioni è importante che il corpo (che serve da « recipiente termico ») possa essere supposto in stato di equilibrio durante tutto il processo e che l'entropia del gas perfetto dipenda soltanto dalla legge di distribuzione delle sue molecole, ma non dalla legge della loro interazione reciproca.

loro temperature T_1 e T_2 . Se, invece, $l \gg L$, allora l'uguaglianza dei numeri di molecole, che passano attraverso il foro da un recipiente all'altro nei due sensi, costituirà la condizione di equilibrio meccanico. Secondo la formula (15,11) ciò conduce all'uguaglianza

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}. \quad (15,12)$$

Quindi, le pressioni dei gas rarefatti nei due recipienti comunicanti saranno diverse e, inoltre, staranno l'una all'altra come le radici delle temperature (*effetto Knudsen*).

Finora abbiamo trattato dei fenomeni che si verificano in una massa notevole di gas fortemente rarefatto che di per sé si trova in equilibrio. Soffermiamoci brevemente sui fenomeni di altro carattere, in cui il gas stesso non si trova più in equilibrio. Tale è, ad esempio, la trasmissione di calore tra due lamine solide riscaldate a temperature diverse e immerse in un gas rarefatto, quando la distanza tra queste lamine è piccola rispetto alla lunghezza del cammino libero. Le molecole che si muovono nello spazio tra le lamine praticamente non si urtano l'una con l'altra e, riflesse da una lamina, si muovono liberamente fino ad urtare l'altra lamina. Per diffusione da parte della lamina più calda le molecole ricevono una certa energia e in seguito, urtando contro la lamina meno calda, le trasmettono parte della loro energia. In questo caso il meccanismo di trasmissione del calore differisce sostanzialmente da quello dell'ordinaria conduzione di calore in un gas non rarefatto. Lo si può caratterizzare con il coefficiente di trasmissione termica κ definito in modo tale (in analogia con il coefficiente ordinario di conducibilità termica) che si abbia

$$q = \frac{\kappa(T_2 - T_1)}{L}, \quad (15,13)$$

dove q è la quantità di calore trasmesso (riferita all'unità di superficie delle lamine nell'unità di tempo), T_1 e T_2 le temperature delle lamine e L la distanza che le separa. Il coefficiente κ si può valutare come ordine di grandezza con la formula (7,10). Poiché al posto degli urti tra le molecole, ora abbiamo a che fare con gli urti diretti con le lamine, alla lunghezza del cammino libero l si deve sostituire la distanza L tra le lamine. Abbiamo così

$$\kappa \sim L \bar{v} N \sim \frac{PL}{\sqrt{mT}}. \quad (15,14)$$

Il coefficiente di trasmissione termica in un gas fortemente rarefatto è proporzionale alla pressione, contrariamente alla conducibilità termica di un gas non rarefatto, indipendente dalla pressione. Sottolineiamo, tuttavia, che ora κ non è più caratteristica del solo gas:

dipende anche dalle condizioni concrete del problema (dalla distanza L tra le lamine).

Un fenomeno analogo è rappresentato dalla « viscosità » di un gas fortemente rarefatto, che si manifesta, ad esempio, per il moto relativo di due lamine immerse (dove di nuovo $L \ll l$). Il coefficiente di viscosità η si deve definire ora in modo tale che si abbia

$$F = \eta V/L, \quad (15,15)$$

dove F è la forza d'attrito agente sulla lamina in moto (riferita all'unità di superficie), e V la velocità di una lamina rispetto all'altra. Scrivendo nella (8,11) la distanza L al posto della lunghezza del cammino libero l , otteniamo

$$\eta \sim m \bar{v} N L \sim L P \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad (15,16)$$

vale a dire che la viscosità di un gas rarefatto è anch'essa proporzionale alla pressione.

PROBLEMI

1. All'istante iniziale $t = 0$ un gas occupa il semispazio $x < 0$. Trascurando gli urti definire la distribuzione di densità negli istanti successivi.

Soluzione. Trascurando gli urti l'equazione cinetica si riduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

la cui soluzione generale è $f = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$. Tenendo conto della condizione iniziale posta, in questo caso abbiamo

$$f = f_0(\mathbf{v}) \text{ per } v_x > x/t, \quad f = 0 \text{ per } v_x < x/t,$$

dove f_0 è la distribuzione di Maxwell. La densità del gas è

$$N(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\mathbf{v}) m^3 dv_x dv_y dv_z = \frac{N_0}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{t} \sqrt{\frac{m}{2T}} \right) \right],$$

dove

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-y^2} dy,$$

e N_0 la densità iniziale. Poiché abbiamo trascurato gli urti, le formule sono valide di fatto soltanto nella regione $|x| \ll l$.

2. Determinare la forza agente su una pallina di raggio R che si muove con velocità V in un gas rarefatto.

Soluzione. La forza totale di resistenza al moto della pallina vale

$$F = -\frac{4\pi}{3} V R^2 (\delta + 2\theta).$$

3. Determinare la velocità, con cui si muoverà in un gas rarefatto un disco piano senza peso, i cui lati sono riscaldati alle temperature T_1 e T_2 .

Soluzione. La velocità V del disco (nella direzione perpendicolare al suo piano) sarà definita dalla condizione di uguaglianza a zero della somma delle forze agenti sui suoi due lati. Il disco si muoverà con il lato meno caldo posto avanti (si suppone $T_2 > T_1$) a velocità

$$V = \frac{\gamma}{2\delta} (T_2 - T_1).$$

4. Calcolare il valore α_0 del coefficiente α nel caso di adattamento totale.

Soluzione. La quantità di energia apportata nell'unità di tempo dalle molecole che urtano con l'unità di superficie del corpo è $\int f_2 v_x \varepsilon d\Gamma$, dove f_2 è la funzione di distribuzione di Boltzmann con la temperatura del gas T_2 (ε è l'energia di una molecola e l'asse x è perpendicolare alla superficie del corpo). La quantità di energia portata via dalle stesse molecole si ricava da qui (per adattamento totale) con la semplice sostituzione della temperatura T_2 con la temperatura T_1 . Il flusso di calore è

$$q = \int (f_2 - f_1) \varepsilon v_x d\Gamma$$

(si integra rispetto a v_x nei limiti da 0 a ∞). Scriviamo l'energia di una molecola nella forma $\varepsilon = \varepsilon_{\text{int}} + mv^2/2$, dove ε_{int} è l'energia interna. Il calcolo fornisce il seguente valore per ciascuno degli integrali:

$$\int f \varepsilon v_x d\Gamma = v (\bar{\varepsilon}_{\text{int}} + 2T) = v \left(\bar{\varepsilon} + \frac{T}{2} \right) = v T \left(c_v + \frac{1}{2} \right),$$

dove $\bar{\varepsilon} = c_v T$ è l'energia media della molecola e $v = P/\sqrt{2\pi m T}$ il numero di molecole che urtano in un secondo con 1 cm^2 di superficie. Il calore q è uguale alla differenza di energie delle molecole che arrivano e che vanno in numero uguale, vale a dire per v uguale. Come risultato per il coefficiente nella relazione $q = \alpha (T_2 - T_1)$ troviamo il valore

$$\alpha_0 = \frac{P}{\sqrt{2\pi m T}} \left(c_v + \frac{1}{2} \right)$$

(la differenza $T_2 - T_1$ è supposta piccola in modo che poniamo $T_1 \approx T_2 = T$).

5. Risolvere il problema 4 per i coefficienti β e γ .

Soluzione. La componente normale della quantità di moto portata dalle molecole che urtano in un secondo con 1 cm^2 di superficie è uguale alla metà della pressione del gas. Esprimendo la pressione in funzione di v abbiamo

$$\frac{P}{2} = v \sqrt{\frac{\pi m T}{2}}.$$

Calcolando la differenza tra i valori di questa grandezza per le temperature T_1 , T_2 e per lo stesso v , otteniamo la forza supplementare F_n dovuta alla differenza di temperature. Supponendo $T_2 - T_1$ piccola troviamo che

$$\gamma_0 = P/4T.$$

Per il coefficiente β abbiamo secondo la (15,6) $\beta_0 = P/4$.

6. Risolvere il problema 4 per i coefficienti δ e θ .

Soluzione. Consideriamo un sistema di coordinate in cui il corpo è a riposo e il gas si muove con velocità V ; l'asse x è diretto lungo la normale alla superficie del corpo e il piano xy è scelto in modo tale che V si trovi in esso. La funzione di distribuzione in questo sistema è

$$f = \text{costante} \cdot \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_{\text{int}}}{T} - \frac{m}{2T} [(v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + v_z^2] \right\}.$$

Per quanto riguarda le molecole riflesse, per adattamento totale esse hanno funzione di distribuzione con $V = 0$; τ è supposto nullo.

Per calcolare la forza tangente F_y poniamo $V_x = 0$. La componente totale y della quantità di moto portata dalle molecole incidenti sulla superficie è

$$\int mv_y v_x f d\Gamma = mV_y \int v_x f d\Gamma = mV_y v$$

(si integra ovunque rispetto a v_x nei limiti da 0 a ∞). La componente y portata da queste molecole scompare. Quindi, $F_y = mvV_y$ in modo che

$$\theta_0 = vm = P \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}.$$

Supponiamo ora che $V_x \neq 0$ e $V_y = 0$. Abbiamo, a meno dei termini del primo ordine in V_x

$$f = f_0 + V_x \frac{mv_x}{T} f_0,$$

dove f_0 è la funzione di distribuzione con $V = 0$. Il numero di molecole che urtano in un secondo con 1 cm^2 di superficie è

$$v = \int f v_x d\Gamma = \frac{P}{\sqrt{2\pi m T}} + \frac{PV_x}{2T}.$$

La componente x della quantità di moto portata da queste molecole vale

$$\int mv_x^2 f d\Gamma = \frac{P}{2} + PV_x \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

Le molecole riflesse dalla parete hanno funzione di distribuzione con $V_x = 0$ normalizzata in modo tale che l'integrale $\int f v_x d\Gamma$ sia uguale al numero v di molecole incidenti definito sopra. La componente x della quantità di moto trasportata via da queste molecole è uguale a

$$-\frac{v}{2} \sqrt{2\pi m T} = -\frac{P}{2} - \frac{PV_x}{2} \sqrt{\frac{\pi m}{2T}}.$$

La forza normale aggiunta alla pressione è $F_x = \delta_0 V_x$, dove

$$\delta_0 = P \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\theta_0}{2} (4 + \pi).$$

7. Supponendo che si abbia adattamento totale, determinare la temperatura di una lamina che si muove con velocità V in un gas rarefatto nel suo piano.

Soluzione. Agendo come nel problema 4, otteniamo per l'energia apportata

$$v \left(c_v T_2 + \frac{T_2}{2} + \frac{mV^2}{2} \right),$$

e per l'energia portata via

$$vT_1 \left(c_v + \frac{1}{2} \right).$$

Uguagliando questi flussi abbiamo

$$T_1 - T_2 = \frac{mV^2}{2c_v + 1}.$$

8. Determinare la quantità di gas che passa nell'unità di tempo attraverso la sezione trasversale di un tubo cilindrico (di raggio R) sotto l'influsso del

gradiente della pressione e della temperatura. Il gas è talmente rarefatto che la lunghezza del cammino libero $l \gg R$ ¹⁾. Per urti delle molecole contro le pareti si ha adattamento totale.

Soluzione. La distribuzione delle molecole rispetto alle velocità per riflessione da parte della parete, nel caso di adattamento totale, ha la forma $v_x f d^3p$, dove f è la funzione di distribuzione di Maxwell e l'asse x è perpendicolare alla superficie. Indicando con ϑ l'angolo tra le velocità delle molecole e l'asse x , troviamo che la distribuzione delle molecole riflesse rispetto alla direzione del loro moto (indipendentemente dal valore assoluto della velocità) ha la forma

$$\frac{v}{\pi} \cos \vartheta d\vartheta$$

(questa funzione è normalizzata in modo tale che il suo integrale sugli angoli solidi da un lato del piano sia uguale a v).

Facciamo coincidere l'asse z con l'asse del tubo e prendiamo l'origine delle coordinate nella sezione in esame. Attraverso questa sezione passano le molecole dopo la riflessione sui diversi tratti del tubo. Tra le molecole diffuse da un elemento df di superficie della parete a una distanza z , passeranno attraverso la sezione considerata quelle riflesse lungo le direzioni, che si trovano all'interno dell'angolo solido sotto il quale si vede questa sezione dal punto considerato sulla superficie del tubo, ossia $df \cdot v \int \cos \vartheta d\vartheta / \pi$ molecole (l'integrazione è estesa al detto intervallo di angoli).

È evidente che questo integrale ha un medesimo valore per tutti i punti che si trovano alla stessa distanza z dalla sezione in esame. Perciò il numero totale di molecole passanti (in un secondo) attraverso questa sezione si ottiene sostituendo df con l'elemento anulare di superficie $2\pi R dz$ ed estendendo l'integrazione a tutta la lunghezza del tubo; moltiplicando ancora per la massa m della molecola otteniamo il passaggio di massa di gas attraverso la sezione del tubo, cioè

$$Q = 2mR \int v \left(\int \cos \vartheta d\vartheta \right) dz.$$

Essendo funzione della pressione e della temperatura il numero v varia lungo il tubo. Se i gradienti della pressione e della temperatura per tutta la lunghezza non sono troppo grandi, si può scrivere

$$v(z) = v(0) + z \frac{dv}{dz} \Big|_{z=0}.$$

L'integrale con $v(0)$ evidentemente si annulla in modo che

$$Q = 2\pi R \frac{dv}{dz} \Big|_{z=0} \int \int z \cos \vartheta d\vartheta dz.$$

Per eseguire l'integrazione introduciamo nel piano della sezione del tubo in esame le coordinate r e φ , dove r è la distanza del punto variabile A' da un certo punto O sulla circonferenza della sezione e φ l'angolo tra il segmento OA' e il raggio della sezione (fig. 3). Una molecola riflessa dalla parete nel punto A (giacente sulla stessa generatrice del punto O) e che passa in seguito per il punto A' deve avere la velocità sotto un angolo ϑ , con la normale alla superficie del tubo nel punto A , per il quale sia

$$\cos \vartheta = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

¹⁾ Il flusso di gas a queste condizioni si chiama *flusso molecolare libero*.

L'elemento di angolo solido si può scrivere nella forma

$$d\omega = \frac{r \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

(proiettiamo l'area $r \, dr \, d\varphi$ sul piano perpendicolare alla retta AA' e dividiamo per il quadrato della lunghezza di questo segmento). L'integrazione estesa alla regione

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

dà

$$Q = \frac{8\pi R^3}{3} \frac{dv}{dz}.$$

Infine, sostituendo $v = P/\sqrt{2\pi m T}$ otteniamo

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3L} \sqrt{2\pi m} \left(\frac{P_2}{\sqrt{T_2}} - \frac{P_1}{\sqrt{T_1}} \right),$$

dove tra parentesi c'è la differenza dei valori della grandezza P/\sqrt{T} sulla lunghezza L del tubo (la sostituzione della derivata con la differenza è possibile per la costanza di Q , e quindi, anche di questa derivata lungo il tubo).

9. Nell'ipotesi di adattamento totale trovare la forza d'attrito tra due piani solidi (distanti $L \ll l$) che si muovono l'uno relativamente all'altro con velocità V ; i piani hanno le temperature T_1 e T_2 .

Soluzione. Supponiamo che il piano 1 (a temperatura T_1) sia a riposo e il piano 2 si muova con velocità V lungol'asse x ; l'asse y è diretto dal primo piano al secondo. Le molecole con velocità $v_y > 0$ e $v_y < 0$ sono riflesse dai piani 1 e 2, rispettivamente; per adattamento totale le loro funzioni di distribuzione sono

$$f = \frac{2N_1}{(2\pi m T_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_1}\right) \quad \text{per } v_y > 0,$$

$$f = \frac{2N_2}{(2\pi m T_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m(v-V)^2}{2T_2}\right) \quad \text{per } v_y < 0,$$

dove N_1 e N_2 sono le rispettive densità del numero di particelle; la densità totale è $N = N_1 + N_2$. La condizione di assenza di flusso totale nella direzione dell'asse y dà

$$N_1 \sqrt{T_1} = N_2 \sqrt{T_2}.$$

Su ciascuno dei piani agiscono la pressione $P = N_1 T_1 + N_2 T_2$ e la forza d'attrito (riferita all'unità d'area)

$$F_2 = -F_1 = mV \int_{v_y > 0} v_y f \, d^3p = VN_2 \sqrt{\frac{2mT_2}{\pi}} = VN \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \frac{(T_1 T_2)^{1/2}}{T_1^{1/2} + T_2^{1/2}}.$$

Se $T_1 = T_2 = T$, allora

$$F_2 = -F_1 = VP \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}$$

in accordo con le formule (15,15) e (15,16).

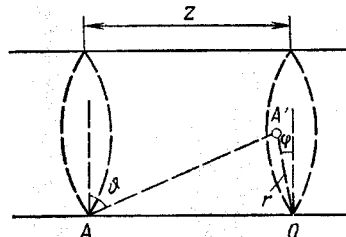


Fig. 3

10. Supponendo l'adattamento totale definire il coefficiente di trasmissione termica κ tra due lamine a temperature T_1 e T_2 vicine.

Soluzione. Per adattamento totale le molecole incidenti sulla lamina 1 hanno distribuzione uniforme con temperatura T_2 . Perciò il flusso di energia dalla lamina 1 alla lamina 2 è $q = \alpha_0 (T_2 - T_1)$. Prendendo α_0 dal problema 4 e definendo κ mediante la (15,13), otteniamo

$$\kappa = \alpha_0 L = \frac{PL}{\sqrt{2\pi m T}} \left(c_v + \frac{1}{2} \right)$$

in accordo con la stima (15,14).

11. Determinare la densità del gas sull'asse dietro un disco circolare di raggio $R \ll l$ che si muove in un gas con velocità $-V$, grande rispetto alla velocità termica media degli atomi v_T .

Soluzione. Per $V \gg v_T$ le particelle riflesse dalla superficie posteriore del disco sono inessenziali (tranne una regione ristretta vicino a questa superficie; si veda più avanti). Il fatto è che il disco « ombreggia » il flusso incidente.

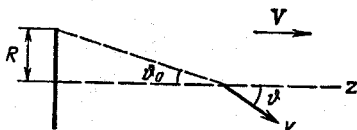


Fig. 4

In un sistema di coordinate in cui il disco è a riposo (e il gas si muove con la velocità V), in assenza del disco la funzione di distribuzione sarebbe uguale a

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{N_0}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T} \right\}.$$

In presenza del disco la densità del numero di particelle sull'asse z (fig. 4) è

$$N(z) = 2\pi \int_0^\infty \int_{\theta_0}^\pi f_0(\mathbf{v}) p^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dp,$$

dove ϑ è l'angolo tra \mathbf{v} e l'asse z e θ_0 l'angolo sotto il quale si vede il raggio del disco dal punto di osservazione sull'asse z ($\tan \theta_0 = R/z$; le particelle con $\vartheta < \theta_0$ sono « ombreggiate »). Tenendo conto della condizione $V \gg v_T$ l'integrazione dà

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{N_0}{V} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{m}{2T} [(v - V \cos \theta_0)^2 + V^2 \sin^2 \theta_0] \right\} v \, dv \approx \\ &\approx N_0 \cos \theta_0 \exp \left\{ -\frac{mV^2}{2T} \sin^2 \theta_0 \right\} = N_0 \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \exp \left\{ -\frac{mV^2}{2T} \frac{R^2}{R^2 + z^2} \right\}, \end{aligned}$$

dove N_0 è la densità del gas lontano dal disco. L'integrazione rispetto a dp è eseguita nell'ipotesi che $\cos \theta_0 \gg v_T/V$ (si può mostrare che questa stessa disuguaglianza esprime la possibilità di trascurare le particelle riflesse dalla parete posteriore).

§ 16. Deduzione dinamica dell'equazione cinetica

Sebbene la deduzione dell'equazione cinetica data al § 3 sia soddisfacente dal punto di vista fisico, presenta notevole interesse un metodo che consente di ottenere analiticamente questa equazione dall'apparato matematico della teoria, cioè dalle equazioni del moto delle particelle di gas; questa deduzione è stata fatta da *N. N. Bogoljubov* (1946). L'importanza di questo metodo consiste anche nel fatto che esso fornisce un procedimento regolare che permette, in linea teorica, di ottenere non soltanto l'equazione di Boltzmann ma anche le correzioni ad essa, vale a dire i termini infinitesimi di ordine superiore rispetto al « parametro di gassosità », cioè rispetto al rapporto $(d/\bar{r})^3$, dove d indica le dimensioni molecolari (il raggio d'azione delle forze molecolari) e \bar{r} è la distanza media tra le molecole. Diamo sotto la deduzione che si riferisce a un gas monoatomico nei limiti puramente classici, cioè per l'ipotesi che sia il moto libero, sia i processi d'urto tra le particelle del gas siano descritti dalla meccanica classica.

Il punto di partenza del metodo è il teorema di Liouville per la funzione di distribuzione di un gas nel suo insieme come di un sistema di \mathcal{N} particelle. Indichiamo questa funzione (nello spazio delle fasi a $6\mathcal{N}$ dimensioni) con il simbolo $f^{(\mathcal{N})}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{\mathcal{N}})$, dove le τ_a esprimono l'insieme delle coordinate e delle componenti della quantità di moto dell' a -esima particella: $\tau_a = (\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a)$. Questa funzione verrà supposta normalizzata a uno:

$$\int f^{(\mathcal{N})}(t, \tau_1, \dots, \tau_{\mathcal{N}}) d\tau_1 \dots d\tau_{\mathcal{N}} = 1, \quad d\tau_a = d^3x_a d^3p_a.$$

La funzione di distribuzione « di una sola particella », che figura nell'equazione di Boltzmann, si ottiene integrando la funzione $f^{(\mathcal{N})}$ rispetto a tutti i $d\tau_a$, ad eccezione di

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \int f^{(\mathcal{N})} d\tau_2 \dots d\tau_{\mathcal{N}}; \quad (16,1)$$

la funzione $f^{(1)}$ è normalizzata anch'essa ad uno. Conserviamo invece la notazione f (senza indice) per la funzione di distribuzione normalizzata al numero totale di particelle: $f = \mathcal{N} f^{(1)}$.

Ricordiamo (si veda V, § 3) che il teorema di Liouville nasce come conseguenza dell'equazione di continuità nello spazio delle fasi, cui deve soddisfare la funzione di distribuzione di un sistema chiuso

$$\frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} (f^{(\mathcal{N})} \dot{\mathbf{r}}_a) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_a} (f^{(\mathcal{N})} \dot{\mathbf{p}}_a) \right\} = 0. \quad (16,2)$$

Mediante le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_a}, \quad \dot{\mathbf{p}}_a = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} \quad (16,3)$$

ricaviamo l'uguaglianza

$$\frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{M}} \left\{ \frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial \mathbf{r}_a} \dot{\mathbf{r}}_a + \frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial \mathbf{p}_a} \dot{\mathbf{p}}_a \right\} = \frac{df(\mathcal{M})}{dt} = 0, \quad (16,4)$$

dove $\dot{\mathbf{r}}_a \equiv \mathbf{v}_a$ e $\dot{\mathbf{p}}_a$ sono supposti espressi in funzione di τ_1, τ_2, \dots in accordo con le equazioni (16,3); l'uguaglianza (16,4) costituisce il contenuto del teorema di Liouville.

Rappresentiamo l'hamiltoniana di un gas monoatomico nella forma

$$H = \sum_{a \leq \mathcal{M}} \frac{p_a^2}{2m} + \sum_{b < a \leq \mathcal{M}} U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|). \quad (16,5)$$

Qui è supposto che non esista campo esterno e che l'interazione reciproca tra le particelle del gas si riduca alla somma delle loro interazioni a due a due ¹⁾. L'equazione (16,4) con questa hamiltoniana diventa

$$\frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{M}} \left\{ \frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{v}_a - \frac{\partial f(\mathcal{M})}{\partial \mathbf{p}_a} \sum_{b < a} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \right\} = 0, \quad (16,6)$$

dove U_{ab} ($a \neq b$) indica $U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$.

Integriamo ora questa equazione rispetto a $d\tau_2 \dots d\tau_{\mathcal{M}}$. In seguito a questa integrazione fra tutti i termini sotto il segno di somma nella (16,6) resteranno soltanto quelli contenenti le derivate rispetto a \mathbf{p}_1 o \mathbf{r}_1 ; gli integrali degli altri termini si trasformano in integrali estesi a superfici indefinitamente lontane nello spazio delle quantità di moto o delle coordinate e si annullano. Otteniamo così

$$\frac{\partial f^{(1)}(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(1)}(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathcal{M} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)}{\partial \mathbf{p}_1} d\tau_2, \quad (16,7)$$

dove $f^{(2)}$ è la funzione di distribuzione di due particelle normalizzata a uno, cioè l'integrale

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \int f(\mathcal{M}) d\tau_3 \dots d\tau_{\mathcal{M}} \quad (16,8)$$

¹⁾ L'ultima ipotesi ha carattere di modello. Sottolineiamo tuttavia che essa in generale non incide sul risultato della prima approssimazione (corrispondente all'equazione di Boltzmann); in questa approssimazione figurano unicamente gli urti tra le coppie di particelle cui le altre interazioni (non a coppie) non partecipano.

(il fattore \mathcal{N} nella (16,7) tiene conto dei termini che differiscono soltanto per la notazione delle variabili di integrazione; a rigore, il numero di questi termini è $\mathcal{N} - 1$, ma poiché la grandezza \mathcal{N} è molto grande, si ha $\mathcal{N} - 1 \approx \mathcal{N}$).

Analogamente, integrando la (16,6) rispetto a $d\tau_3 \dots d\tau_{\mathcal{N}}$, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} = \\ = \mathcal{N} \int \left[\frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \right] d\tau_3, \quad (16,9)$$

dove $f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ è la funzione di distribuzione di tre particelle.

Procedendo in questo modo otterremmo praticamente una catena illimitata (essendo \mathcal{N} molto grande!) di equazioni, ognuna delle quali esprime $f^{(n)}$ in funzione di $f^{(n+1)}$. Tutte queste equazioni sono esatte, nel senso che per la loro deduzione non è stata avanzata nessuna ipotesi legata alla rarefazione del gas. Ma per ottenere un sistema chiuso di equazioni si deve interrompere in qualche punto questa catena, ricorrendo alla condizione di rarefazione del gas. In particolare, alla prima approssimazione del metodo corrisponde l'interruzione della catena già alla prima equazione (l'equazione (16,7)) in cui la funzione di due particelle $f^{(2)}$ verrà espressa approssimativamente mediante $f^{(1)}$. Quest'ultima operazione si effettua tenendo conto della rarefazione del gas con l'ausilio dell'equazione (16,9).

Ricorrendo a questa equazione mostriamo innanzitutto che l'integrale al secondo membro è piccolo. Infatti, la funzione $U(r)$ è sensibilmente diversa da zero soltanto nel raggio d'azione delle forze, cioè per $r \leq d$. Perciò in entrambe le parti dell'integrale nella (16,9) l'integrazione rispetto alle coordinate è estesa di fatto alle sole regioni $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| \leq d$ o $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \leq d$, cioè al volume $\sim d^3$. Osservando anche che integrando su tutto il volume del gas $\mathcal{V} \sim \mathcal{N} \bar{r}^3$ si avrebbe $\int f^{(3)} d\tau_3 = f^{(2)}$, otteniamo la seguente stima:

$$\mathcal{N} \int \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} d\tau_3 \sim \frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{d^3}{\bar{r}^3}.$$

Ne risulta che il secondo membro dell'equazione (16,9) è piccolo nel rapporto $(d/\bar{r})^3$ rispetto ai termini contenenti $\partial U/\partial \mathbf{r}$ a primo membro dell'equazione e perciò lo si può trascurare. L'insieme dei termini a primo membro dell'equazione rappresenta la derivata totale $df^{(2)}/dt$, in cui $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ sono considerati funzioni del tempo soddisfacenti le equazioni del moto (16,3) con l'hamiltoniana del problema dei due corpi

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Abbiamo così

$$\frac{d}{dt} f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = 0. \quad (16,10)$$

Finora tutte le trasformazioni delle equazioni hanno avuto carattere puramente meccanico. Per la deduzione dell'equazione cinetica è necessario, ovviamente, avanzare anche un'ipotesi di carattere statistico. Essa può essere formulata affermando l'indipendenza statistica di ogni coppia di particelle collidenti (infatti questa ipotesi è stata sottintesa nella deduzione dell'equazione cinetica al § 3, quando la probabilità d'urto è stata scritta nella forma (2,1) proporzionale al prodotto ff_1). Nel metodo qui esposto tale affermazione serve come condizione iniziale per l'equazione differenziale (16,10). È proprio essa a portare l'asimmetria rispetto alle due direzioni del tempo, per cui dalle equazioni meccaniche invarianti per inversione del tempo, si ottiene un'equazione cinetica irreversibile. La correlazione tra le posizioni e le quantità di moto delle particelle del gas nasce soltanto in seguito ai loro urti e si estende alle distanze $\sim d$. Quindi, l'ipotesi sull'indipendenza statistica delle particelle collidenti serve anche come fonte di restrizioni di principio per le distanze e gli intervalli di tempo ammissibili dall'equazione cinetica, di cui abbiamo già parlato al § 3.

Sia t_0 un istante precedente all'urto, quando due particelle si trovano ancora lontane l'una dall'altra ($|\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}| \gg d$, dove l'indice 0 distingue i valori delle grandezze in questo istante). L'indipendenza statistica delle particelle collidenti significa che all'istante t_0 la funzione di distribuzione delle due particelle si scinde nel prodotto delle due funzioni $f^{(1)}$. Perciò l'integrazione dell'equazione (16,10) da t_0 a t dà

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = f^{(1)}(t_0, \tau_{10}) f^{(1)}(t_0, \tau_{20}). \quad (16,11)$$

Qui $\tau_{10} = (\mathbf{r}_{10}, \mathbf{p}_{10})$ e $\tau_{20} = (\mathbf{r}_{20}, \mathbf{p}_{20})$ devono essere intesi come i valori delle coordinate e delle quantità di moto che devono avere le particelle all'istante t_0 per ottenere all'istante t i valori richiesti $\tau_1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ e $\tau_2 = (\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$; in questo senso τ_{10}, τ_{20} sono funzioni di τ_1, τ_2 e di $t - t_0$ (inoltre, da $t - t_0$ dipendono soltanto \mathbf{r}_{10} e \mathbf{r}_{20} , mentre \mathbf{p}_{10} e \mathbf{p}_{20} riferendosi a particelle che si muovono liberamente prima dell'urto sono indipendenti da $t - t_0$).

Torniamo all'equazione (16,7), la futura equazione cinetica. Il suo primo membro ha già la forma richiesta; ci interesserà ora l'integrale al suo secondo membro, che in fin dei conti deve trasformarsi nell'integrale degli urti dell'equazione di Boltzmann. Portando in questo integrale $f^{(2)}$ dalla (16,11) e passando in ambedue i membri dell'equazione dalla funzione $f^{(1)}$ a quella $f = \mathcal{N} f^{(1)}$, scriviamo

$$\frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \text{St } f,$$

dove

$$\text{St } f = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{f(t_0, \mathbf{r}_{10}) f(t_0, \mathbf{r}_{20})\} d\mathbf{r}_2. \quad (16,12)$$

Nell'integrale (16,12) è importante la sola regione $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim d$ in cui si produce l'urto. Ma in questa regione si può trascurare (nella prima approssimazione considerata!) la dipendenza della funzione f dalle coordinate; questa funzione varia sensibilmente soltanto a distanze L (dimensioni caratteristiche del problema) superiori in ogni caso a d . Non cambieremo perciò la forma definitiva dell'integrale degli urti se considereremo il caso di omogeneità spaziale (per rendere più semplici i ragionamenti e la scrittura delle formule), supponendo cioè che la funzione f non dipenda in generale dalle coordinate. Notiamo subito che in questo caso nelle funzioni $f(t_0, \mathbf{p}_{10})$, $f(t_0, \mathbf{p}_{20})$ scompare anche la dipendenza esplicita dal tempo (attraverso $\mathbf{r}_{10}(t)$ e $\mathbf{r}_{20}(t)$).

Trasformiamo l'espressione integranda nella (16,12) tenendo conto del fatto che l'espressione tra parentesi graffe è un integrale del moto (come tale essa è comparsa nella (16,11); indipendentemente da ciò, è evidente che \mathbf{p}_{10} e \mathbf{p}_{20} , come valori delle quantità di moto all'istante fissato t_0 , sono già, per definizione, integrali del moto). Tenendo anche conto della suindicata assenza in essi di una dipendenza esplicita dal tempo t , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20}) = \\ = \left(\mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20}) = 0. \end{aligned} \quad (16,13)$$

Di qui esprimiamo la derivata rispetto a \mathbf{p}_1 in funzione delle derivate rispetto a \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{p}_2 e sostituiamo nella (16,12). Il termine con la derivata $\partial/\partial \mathbf{p}_2$ scompare dopo la trasformazione in integrale di superficie nello spazio delle quantità di moto. Dopo di ciò otteniamo

$$\text{St } f(t, \mathbf{p}_1) = \int \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20})\} d^3x d^3p_2, \quad (16,14)$$

dove si è introdotta la velocità relativa delle particelle $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ e si è tenuto conto che \mathbf{p}_{10} e \mathbf{p}_{20} (e anche tutta l'espressione tra parentesi graffe) dipendono da \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 soltanto in funzione della differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Introducendo al posto di $\mathbf{r} = (x, y, z)$ le coordinate cilindriche z, ρ, φ con l'asse z diretto lungo \mathbf{v}_{rel} , osservando che $\mathbf{v}_{\text{rel}} \partial/\partial \mathbf{r} = v_{\text{rel}} \partial/\partial z$ e integrando rispetto a dz , riscriviamo l'espressione (16,14) nella forma ¹⁾

$$\text{St } f(t, \mathbf{p}_1) = \int \{f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20})\} \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} v_{\text{rel}} \rho d\rho d\varphi \cdot d^3p_2. \quad (16,15)$$

¹⁾ I limiti $z = \pm \infty$ vanno intesi come distanze grandi rispetto a d , ma piccole rispetto alla lunghezza del cammino libero l (se i limiti fossero letteralmente infiniti tutta l'espressione si annullerebbe, poiché $f = 0$ all'esterno del

Ricordiamo ora che p_{10} e p_{20} sono gli impulsi iniziali (all'istante t_0) delle particelle, che all'istante finale t hanno impulsi p_1 e p_2 . Se all'istante finale $z = z_1 - z_2 = -\infty$, allora è chiaro che all'istante iniziale le particelle si sono trovate « ancora più lontane » l'una dall'altra, vale a dire che in generale non si è verificato alcun urto; in altre parole, in questo caso gli impulsi iniziali e finali coincidono:

$$p_{10} = p_1, \quad p_{20} = p_2 \quad \text{per } z = -\infty.$$

Se, invece, $z = +\infty$, allora p_{10} e p_{20} fungono da quantità di moto iniziali per l'urto in seguito al quale le particelle acquistano le quantità di moto p_1 e p_2 ; introduciamo per questo caso le notazioni

$$p_{10} = p'_1(\rho), \quad p_{20} = p'_2(\rho) \quad \text{per } z = +\infty.$$

Questi valori sono funzioni della coordinata ρ , che funge da parametro prova degli urti. Quanto al prodotto

$$\rho \, d\rho \, d\varphi = d\sigma$$

esso rappresenta la sezione d'urto classica.

Infine, resta da osservare che la dipendenza esplicita da t_0 delle funzioni $f(t_0, p_{10})$ e $f(t_0, p_{20})$ si può sostituire nell'approssimazione considerata con la stessa dipendenza da t . Infatti, la validità dell'affermazione (16,11) richiede che sia soddisfatta la sola disuguaglianza $t - t_0 \gg d/v$: all'istante t_0 la distanza tra le particelle deve essere grande rispetto al raggio d'azione delle forze d . Ma la differenza $t - t_0$ può essere presa tale che sia soddisfatta anche la condizione $t - t_0 \ll l/v$, dove l è la lunghezza del cammino libero; il rapporto l/v , cioè il tempo del cammino libero, è proprio la grandezza caratteristica che determina i periodi della possibile variazione nel tempo della funzione di distribuzione. In questo caso la variazione della funzione di distribuzione durante il tempo $t - t_0$ sarà relativamente piccola, così da poterla trascurare.

Dopo quanto detto sopra, otteniamo infine l'espressione per l'integrale (16,15)

$$St f(t, p_1) = \int \{f(t, p'_1) f(t, p'_2) - f(t, p_1) f(t, p_2)\} v_{\text{rel}} d\sigma d_3 p_2, \quad (16,16)$$

coincidente con l'integrale degli urti di Boltzmann (3,9).

volume occupato dal gas). Questa situazione è dovuta al fatto che, passando dalla (16,12) alla (16,14), è stata usata l'equazione (16,13) valida finché le particelle in esame non sono soggette a urti successivi.

§ 17. Equazione cinetica tenuto conto degli urti tripli

Per trovare i primi termini correttivi all'equazione di Boltzmann, bisogna tornare ai calcoli effettuati al § 16, in cui sono state trascurate alcune grandezze ed elevare di un ordine la precisione dei calcoli (rispetto al parametro di gassosità). Ciò si riferisce soprattutto all'equazione (16,9) in cui abbiamo ommesso i termini contenenti la correlazione tripla $f^{(3)}$ e, quindi, abbiamo escluso dall'analisi gli urti tripli tra gli atomi. Inoltre, trasformando l'integrale degli urti (16,12) nella forma finale (16,16) abbiamo trascurato la variazione della funzione di distribuzione a distanze $\sim d$ e durante un tempo $\sim d/v$; in tal modo, gli urti doppi sono stati considerati come « locali », verificantisi cioè in un punto. Ora, dobbiamo tener conto di queste due fonti di correzioni, ossia gli urti tripli e la « non localizzazione » degli urti a coppie.

In prima approssimazione la catena di equazioni è stata interrotta alla seconda equazione che lega $f^{(2)}$ a $f^{(3)}$. In seconda approssimazione bisogna arrivare alla terza equazione che lega $f^{(3)}$ a $f^{(4)}$, dove i termini con $f^{(4)}$ si possono omettere (così come abbiamo ommesso nella (16,9) i termini con $f^{(3)}$). Dopo di che l'equazione diventa

$$\frac{d}{dt} f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0, \quad (17.1)$$

analoga all'equazione precedente (16,10) per $f^{(2)}$; le variabili τ_1, τ_2, τ_3 nella (17,1) sono supposte variabili con il tempo secondo le equazioni del moto del problema dei tre corpi (come prima, l'interazione tra le particelle è supposta a coppie¹⁾). Tenendo conto dell'indipendenza statistica delle particelle prima dell'urto la soluzione dell'equazione (17,1) è

$$f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = f^{(1)}(t_0, \tau_{10}) f^{(1)}(t_0, \tau_{20}) f^{(1)}(t_0, \tau_{30}). \quad (17.2)$$

Le grandezze t_0 e τ_{a0} ($a = 1, 2, 3$) hanno lo stesso significato che nella formula (16,11); $\tau_{a0} = \tau_{a0}(t, t_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ esprime i valori delle coordinate e delle quantità di moto che le particelle devono avere all'istante t_0 per trovarsi all'istante t nei punti considerati τ_1, τ_2, τ_3 dello spazio delle fasi. L'unica differenza dalla formula (16, 11) è che ora $\tau_{a0} = (r_{a0}, p_{a0})$ rappresentano i valori iniziali per le coordinate e le quantità di moto del problema dei tre (e non più dei due) corpi, che supporremo, in principio, risolto²⁾.

¹⁾ Contrariamente alla prima approssimazione (si veda la nota a pag. 90), ora questa ipotesi limita un po' la generalità dell'esame in quanto per urti tripli potrebbero verificarsi anche interazioni triple (cioè termini della forma $U(r_3 - r_1, r_3 - r_2)$ nell'hamiltoniana) che non si riducono a quelle a coppie.

²⁾ Di fatto, la soluzione analitica del problema dei tre corpi può essere realizzata, ovviamente, in rarissimi casi (per sferette solide, ad esempio).

Per la scrittura e la trasformazione delle ulteriori formule è opportuno introdurre l'operatore \hat{S}_{123} , la cui azione su una funzione delle variabili τ_1, τ_2, τ_3 (che si riferiscono a tre particelle del problema dei tre corpi) si riduce alla sostituzione di queste variabili come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &\rightarrow \tilde{\mathbf{r}}_a = \mathbf{r}_{a0} + \frac{\mathbf{p}_{a0}}{m} (t - t_0), \\ \mathbf{p}_a &\rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_a = \mathbf{p}_{a0}. \end{aligned} \quad (17,3)$$

Analogamente, l'operatore \hat{S}_{12} eseguirà la stessa sostituzione nelle funzioni delle variabili τ_1, τ_2 che si riferiscono a due particelle nel problema dei due corpi. La proprietà importante della trasformazione (17,3) è che per tempi $t - t_0 \gg d/v$ essa cessa di dipendere dal tempo. Infatti, per tali $t - t_0$ le particelle si trovano lontane l'una dall'altra e si muovono liberamente con le velocità costanti $\mathbf{v}_{a0} = \mathbf{p}_{a0}/m$; inoltre i valori \mathbf{r}_{a0} dipendono dal tempo come costante $-\mathbf{v}_{a0}(t - t_0)$ e la dipendenza temporale nella (17,3) scompare. Osserviamo anche che se le particelle in generale non avessero interazione la trasformazione (17,3) si ridurrebbe a un'identità: per il moto libero (durante tutto il tempo) i secondi membri delle trasformazioni (17,3) coincidono identicamente con i primi membri. Per la stessa ragione se una delle particelle, ad esempio la particella 1, non interagisce con le particelle 2 e 3, allora $\hat{S}_{123} \equiv \hat{S}_{23}$; gli operatori \hat{S}_{12} e \hat{S}_{13} in queste condizioni si riducono all'unità. In virtù di queste proprietà è evidente che l'operatore

$$\hat{G}_{123} = \hat{S}_{123} - \hat{S}_{12} - \hat{S}_{13} - \hat{S}_{23} + 2 \quad (17,4)$$

si annulla se almeno una delle tre particelle non interagisce con le altre due. In altre parole, questo operatore separa dalle funzioni quella parte che è legata all'interazione di tutte e tre le particelle (mentre nel problema dei tre corpi figurano, come casi particolari, anche urti a coppie con moto libero della terza particella).

L'operatore \hat{S}_{123} consente di scrivere la formula (17,2) come segue:

$$f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \hat{S}_{123} \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_3), \quad (17,5)$$

dove

$$\tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau) = f^{(1)}\left(t_0, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0), \mathbf{p}\right) \quad (17,6)$$

(la traslazione dell'argomento \mathbf{r} nella $f^{(1)}$ è stata introdotta per compensare la traslazione eseguita dall'operatore \hat{S}_{123}).

La distribuzione di due particelle $f^{(2)}$ si ottiene integrando la funzione $f^{(3)}$ rispetto alle variabili τ_3 , mentre l'integrazione rispetto

alle variabili τ_2 e τ_3 dà la funzione di distribuzione $f^{(1)}$

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \int f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3, \quad (17,7)$$

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \int f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_3. \quad (17,8)$$

Lo scopo del calcolo ulteriore è di esprimere con la necessaria precisione $f^{(2)}$ in funzione di $f^{(1)}$ partendo da queste due uguaglianze (con $f^{(3)}$ ottenuta dalla (17,5)) mediante l'esclusione di $\tilde{f}^{(1)}$. Ponendo in seguito l'espressione così ottenuta nell'equazione (16,7) (di per sé esatta), otterremo l'equazione cinetica cercata.

Per realizzare questo scopo, trasformiamo prima di tutto l'integrale (17,8), esprimendo nella (17,5) l'operatore \hat{S}_{123} in funzione di \hat{G}_{123} in base alla (17,4). Tenendo conto delle uguaglianze evidenti (in virtù della conservazione del numero totale di molecole)

$$\int \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau) d\tau = \int f^{(1)}(t_0, \tau) d\tau = 1,$$

$$\int \hat{S}_{12} \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 1.$$

otteniamo

$$f^{(1)}(t, \tau_1) =$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) + 2 \int \{(\hat{S}_{12} - 1) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2)\} d\tau_2 + \\ &+ \int \{\hat{G}_{123} \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_2) \tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_3)\} d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (17,9)$$

Questa equazione si può risolvere rispetto a $\tilde{f}^{(1)}$ con il metodo delle approssimazioni successive, tenendo conto che $(\hat{S}_{12} - 1)$ è un infinitesimo del primo ordine e \hat{G}_{123} del secondo ordine (si veda la stima del secondo membro della (16,9)). Nell'approssimazione di ordine zero abbiamo $\tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) = f^{(1)}(t, \tau_1)$. Nelle due approssimazioni successive avremo

$$\tilde{f}^{(1)}(t, t_0, \tau_1) =$$

$$\begin{aligned} &= f^{(1)}(t, \tau_1) - 2 \int \{(\hat{S}_{12} - 1) f^{(1)}(t, \tau_1) f^{(1)}(t, \tau_2)\} d\tau_2 - \\ &- \int \{\hat{G}_{123} - 4(\hat{S}_{12} - 1)(\hat{S}_{13} + \hat{S}_{23} - 2) f^{(1)}(t, \tau_1) f^{(1)}(t, \tau_2) f^{(1)}(t, \tau_3)\} \times \\ &\quad \times d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned}$$

Ora resta da sostituire questa espressione nella (17,5) e dopo nella (17,7), conservando in questo caso i soli infinitesimi di ordine non

superiore al secondo (i termini $\sim (\hat{S}_{12} - 1)^2$ e $\sim \hat{G}_{123}$). Come risultato otteniamo infine

$$f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) = \hat{S}_{12} f^{(1)}(t, \tau_1) f^{(1)}(t, \tau_2) + \int \{ \hat{R}_{123} f^{(1)}(t, \tau_1) f^{(1)}(t, \tau_2) f^{(1)}(t, \tau_3) \} d\tau_3, \quad (17,10)$$

dove

$$\hat{R}_{123} = \hat{S}_{123} - \hat{S}_{12} \hat{S}_{13} - \hat{S}_{12} \hat{S}_{23} + \hat{S}_{12}. \quad (17,11)$$

Sottolineiamo che l'ordine in cui si scrivono gli operatori S nei prodotti è importante. L'operatore $\hat{S}_{12} \hat{S}_{23}$, ad esempio, sostituisce dapprima le variabili $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \rightarrow \tau_1, \tilde{\tau}_2(\tau_2, \tau_3), \tilde{\tau}_3(\tau_2, \tau_3)$, dove le funzioni $\tilde{\tau}_{2,3}(\tau_2, \tau_3)$ sono definite dalle equazioni del moto delle particelle interagenti 2 e 3, e in seguito le variabili τ_1, τ_2, τ_3 vanno soggette alla trasformazione $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \rightarrow \tilde{\tau}_1(\tau_1, \tau_2), \tilde{\tau}_2(\tau_1, \tau_2), \tau_3$, dove ora le funzioni $\tilde{\tau}_{1,2}(\tau_1, \tau_2)$ sono definite dal problema del moto della coppia di particelle interagenti 1 e 2.

Portando ora la (17,10) nella (16,7) e passando ovunque dalle funzioni $f^{(1)}$ alle funzioni $f = \mathcal{N} f^{(1)}$, troviamo l'equazione cinetica nella forma ¹⁾

$$\frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f(t, \tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \text{St}^{(2)} f + \text{St}^{(3)} f, \quad (17,12)$$

dove

$$\text{St}^{(2)} f(t, \tau_1) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{ \hat{S}_{12} f(t, \tau_1) f(t, \tau_2) \} d\tau_2, \quad (17,13)$$

$$\text{St}^{(3)} f(t, \tau_1) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{ \hat{R}_{123} f(t, \tau_1) f(t, \tau_2) f(t, \tau_3) \} d\tau_2 d\tau_3. \quad (17,14)$$

Il primo di questi integrali è quello degli urti doppi e il secondo degli urti tripli. Consideriamone la struttura in modo più particolareggiato.

In ambedue gli integrali nelle espressioni integrande figurano le funzioni f considerate in differenti punti dello spazio. Nell'integrale degli urti doppi si deve esprimere l'effetto di questa « non localizzazione » sotto forma di correzione all'integrale ordinario (di Boltzmann). A tal fine sviluppiamo in esso le funzioni f lentamente variabili (a distanze $\sim d$) in potenze della differenza $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

¹⁾ La via per la deduzione delle correzioni all'equazione di Boltzmann è stata indicata da N.N. Bogoljubov (1946). La riduzione dei termini correttivi alla forma definitiva è stata realizzata originariamente da M.S. Green (1956).

Poiché queste funzioni si trovano nell'espressione integranda sotto il segno dell'operatore \hat{S}_{12} , consideriamo dapprima le grandezze $\hat{S}_{12}\mathbf{r}_1$ e $\hat{S}_{12}\mathbf{r}_2$, nelle quali questo operatore trasforma le variabili \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Il centro d'inerzia delle due particelle $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ si muove uniformemente (nel problema dei due corpi); perciò l'operatore \hat{S}_{12} non cambia questa somma. Tenendo conto di questa circostanza scriviamo

$$\hat{S}_{12}\mathbf{r}_1 = \hat{S}_{12} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right) = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{2} - \frac{1}{2} \hat{S}_{12} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

$$\hat{S}_{12}\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{2} + \frac{1}{2} \hat{S}_{12} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Sviluppando ora le funzioni

$$\hat{S}_{12}f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = f(t, \hat{S}_{12}\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{10}),$$

$$\hat{S}_{12}f(t, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) = f(t, \hat{S}_{12}\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_{20})$$

in $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ a meno dei termini del primo ordine otteniamo

$$\text{St}^{(2)}f = \text{St}_0^{(2)}f + \text{St}_1^{(2)}f, \quad (17,15)$$

dove

$$\text{St}_0^{(2)}f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{10}) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{20})\} d\tau_2, \quad (17,16)$$

$$\begin{aligned} \text{St}_1^{(2)}f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = & \frac{1}{2} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \left\{ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{10}) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{20}) + \right. \\ & + \left[f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{10}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{20}) - f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{20}) \times \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{10}) \right] \hat{S}_{12}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right\} d\tau_2 \quad (17,17) \end{aligned}$$

(la derivazione rispetto a \mathbf{r}_1 si effettua per \mathbf{p}_{10} o \mathbf{p}_{20} costante).

L'integrale (17,16) coincide con l'integrale (16,12)¹⁾; al § 16 è stato mostrato in che modo (mediante una delle tre integrazioni rispetto alle coordinate spaziali) questo integrale acquista la forma ordinaria di Boltzmann.

Consideriamo l'integrale degli urti tripli (17,14). Se si tenesse conto della « non localizzazione » in questo integrale bisognerebbe aumentare la precisione qui accettata in quanto l'integrale stesso è una piccola correzione. Perciò negli argomenti delle tre funzioni f che figurano nell'integrale bisogna porre uguali tutti i raggi vettoriali

¹⁾ L'espressione (17,16) differisce dalla (16,12) per la sostituzione di t_0 con t negli argomenti delle funzioni f . Dopo tale sostituzione, tuttavia, l'uguaglianza destra nella (16,13) è sempre valida, poiché le dipendenze da $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ compaiono soltanto in funzione di \mathbf{p}_{10} e \mathbf{p}_{20} , che sono integrali del moto.

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ (coincidenti con \mathbf{r}_1) e, per di più, supporre che l'operatore

\hat{R}_{123} in generale non agisca su queste variabili ¹⁾, cioè che

$$\text{St}^{(3)} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{ \hat{R}_{123} f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2) f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_3) \} d\tau_2 d\tau_3. \quad (17,18)$$

Consideriamo in modo più dettagliato la struttura dell'operatore \hat{R}_{123} per precisare il carattere degli urti, di cui tiene conto l'integrale (17,18).

Prima di tutto, l'operatore \hat{R}_{123} (così come l'operatore \hat{G}_{123} (17,4)) si annulla se almeno una delle tre particelle non interagisce con le

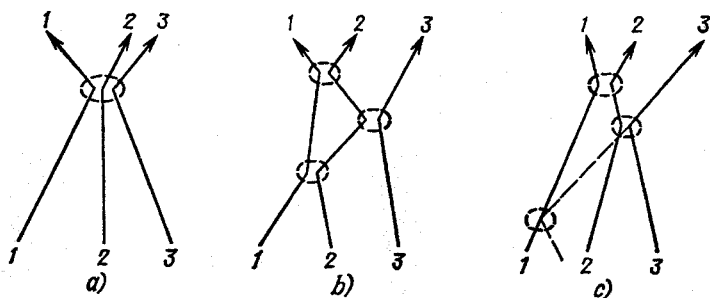


Fig. 5

altre. Ai processi in cui $\hat{R}_{123} \neq 0$ appartengono tuttavia non soltanto gli urti tripli (nel senso letterale della parola), ma anche insiemi di alcuni urti doppi.

Durante gli urti tripli propri le tre particelle entrano contemporaneamente nella « sfera d'interazione », come è mostrato schematicamente nella fig. 5, a. Ma l'operatore \hat{R}_{123} è non nullo anche nei processi di « interazioni triple », che si riducono a tre urti doppi consecutivi, in cui una delle coppie di particelle collide due volte; questo processo è rappresentato schematicamente nella fig. 5, b (qui $\hat{S}_{13} = 1$ in modo che l'operatore \hat{R}_{123} diventa $\hat{S}_{123} - \hat{S}_{12}\hat{S}_{23}$) ²⁾.

¹⁾ A scanso di equivoci sottolineiamo che queste semplificazioni non significano affatto che l'espressione integranda cessa di dipendere in generale da \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 ; la dipendenza da queste variabili si verifica mediante gli operatori \hat{S} che trasformano gli impulsi \mathbf{p}_a nelle funzioni $\tilde{\mathbf{p}}_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$.

²⁾ Al tempo stesso l'operatore \hat{R}_{123} (contrariamente all'operatore \hat{G}_{123} !) si annulla per una successione di soli due urti. Così, per un processo composto dei due urti 2-3 e 1-2 si avrebbe $\hat{S}_{123} = \hat{S}_{12}\hat{S}_{23}$ e $\hat{S}_{13} = 1$ in modo che $\hat{R}_{123} = 0$.

Inoltre, l'operatore \hat{R}_{123} tiene conto anche dei casi in cui uno (o più) dei tre urti è « immaginario » verificantesi cioè se si trascura l'ingresso di uno degli urti reali sulla traiettoria delle particelle. Un esempio di questo processo è dato nella fig. 5, c: l'urto 1-3 avrebbe luogo soltanto se l'urto della particella 3 con la particella 2 non ne alterasse la traiettoria ¹⁾ (per questo processo $\hat{S}_{123} = \hat{S}_{12}\hat{S}_{23}$, ma $\hat{S}_{13} \neq 1$ in modo che \hat{R}_{123} si riduce a $-\hat{S}_{12}\hat{S}_{13} + \hat{S}_{12}$).

Analogamente a come si è trasformato l'integrale $St_0^{(2)}$ al § 16, può essere effettuata una delle sei integrazioni rispetto alle coordinate nell'integrale degli urti tripli; il potenziale d'interazione U_{12} in forma esplicita scompare dalle formule ²⁾.

§ 18. Sviluppo viriale dei coefficienti cinetici

È stato mostrato ai §§ 7, 8 che l'indipendenza dei coefficienti di conducibilità termica e di viscosità dalla densità (o dalla pressione) del gas segue dal fatto che si tiene conto dei soli urti a coppie di molecole. Per questi urti la frequenza (cioè il numero di urti compiuti in un secondo dalla molecola considerata) è proporzionale alla densità N , la lunghezza del cammino libero $l \propto 1/N$, e poiché η e κ sono proporzionali a Nl , essi non dipendono da N . I valori così ottenuti (indichiamoli con η_0 e κ_0) non rappresentano altro che i primi termini dello sviluppo di queste grandezze in potenze della densità (questi sviluppi si dicono *viriali*). Già nell'approssimazione successiva compare una dipendenza dalla densità della forma

$$\kappa = \kappa_0 (1 + \alpha Nd^3), \quad \eta = \eta_0 (1 + \beta Nd^3), \quad (18,1)$$

dove d è il parametro dell'ordine di grandezza delle dimensioni molecolari, e α , β sono costanti adimensionali. Queste prime correzioni hanno un'origine duplice, riflessa nei termini correttivi $St_0^{(3)}$ e $St_1^{(2)}$ dell'equazione cinetica. Gli urti tripli (la cui frequenza è proporzionale a N^2) implicano una diminuzione della lunghezza del cammino libero. La non localizzazione degli urti a coppie conduce alla possibilità di trasmissione della quantità di moto e dell'energia attraverso una superficie senza che essa sia intersecata dalle particelle collidenti. Le particelle si avvicinano a una distanza $\sim d$ e in seguito si allontanano restando ai lati opposti della superficie; questo effetto implica l'aumento dei flussi della quantità di moto e dell'energia.

La soluzione del problema della conducibilità termica o della viscosità con l'equazione cinetica esatta (17,12) deve essere costruita in base allo stesso schema descritto ai §§ 6-8. Cerchiamo la funzione

¹⁾ Ricordiamo che, per il significato dell'azione degli operatori S , si devono seguire le traiettorie delle particelle indietro nel tempo!

²⁾ Per la realizzazione di questa trasformazione si veda *M. S. Green, Phys. Rev.* 1964, v. 136A, pag. 905.

di distribuzione nella forma $f = f_0 (1 + \chi/T)$, dove f_0 è la funzione di equilibrio locale e $\chi/T \sim l/L$ una piccola correzione. L'integrale degli urti tripli $St^{(3)}$, così come $St_0^{(2)}$, è ridotto a zero dalla funzione f_0 . Perciò si deve mantenere in esso il termine con χ , e l'integrale $St^{(3)}$ risulta essere una correzione dell'ordine relativo $\sim (d/r)^3$ all'integrale di Boltzmann $St^{(2)}$. Quanto all'integrale $St_1^{(2)}$, contenente derivate spaziali della funzione di distribuzione, è sufficiente porre in esso $f = f_0$; in questo senso il termine $St_1^{(2)}$ deve essere riferito al primo membro dell'equazione, dove fornirà una correzione dello stesso ordine relativo $\sim (d/r)^3$. In tal modo, i due termini aggiuntivi $St^{(3)}$ e $St_1^{(2)}$ nell'equazione cinetica danno contributi del medesimo ordine¹⁾.

Diamo qui, a titolo di informazione, i risultati della soluzione dell'equazione cinetica esatta per la conducibilità termica e la viscosità nel modello di sferette solide (di diametro d)

$$\kappa = \kappa_0 (1 + 1,2Nd^3), \quad \eta = \eta_0 (1 + 0,35Nd^3), \quad (18,2)$$

dove κ_0 e η_0 sono i valori ottenuti nel problema 3 del § 10 (*J. V. Senegers*, 1966)²⁾.

Introducendo le ulteriori correzioni nell'equazione cinetica (dovute agli urti quadrupli e via di seguito) si potrebbero, in teoria, definire anche i termini successivi dello sviluppo viriale dei coefficienti cinetici. È fondamentale, tuttavia, che questi termini non saranno più semplicemente potenze intere di N ; le funzioni $\kappa(N)$ e $\eta(N)$ non sono analitiche nel punto $N = 0$. Per precisare l'origine di questa non analiticità, studieremo la convergenza degli integrali che figurano nella teoria esposta (*E.G.D. Cohen, J. R. Dorfman, J. Weinstock*, 1963).

Consideriamo l'integrale nella (17,10) che determina il contributo degli urti tripli nella funzione di distribuzione di due particelle. Il carattere della convergenza dell'integrale risulta essere diverso per i diversi tipi degli urti, di cui tiene conto l'operatore \hat{R}_{123} . Per esempio, consideriamo il processo rappresentato nella fig. 5, b.

L'integrazione è estesa al volume dello spazio delle fasi $d\tau_3$, essendo dati i punti fase τ_1 e τ_2 . Come variabile, rispetto alla quale si effettua l'ultima integrazione, lasciamo la distanza r_3 della particella 3 (all'istante t) dal punto in cui ha avuto luogo l'urto 2-3. Prima di quest'ultima integrazione l'espressione integranda contiene i

¹⁾ Queste considerazioni eliminano l'equivoco che potrebbe nascere per il fatto che l'integrale $St_1^{(2)}$ contiene le derivate $\partial f / \partial r \sim f/L$ assenti nell'integrale $St^{(3)}$; sembrerebbe perciò che questi due termini rappresentino correzioni di ordini di grandezza diversi.

²⁾ Per i calcoli corrispondenti assai complicati si veda l'articolo di *J. V. Senegers* nel libro: *Lectures in theoretical physics*, vol. IX C, *Kinetic Theory* (edited by W. Brittin); Gordon and Breach, N.Y., 1967.

seguenti fattori: 1) l'elemento di volume nella variabile r_3 : $r_3^2 dr_3$; 2) se si segue il moto della particella 3 indietro nel tempo è chiaro che la direzione del suo impulso \mathbf{p}_3 deve trovarsi in un determinato angolo solido, affinché possa verificarsi l'urto 3-2, cioè l'angolo sotto il quale si vede la regione di urti reciproci alla distanza r_3 ; di qui compare il fattore d^2/r_3^2 ; 3) un altro fattore di questo tipo deriva dalla limitazione ulteriore delle direzioni possibili dell'impulso \mathbf{p}_3 richiesta dalla condizione che la particella « staccata » 2 debba entrare nella sfera d'urto della particella 1. In tal modo si ottiene un integrale della forma $\int dr_3/r_3^2$ che deve essere esteso da $r_3 \sim d$ a ∞ ; si vede che questo integrale è convergente. Si può dimostrare analogamente la convergenza dell'integrale per urti di altro tipo.

Il contributo degli urti quadrupli sarebbe espresso nella (17,10) da un integrale di forma analoga esteso allo spazio delle fasi delle particelle 3 e 4 (sempre per τ_1 e τ_2 dati).

Consideriamo l'urto quadruplo rappresentato nella fig. 6. Lasciamo di nuovo come ultima variabile di integrazione la distanza r_3 . La differenza dalla stima precedente è dovuta alla presenza nell'integranda dell'integrale rispetto a $d\tau_4$. È chiaro che questa integrazione dà un contributo proporzionale all'area di una regione d'urto 1-4, cioè $\sim d^2$ (il secondo urto 1-2 può essere garantito dalla limitazione di una regione d'integrazione rispetto alle direzioni \mathbf{p}_3). Perciò già da considerazioni dimensionali è chiaro che l'integrale rispetto a $d\tau_4$ dà un contributo supplementare $\sim \bar{p}^3 r_3 d^2$. Come risultato l'integrale rispetto a dr_3 avrà la forma $\int dr_3/r_3$, cioè divergerà logicamente nell'estremo superiore. Tagliando l'integrale a una certa distanza $\Lambda \sim |t - t_0| \cdot \bar{v}$, avremo un contributo nella funzione $f^{(2)}$, contenente il logaritmo grande $\ln(\Lambda/d)$. Questo logaritmo figurerà anche nella corrispondente correzione ai coefficienti cinetici, che sarà proporzionale a $(Nd^3)^2 \ln(\Lambda/d)$ anziché a $(Nd^3)^2$.

La comparsa di termini divergenti significa che gli urti quadrupli non si possono considerare separatamente dagli urti di tutti gli ordini superiori (quintupli ecc.). Infatti, la divergenza mostra che sono importanti gli r_3 grandi. Ma già per $r_3 \sim l$ la particella 3 può urtare contro una particella 5 e via di seguito. Risulta chiaro allora come si possa eliminare la divergenza: nell'espressione per la funzione $f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$ si deve tener conto dei termini con gli urti di tutti

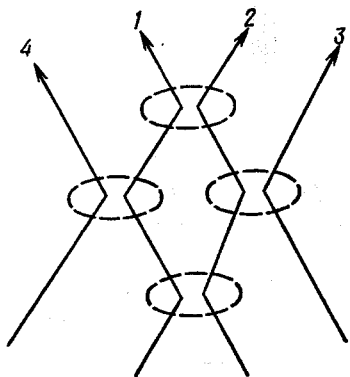


Fig. 6

gli ordini, lasciando in ogni ordine gli integrali che divergono più rapidamente. Questa sommatoria è realizzabile e dà il risultato che ci si può attendere: il grande parametro arbitrario Λ sotto il segno di logaritmo va sostituito con una grandezza dell'ordine del cammino libero $l \sim 1/Nd^2$ ¹⁾.

Quindi, lo sviluppo dei coefficienti cinetici ha la forma

$$\kappa = \kappa_0 \left[1 + \alpha_1 Nd^3 + \alpha_2 (Nd^3)^2 \ln \frac{1}{Nd^3} + \dots \right] \quad (18,3)$$

(e analogamente per η).

§ 19. Fluttuazioni della funzione di distribuzione in un gas in equilibrio

La funzione di distribuzione definita dall'equazione cinetica (che indicheremo qui e al paragrafo seguente con \bar{f}) dà i numeri medi di molecole che si trovano negli elementi di volume dello spazio delle fasi $d^3x d\Gamma$; per un gas statisticamente in equilibrio, la funzione $\bar{f}(\Gamma)$ è la funzione di distribuzione di Boltzmann f_0 (6,7), indipendente dal tempo e (se non esiste campo esterno) dalle coordinate \mathbf{r} . Sorge naturale il problema delle fluttuazioni cui è soggetta la funzione di distribuzione microscopica esatta $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ nel corso della sua variazione nel tempo, per il moto delle particelle del gas secondo le equazioni del moto esatte ²⁾.

Introduciamo la *funzione di correlazione delle fluttuazioni* (o, come si dice brevemente, il *correlatore*)

$$\langle \delta f(t_1, \mathbf{r}_1, \Gamma_1) \delta f(t_2, \mathbf{r}_2, \Gamma_2) \rangle, \quad (19,1)$$

dove $\delta f = f - \bar{f}$. In un gas in equilibrio questa funzione dipende dalla sola differenza dei tempi $t = t_1 - t_2$; la media si calcola rispetto a uno degli istanti t_1 o t_2 , essendone assegnata la differenza. Poiché il gas è omogeneo, nel correlatore figurano nella forma della differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ anche le coordinate dei punti \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Perciò si può convenzionalmente porre t_2 e \mathbf{r}_2 uguali a zero e rappresentare il correlatore nella forma

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle. \quad (19,2)$$

Per l'isotropia del gas la dipendenza di questa funzione da \mathbf{r} si riduce di fatto alla dipendenza dal modulo r .

Se la funzione (19,2) è nota, allora la sua integrazione consente anche di trovare il correlatore della densità del numero di particelle

$$\langle \delta N(t, \mathbf{r}) \delta N(0, 0) \rangle = \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_1 d\Gamma_2. \quad (19,3)$$

¹⁾ Si veda K. Kawasaki, I. Oppenheim, Phys. Rev. 1965, vol. 139A, pag. 1763.

²⁾ Il primo a studiare questo problema è stato B.B. Kadomtsev (1957).

Per distanze r grandi rispetto alla lunghezza del cammino libero l il correlatore della densità si può calcolare mediante la teoria idrodinamica delle fluttuazioni (si veda IX, § 88). A distanze $\leq l$ occorre uno studio cinetico.

Dalla definizione (19,1) risulta immediatamente che

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = \langle \delta f(-t, -\mathbf{r}, \Gamma_2) \delta f(0, 0, \Gamma_1) \rangle. \quad (19,4)$$

La funzione di correlazione gode di una simmetria più profonda, che esprime la simmetria dello stato di equilibrio del sistema rispetto all'inversione del tempo. L'inversione del tempo sostituisce l'istante più remoto t con l'istante più recente $-t$, e cambia i valori delle grandezze Γ in quelli inversi Γ^T . La suddetta simmetria è espressa perciò dall'uguaglianza

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = \langle \delta f(-t, \mathbf{r}, \Gamma_1^T) \delta f(0, 0, \Gamma_2^T) \rangle. \quad (19,5)$$

Per $t = 0$ la funzione (19,2) lega le fluttuazioni nei diversi punti dello spazio delle fasi nello stesso unico istante di tempo. Ma le correlazioni tra fluttuazioni contemporanee si estendono soltanto a distanze dell'ordine di grandezza del raggio d'azione delle forze molecolari. Fra l'altro, nella teoria considerata queste distanze sono supposte nulle e, quindi, il correlatore simultaneo si annulla. Sottolineiamo che questa circostanza è dovuta all'equilibrio dello stato rispetto al quale si considerano le fluttuazioni. Nel caso di non equilibrio, come vedremo al prossimo paragrafo, le fluttuazioni contemporanee sono anch'esse correlate.

In assenza di correlazione a distanze non nulle il correlatore simultaneo si riduce a funzioni delta, il cui coefficiente determina il quadrato medio della fluttuazione in un punto dello spazio delle fasi (si veda IX, § 88). In un gas perfetto in equilibrio il quadrato medio della fluttuazione della funzione di distribuzione coincide con il valore medio della funzione stessa (si veda V, § 113) e, quindi,

$$\langle \delta f(0, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\mathbf{r}) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (19,6)$$

Quanto alla correlazione non simultanea tra le fluttuazioni in punti diversi, essa esiste già nella teoria che trascura le dimensioni molecolari. La necessità della comparsa di questa correlazione risulta con evidenza dal fatto che le particelle che prendono parte ad un dato istante alla fluttuazione in un punto dello spazio delle fasi verranno a trovarsi, agli istanti successivi, in altri punti.

Il problema del calcolo del correlatore per $t \neq 0$ non può essere risolto in forma generale, ma è possibile ridurlo alla soluzione di alcune equazioni. A tale scopo bisogna ricordare la seguente affermazione della teoria generale delle fluttuazioni quasi-stazionarie (si veda V, §§ 118, 119).

Le $x_a(t)$ siano grandezze fluttuanti (con valori medi nulli). Si suppone che, se il sistema si trova in uno stato di non equilibrio, con

i valori delle x_a che superano i limiti delle fluttuazioni medie (ma sempre piccoli), il processo di rilassamento del sistema verso l'equilibrio sia descritto da « equazioni del moto » lineari, aventi la forma

$$\dot{x}_a = - \sum_b \lambda_{ab} x_b \quad (19,7)$$

con coefficienti costanti λ_{ab} . Allora si può affermare che i correlatori delle grandezze x_a verificano le stesse equazioni

$$\frac{d}{dt} \langle x_a(t) x_c(0) \rangle = - \sum_b \lambda_{ab} \langle x_b(t) x_c(0) \rangle, \quad t > 0 \quad (19,8)$$

(l'indice c è libero in questo sistema di equazioni). Risolvendo queste equazioni per $t > 0$, troviamo poi i valori delle funzioni per $t < 0$, in base alla proprietà di simmetria

$$\langle x_a(t) x_b(0) \rangle = \langle x_b(-t) x_a(0) \rangle, \quad (19,9)$$

che è conseguenza della definizione dei correlatori.

Nel caso in esame il ruolo delle equazioni del moto (19,7) è svolto dall'equazione linearizzata di Boltzmann per la piccola aggiunta δf alla funzione di distribuzione di equilibrio \bar{f} . Quindi, il correlatore della funzione di distribuzione deve verificare l'equazione integro-differenziale

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \hat{I}_1 \right) \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = 0 \quad \text{per } t > 0, \quad (19,10)$$

dove \hat{I}_1 è l'operatore integrale lineare agente sulle variabili Γ_1 nella funzione che lo segue secondo la definizione

$$\hat{I}_1 g(\Gamma_1) = \int w(\Gamma_1, \Gamma; \Gamma'_1, \Gamma') [\bar{f}'_1 g'_1 + \bar{f}' g' - \bar{f}_1 g_1 - \bar{f} g] d\Gamma d\Gamma'_1 d\Gamma'. \quad (19,11)$$

Le variabili Γ_2 nell'equazione (19,10) sono, invece, libere. La condizione iniziale dell'equazione è il valore (19,6) del correlatore per $t = 0$, mentre il correlatore per $t < 0$ è definito in seguito dall'uguaglianza (19,4) (quanto alla condizione (19,5), essa viene soddisfatta automaticamente). Le formule (19,10), (19, 11), (19,4) danno l'insieme delle equazioni che, in teoria, sono sufficienti per la definizione completa del correlatore.

In genere presenta interesse non tanto il correlatore stesso quanto la sua trasformata di Fourier nelle coordinate e nel tempo, che indichiamo con il simbolo $(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}$, dove gli indici 1 e 2 si riferiscono agli argomenti Γ_1 e Γ_2

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3x \quad (19,12)$$

(funzione spettrale delle fluttuazioni o correlatore spettrale). Se sviluppiamo la funzione fluttuante nell'integrale di Fourier rispetto al tempo e alle coordinate, il valore medio dei prodotti delle sue componenti di Fourier è legato al correlatore spettrale dalla formula

$$\langle \delta f_{\omega \mathbf{k}}(\Gamma_1) \delta f_{\omega' \mathbf{k}'}(\Gamma_2) \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}} \quad (19,13)$$

(si veda V, § 122).

È facile scrivere un'equazione che consentirà di definire, in principio, la funzione spettrale delle fluttuazioni senza il calcolo preliminare del correlatore spazio-temporale.

Dividendo la regione di integrazione rispetto a t nella (19,12) in due parti (da $-\infty$ a 0 e da 0 a $+\infty$) e utilizzando la (19,4) otteniamo

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}} = (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} + (\delta f_2 \delta f_1)_{-\omega - \mathbf{k}}^{(+)} \quad (19,14)$$

dove

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \int_0^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3x. \quad (19,15)$$

Applichiamo all'equazione (19,10) la trasformazione unilaterale di Fourier (19,15). Inoltre integriamo per parti tutti i termini con derivate rispetto a t e rispetto a \mathbf{r} , tenendo presente che il correlatore deve tendere a zero per $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ e per $t \rightarrow \infty$, mentre per $t = 0$ esso deve essere dato dalla formula (19,6). Come risultato otteniamo l'equazione cercata nella forma

$$[i(\mathbf{k}\mathbf{v}_1 - \omega) - \hat{I}_1] (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (19,16)$$

Se si è interessati non alle fluttuazioni della funzione di distribuzione stessa, bensì alle sole fluttuazioni della densità del gas, è opportuno integrare l'equazione (19,16) rispetto a $d\Gamma_2$

$$[i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) - \hat{I}] (\delta f(\Gamma) \delta N)_{\omega \mathbf{k}}^{(+)} = \bar{f}(\Gamma). \quad (19,17)$$

La funzione spettrale cercata $(\delta N^2)_{\omega \mathbf{k}}$ si ricava, invece, dalla soluzione di questa equazione con un'integrazione semplice (e non doppia come nella (19,3)).

Un altro metodo di ricerca di $(\delta N^2)_{\omega \mathbf{k}}$ è basato sul legame esistente tra il correlatore di densità e la suscettività generalizzata rispetto a un campo esterno debole della forma

$$U(t, \mathbf{r}) = U_{\omega \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (19,18)$$

(si veda IX, § 86)¹⁾. Se sotto l'influsso di questo campo la densità varia

$$\delta N_{\omega \mathbf{k}} = \alpha(\omega, \mathbf{k}) U_{\omega \mathbf{k}}, \quad (19,19)$$

¹⁾ Sottolineiamo che questo legame esiste nel solo caso di equilibrio.

allora (in accordo con la formula (86,20), IX) il correlatore spettrale della densità nel limite classico è

$$(\delta N^2)_{\omega k} = \frac{2T}{\omega} \operatorname{Im} \alpha(\omega, k). \quad (19,20)$$

Supponiamo che $\delta f(t, r)$ sia la variazione della funzione di distribuzione sotto l'azione di questo campo. Essa verifica l'equazione cinetica

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}} = \hat{I} \delta f.$$

Scriviamo le componenti di Fourier della funzione $\delta f(t, r, \Gamma)$ nella forma

$$f_{\omega k}(\Gamma) = \chi_{\omega k}(\Gamma) U_{\omega k},$$

separando in esse il campo esterno. Allora per $\chi_{\omega k}$ abbiamo l'equazione

$$[i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) - \hat{I}] \chi_{\omega k}(\Gamma) = i k \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (19,21)$$

In base alla soluzione di questa equazione si trova il correlatore spettrale cercato con un'integrazione semplice

$$(\delta N^2)_{\omega k} = \frac{2T}{\omega} \operatorname{Im} \int \chi_{\omega k}(\Gamma) d\Gamma. \quad (19,22)$$

PROBLEMI

1. Determinare il correlatore della densità in un gas monoatomico in equilibrio trascurando gli urti.

Soluzione. Per un gas monoatomico come grandezza Γ servono le tre componenti della quantità di moto \mathbf{p} . La soluzione dell'equazione (19,10) per $\hat{I}_1 = 0$ è

$$\langle \delta f(t, r, \mathbf{p}_1) \delta f(0, 0, \mathbf{p}_2) \rangle = \bar{f}(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2).$$

Le sue componenti di Fourier si scrivono

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega k} = 2\pi \bar{f}(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_1).$$

L'integrazione di queste espressioni (con la funzione di Maxwell \bar{f}) dà il correlatore della densità

$$\langle \delta N(t, r) \delta N(0, 0) \rangle = \bar{N} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{1}{t^3} \exp \left(-\frac{m r^2}{2T t^2} \right), \quad (1)$$

$$(\delta N^2)_{\omega k} = \frac{\bar{N}}{k} \left(\frac{2\pi m}{T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m \omega^2}{2T k^2} \right). \quad (2)$$

2. Risolvere il problema 1 per un integrale degli urti della forma $\hat{I}_1 g = -g/\tau$, con il tempo costante τ .

Soluzione. L'equazione (19,16) si riduce a un'equazione algebrica. Ricavando da essa $(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega k}^{(+)}$, troviamo in seguito mediante la (19,14)

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega k} = \frac{2\pi \bar{f}(\mathbf{p}_1)}{1 + \tau^2 (\mathbf{k}\mathbf{v}_1 - \omega)^2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (3)$$

È da notare che l'esistenza anche di un piccolo numero di urti cambia l'andamento asintotico del correlatore spettrale della densità per grandi frequenze, $\omega \gg kv$, cioè per fluttuazioni con velocità di fase notevolmente superiore alla velocità termica delle molecole. Infatti, in questo limite

$$(\delta N^2)_{\omega k} = 2\bar{N}/\tau\omega^2, \quad (4)$$

vale a dire che il correlatore decresce, all'aumentare della frequenza, secondo una potenza e non secondo la legge esponenziale della formula (2).

§ 20. Fluttuazioni della funzione di distribuzione in un gas non in equilibrio

Supponiamo che il gas si trovi in stato stazionario ma non in equilibrio, con una funzione di distribuzione $\bar{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$ soddisfacente l'equazione cinetica

$$\mathbf{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{r}} = \text{St } \bar{f}. \quad (20,1)$$

La funzione \bar{f} può differire fortemente dalla funzione di distribuzione di equilibrio f_0 , in modo che l'integrale degli urti $\text{St } \bar{f}$ non sia supposto linearizzato rispetto alla differenza $\bar{f} - f_0$. Lo stato stazionario non in equilibrio deve essere mantenuto nel gas da influssi esterni: nel gas può esistere un gradiente della temperatura dovuto a sorgenti esterne, il gas può compiere un moto stazionario (non riducibile al moto come un tutt'uno), ecc.

Consideriamo il problema del calcolo delle fluttuazioni della funzione di distribuzione $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ rispetto a $\bar{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$. Queste fluttuazioni saranno caratterizzate di nuovo dal correlatore (19,1), in cui la media si calcola nel modo usuale rispetto al tempo, con la differenza data $t = t_1 - t_2$, e il correlatore dipende unicamente da t . Poiché la distribuzione $\bar{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$ è disomogenea, il correlatore dipenderà dalle coordinate \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 separatamente e non soltanto dalla loro differenza. La proprietà (19,4) si scrive nella forma

$$\langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = \langle \delta f_2(-t) \delta f_1(0) \rangle; \quad (20,2)$$

dove

$$f_1(t) \equiv f(t, \mathbf{r}_1, \Gamma_1), \quad f_2(0) \equiv f(0, \mathbf{r}_2, \Gamma_2).$$

Quanto alla relazione (19,5), legata all'invarianza del tempo, nel caso di non equilibrio in generale non esiste.

Il correlatore della funzione di distribuzione verifica, come sempre, la stessa equazione (19,10)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \hat{I}_1 \right) \langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = 0, \quad (20,3)$$

dove \hat{f}_1 è l'operatore integrale lineare (19,11) agente sulle variabili Γ_1 ¹⁾. Quanto alla condizione iniziale per questa equazione, cioè alla forma del correlatore simultaneo, essa è molto più complicata che non nel caso di equilibrio, in cui è stata espressa semplicemente dalla formula (19,6). In un gas non in equilibrio il correlatore simultaneo stesso è definito da un'equazione cinetica la cui forma si può stabilire ricorrendo al legame esistente tra la funzione di correlazione e la funzione di distribuzione di due particelle $\bar{f}^{(2)}$, introdotta al § 16. Nello stato stazionario la funzione $\bar{f}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2)$, così come $\bar{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$, non dipende esplicitamente dal tempo.

Per dedurre questo legame osserviamo che, essendo infinitesimo il volume di fase $d\tau = d^3x d\Gamma$, in esso non può trovarsi contemporaneamente più di una particella²⁾. Perciò il numero medio $\bar{f} d\tau$ rappresenta al tempo stesso la probabilità che nell'elemento $d\tau$ si trovi una particella (la probabilità che in esso si trovino due particelle contemporaneamente è un infinitesimo di ordine superiore). Ne segue che il valore medio del prodotto dei numeri di particelle in due elementi $d\tau_1$ e $d\tau_2$ coincide con la probabilità di trovare contemporaneamente in ciascuno di essi una sola particella. Per una data coppia di particelle si tratta, secondo la definizione di funzione di distribuzione di due particelle, del prodotto $\bar{f}_{12}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2$. Poiché una coppia di particelle si può scegliere nel numero totale (molto grande) di particelle con $\mathcal{N}(\mathcal{N} - 1) \approx \mathcal{N}^2$ modi, allora

$$\langle f_1 d\tau_1 \cdot f_2 d\tau_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

L'uguaglianza così ottenuta $\langle f_1 f_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)}$ si riferisce, tuttavia, soltanto a punti diversi dello spazio delle fasi. Il passaggio al limite $\mathbf{r}_1, \Gamma_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Gamma_2$ richiede di tener conto che se $d\tau_1$ e $d\tau_2$ coincidono, allora l'atomo sito in $d\tau_1$ si trova anche in $d\tau_2$. La relazione che esprime questa circostanza ha la forma

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)} + \bar{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (20,4)$$

Moltiplichiamo infatti questa uguaglianza per $d\tau_1 d\tau_2$ e integriamo su un piccolo volume $\Delta\tau$. Il primo termine a secondo membro dà un infinitesimo del secondo ordine ($\sim (\Delta\tau)^2$); il termine con le funzioni delta dà $\bar{f} \Delta\tau$, cioè una grandezza del primo ordine. Di conseguenza, otteniamo

$$\left\langle \left(\int_{\Delta\tau} f d\tau \right)^2 \right\rangle = \bar{f} \Delta\tau,$$

¹⁾ L'uso di questa equazione nel caso di non equilibrio è stato introdotto da M. Lax (1966).

²⁾ La deduzione che si dà più avanti è una parafrasi delle considerazioni in V, § 116.

come deve essere, tenendo presente che nel piccolo volume può trovarsi, a meno di grandezze del primo ordine, 0 o 1 particella.

Ponendo l'espressione (20,4) nella definizione di correlatore simultaneo

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle = \langle f_1(0) f_2(0) \rangle - \bar{f}_1 \bar{f}_2,$$

otteniamo il legame cercato tra questo correlatore e la funzione di distribuzione di due particelle

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)} - \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (20,5)$$

In un gas perfetto in equilibrio la funzione di distribuzione di due particelle si riduce al prodotto $\bar{f}_{12}^{(2)} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 / \mathcal{N}^2$, e allora la (20,5) diventa la (19,6). In ogni caso $\bar{f}_{12}^{(2)}$ tende al prodotto suindicato all'aumentare della distanza tra i punti 1 e 2 in modo che

$$\langle \delta f_1(0) \delta f_2(0) \rangle \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty. \quad (20,6)$$

La funzione di distribuzione di due particelle verifica un'equazione cinetica analoga a quella di Boltzmann. Si potrebbe dedurre questa equazione dalla (16,9) per $\bar{f}^{(2)}$, così come l'equazione per la funzione di una particella è stata dedotta dalla (16,7)¹⁾. Tuttavia, daremo qui una deduzione dell'equazione per $\bar{f}^{(2)}$, analoga alla deduzione dell'equazione di Boltzmann al § 3, basata su considerazioni fisiche intuitive.

Consideriamo come funzione incognita non la funzione stessa $\bar{f}^{(2)}$, bensì la differenza

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2) = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)} - \bar{f}_1 \bar{f}_2, \quad (20,7)$$

che si annulla per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$ (il correlatore (20,5) senza l'ultimo termine). È una grandezza piccola nel senso ordinario della teoria delle fluttuazioni, ossia dell'ordine di $1/\mathcal{N}$ rispetto a $\bar{f}_1 \bar{f}_2$.

In assenza di urti la funzione φ verifica l'equazione

$$\frac{d\bar{f}^{(2)}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} = 0, \quad (20,8)$$

che esprime semplicemente il teorema di Liouville, ossia la costanza di $\bar{f}^{(2)}$ lungo la traiettoria di fase di una coppia di particelle. Quanto alla variazione di φ in seguito agli urti, essa è legata a processi di duplice specie.

Gli urti delle particelle 1 e 2 con tutte le altre particelle, ma non l'una con l'altra, implicano la comparsa a secondo membro dell'equazione (20,8) dei termini $\hat{I}_1 \varphi + \hat{I}_2 \varphi$, dove \hat{I}_1 e \hat{I}_2 sono gli opera-

¹⁾ Al § 17 l'equazione (16,9) è servita unicamente a uno scopo specifico, ossia all'esclusione di $\bar{f}^{(2)}$ dall'equazione per \bar{f} .

tori integrali lineari (19,11) agenti rispettivamente sulle variabili Γ_1 e Γ_2 .

Gli urti reciproci tra le particelle 1 e 2 giocano un ruolo particolare: essi implicano il « salto » contemporaneo di entrambe le particelle 1 e 2 da una coppia di punti dello spazio delle fasi a un'altra. Le stesse considerazioni, che sono servite alla deduzione della (3,7), danno il termine della forma $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \text{St}_{12} \bar{f}$ a secondo membro della (20,8), dove

$$\text{St}_{12} \bar{f} = \int w(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma'_1, \Gamma'_2) (\bar{f}'_1 \bar{f}'_2 - \bar{f}_1 \bar{f}_2) d\Gamma'_1 d\Gamma'_2 \quad (20,9)$$

(in questo integrale le fluttuazioni si possono trascurare); il fattore $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ esprime il fatto che agli urti sono soggette le particelle che si trovano in un medesimo punto dello spazio ¹⁾.

Quindi, otteniamo infine la seguente equazione:

$$\mathbf{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} - \hat{I}_1 \varphi - \hat{I}_2 \varphi = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \text{St}_{12} \bar{f}. \quad (20,10)$$

Risolvendola abbiamo, in accordo con la (20,5), una funzione che serve come condizione iniziale per l'equazione (20,3) per $t = 0$ ²⁾.

Senza secondo termine l'equazione omogenea (20,10) ha la soluzione

$$\varphi = f_{01} \Delta f_{02} + f_{02} \Delta f_{01}, \quad \Delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{N}} \Delta \mathcal{N} + \frac{\partial f_0}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}, \quad (20,11)$$

corrispondente a piccole variazioni arbitrarie del numero di particelle, della temperatura e della velocità macroscopica nella distribuzione di equilibrio f_0 .

Tuttavia, questa soluzione « parassita » viene esclusa dalla condizione $\varphi \rightarrow 0$ per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$. Perciò nel caso di equilibrio, in cui l'integrale St_{12} si annulla identicamente, dall'equazione (20,10) deriva $\varphi = 0$, e riotteniamo la condizione iniziale (19,6).

Quindi, il secondo membro dell'equazione (20,10), cioè gli urti a coppie tra particelle negli stati dati Γ_1 e Γ_2 , è la fonte della correlazione simultanea delle fluttuazioni in un gas non in equilibrio. Implicando la variazione contemporanea dei numeri di riempimento dei due stati, gli urti a coppie generano una correlazione tra questi numeri. In stato di equilibrio, in cui vi è una compensazione esatta degli urti a coppie diretti e inversi, questo meccanismo è inefficace e le correlazioni simultanee non si verificano.

Se la distribuzione \bar{f} non dipende dalle coordinate \mathbf{r} (come è possibile quando la mancanza di equilibrio è dovuta a un campo ester-

¹⁾ Integrando l'integrale (20,9) anche rispetto a $d\Gamma_2$, si ottiene così l'ordinario integrale degli urti di Boltzmann.

²⁾ Questo risultato appartiene a S.V. Gantsevič, V.L. Gurevič e R. Katiljus (1969) e a Š.M. Kogan e A. Ja. Sulman (1969).

no), si può porre il problema delle fluttuazioni della funzione di distribuzione, la cui media è calcolata su tutto il volume del gas, cioè delle fluttuazioni della funzione

$$f(t, \Gamma) = \frac{1}{\mathcal{V}^0} \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d^3x \quad (20,12)$$

(che indichiamo con la stessa lettera f ma senza argomento \mathbf{r}). La funzione di correlazione corrispondente verifica la seguente equazione, che differisce dalla (20,3) per l'assenza del termine contenente la derivata rispetto alle coordinate:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \hat{I}_1 \right) \langle \delta f(t, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle = 0 \quad \text{per } t > 0; \quad (20,13)$$

al primo membro si è aggiunto il termine legato alla forza \mathbf{F} , che agisce sulle particelle nel campo esterno. Il correlatore simultaneo

$$\langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{N}^2 \bar{f}^{(2)}(\Gamma_1, \Gamma_2) - \bar{f}(\Gamma_1) \bar{f}(\Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}^0} \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \equiv \\ &\equiv \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}^0} \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \end{aligned} \quad (20,14)$$

verifica, invece, l'equazione

$$\left[\mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \right] \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \text{St}_{12} \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2). \quad (20,15)$$

Se il gas si trova in un recipiente chiuso, questa equazione va risolta con una condizione supplementare, che esprime l'assegnazione (cioè l'assenza di fluttuazioni) del numero totale di particelle nel gas:

$$\int \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_1 = \int \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle d\Gamma_2 = 0. \quad (20,16)$$

Questa condizione deve essere soddisfatta anche nel caso di equilibrio. Fra l'altro, non la verifica l'espressione $\bar{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) / \mathcal{V}$ corrispondente al correlatore (19,6). Si può ottenere l'espressione corretta tenendo conto dell'arbitrarietà della (20,11); scegliendo in modo appropriato il parametro $\Delta \mathcal{N}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \delta f(0, \Gamma_1) \delta f(0, \Gamma_2) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{V}^0} \bar{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \\ &- \frac{1}{\mathcal{N}} \bar{f}(\Gamma_1) \bar{f}(\Gamma_2). \end{aligned} \quad (20,17)$$

E da notare che questo correlatore contiene anche un termine che non è una funzione δ .

Capitolo II

APPROSSIMAZIONE DIFFUSIONALE

§ 21. Equazione di Fokker-Planck

Formano una categoria notevole di fenomeni cinetici i processi, in cui le variazioni medie delle grandezze (dalle quali dipende la funzione di distribuzione) sono piccole in ogni atto elementare rispetto ai loro valori caratteristici. I tempi di rilassamento di questi processi sono grandi rispetto a quelli degli atti elementari che ne costituiscono il meccanismo microscopico; in questo senso i suddetti processi si possono chiamare lenti.

Un esempio tipico di questo genere è fornito dal problema del rilassamento nelle quantità di moto di una piccola mistura di gas pesante in uno leggero (che è supposto in stato di equilibrio). Essendo piccola la concentrazione di particelle pesanti, i loro urti reciproci si possono trascurare e considerare gli urti con le particelle del gas fondamentale (leggero). Ma in seguito all'urto di una particella pesante con quelle leggere la quantità di moto della prima è soggetta soltanto a una variazione relativamente piccola.

Per fissare le idee, tratteremo questo esempio e dedurremo un'equazione cinetica soddisfatta in questo caso dalla funzione di distribuzione delle quantità di moto delle particelle dell'impurità, $f(t, p)$.

Indichiamo con $w(p, q) d^3q$ la probabilità di variazione (riferita all'unità di tempo) della quantità di moto $p \rightarrow p - q$ di una particella pesante nell'atto elementare, ossia nell'urto con una particella leggera. Allora l'equazione cinetica per la funzione $f(t, p)$ si scrive nella forma

$$\frac{\partial f(t, p)}{\partial t} = \int \{w(p+q, q) f(t, p+q) - w(p, q) f(t, p)\} d^3q, \quad (21,1)$$

dove a secondo membro figura la differenza tra il numero di particelle che entrano (in un secondo) in un dato elemento dello spazio dei vettori quantità di moto d^3p e il numero di particelle che ne escono, sempre in un secondo. La funzione $w(p, q)$, per le ipotesi fatte, decresce rapidamente all'aumentare di q , in modo che nell'integrale sono fondamentali i valori q piccoli rispetto alla quantità di moto media delle particelle. Questa circostanza consente di svilup-

pare l'espressione integranda

$$w(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \approx w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) + \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}) + \\ + \frac{1}{2} q_{\alpha} q_{\beta} \frac{\partial^2}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p}).$$

Come risultato l'equazione cinetica diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left\{ \tilde{A}_{\alpha} f + \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} (B_{\alpha\beta} f) \right\}, \quad (21,2)$$

dove

$$\tilde{A}_{\alpha} = \int q_{\alpha} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_{\alpha} q_{\beta} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q. \quad (21,3)$$

In tal modo, l'equazione cinetica da integro-differenziale si trasforma in differenziale. Le grandezze \tilde{A}_{α} e $B_{\alpha\beta}$ si possono scrivere nella seguente forma simbolica che esprime in modo più chiaro il loro significato:

$$\tilde{A}_{\alpha} = \frac{\sum q_{\alpha}}{\delta t}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\sum q_{\alpha} q_{\beta}}{2\delta t}, \quad (21,4)$$

dove il segno \sum indica la sommatoria sul numero (grande) di urti avvenuti nel tempo δt .

L'espressione a secondo membro della (21,2) ha la forma della divergenza nello spazio dei vettori quantità di moto, $-\partial s_{\alpha} / \partial p_{\alpha}$, del vettore

$$s_{\alpha} = -\tilde{A}_{\alpha} f - \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} (B_{\alpha\beta} f) = -A_{\alpha} f - B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}}, \quad A_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}}. \quad (21,5)$$

In altre parole, la (21,2), come ci si doveva aspettare, ha la forma di un'equazione di continuità nello spazio dei vettori quantità di moto; quindi, il numero di particelle che partecipano al processo si conserva automaticamente. Il vettore \mathbf{s} , invece, rappresenta la densità del flusso di particelle nello spazio dei vettori quantità di moto.

Secondo le formule (21,4) i coefficienti nell'equazione cinetica si esprimono attraverso le caratteristiche medie degli urti, e in questo senso il loro calcolo rappresenta un problema meccanico. In pratica tuttavia non c'è bisogno del calcolo separato dei coefficienti A_{α} e $B_{\alpha\beta}$; essi possono essere espressi l'uno in funzione dell'altro dalla condizione di annullamento del flusso in equilibrio statistico. Nel caso considerato la funzione di distribuzione di equilibrio è

$$f = \text{costante} \cdot e^{-p^2/2MT},$$

dove M è la massa delle particelle del gas pesante e T la temperatura del gas fondamentale (leggero). La sostituzione di questa espressione

nell'equazione $s = 0$ dà

$$MTA_{\alpha} = B_{\alpha\beta}p_{\beta}. \quad (21,6)$$

In tal modo l'equazione cinetica assume la forma

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left[B_{\alpha\beta} \left(\frac{p_{\beta}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}} \right) \right]. \quad (21,7)$$

Notiamo che i coefficienti nei due primi termini dello sviluppo dell'integrale degli urti sono dello stesso ordine di grandezza; ciò è dovuto al fatto che la media delle potenze prime delle grandezze a segno alternato q_{α} nella (21,4) è legata a uno smorzamento più grande che nel calcolo della media delle espressioni quadratiche. I termini ulteriori dello sviluppo saranno tutti piccoli rispetto ai primi due.

L'unico vettore dal quale possono dipendere i coefficienti $B_{\alpha\beta}$ è la quantità di moto \mathbf{p} delle particelle pesanti. Ma se le velocità di queste particelle, \mathbf{p}/M , sono in media piccole rispetto alle velocità delle particelle leggere, allora le particelle pesanti si possono supporre fisse negli urti; in questa approssimazione le grandezze $B_{\alpha\beta}$ saranno indipendenti da \mathbf{p} . In altre parole, il tensore $B_{\alpha\beta}$ si semplifica nello scalare costante B ,

$$B_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta}, \quad B = \frac{1}{6} \int q^2 w(0, \mathbf{q}) d^3q, \quad (21,8)$$

e l'equazione (21,7) diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (21,9)$$

Notiamo la somiglianza formale dell'equazione (21,7) con l'equazione di diffusione in un campo esterno, il che è più evidente nella formula (21,9). Ricordiamo che l'equazione di diffusione ha la forma

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div} (D \nabla c - bcF),$$

dove c è la concentrazione dell'impurità, F è la forza agente su una particella di essa da parte del campo esterno, D il coefficiente di diffusione, b la mobilità. I processi descritti dall'equazione (21,9) si possono chiamare diffusione nello spazio dei vettori quantità di moto, in cui B è il coefficiente di diffusione; il legame tra i coefficienti nei due termini a secondo membro della (21,9) è analogo alla nota relazione di Einstein tra il coefficiente di diffusione e la mobilità: $D = bT$ (si veda VI, § 59).

L'equazione cinetica della forma (21,2), nella quale i coefficienti sono definiti in funzione delle caratteristiche medie degli atti elementari in base alla formula (21,4), si chiama *equazione di Fokker-Planck* (A. D. Fokker, 1914; M. Planck, 1917). Le proprietà specifiche delle variabili p_{α} come quantità di moto delle particelle non hanno avuto alcun ruolo nella deduzione. È chiaro perciò che un'equazione

dello stesso tipo sarà valida anche per le funzioni di distribuzione f di altre variabili, a condizione che siano soddisfatte le ipotesi sulle quali è basata la deduzione: variazione relativamente piccola delle grandezze negli atti elementari e linearità rispetto a f dell'operatore integrale che esprime la variazione della funzione in seguito a questi atti.

Ricordiamo a titolo di esempio un altro caso: quando un gas leggero costituisce una piccola impurità in un gas pesante. Per urti con le particelle pesanti la quantità di moto di una particella leggera varia fortemente in direzione e poco in valore assoluto. Sebbene l'equazione (21,7) a queste condizioni sia già inapplicabile alla funzione di distribuzione del vettore quantità di moto delle particelle p del gas leggero, un'equazione analoga si può stabilire per la distribuzione del solo valore assoluto p . Se la funzione di distribuzione è riferita sempre all'elemento dello spazio d^3p (in modo che il numero di particelle con grandezza p nell'intervallo dp è $f(t, p) \cdot 4\pi p^2 dp$), l'equazione di Fokker-Planck sarà valida per la funzione $4\pi p^2 f$ riferita all'elemento dp

$$\frac{\partial f p^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ f p^2 A + B \frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\}.$$

ossia

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left\{ f A + \frac{B}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\}, \quad (21,10)$$

dove

$$B = \frac{1}{2} \frac{\sum_i (\delta p)^2}{\delta t}. \quad (21,11)$$

L'espressione tra parentesi graffe rappresenta il flusso radiale s nello spazio dei vettori quantità di moto, che deve annullarsi con la distribuzione di equilibrio

$$f = \text{costante} \cdot e^{-p^2/2mT}$$

(dove m è la massa della particella leggera e T la temperatura del gas pesante fondamentale). Questa condizione lega le grandezze A e B , per cui l'equazione cinetica (21,10) assume la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial p^2 s}{\partial p}, \quad s = -B \left(\frac{p}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (21,12)$$

PROBLEMI

1. Determinare il coefficiente di diffusione nello spazio dei vettori quantità di moto (B nell'equazione (21,9)) in seguito all'aggiunta di gas pesante in un gas leggero, supponendo le velocità delle particelle pesanti piccole rispetto a quelle delle particelle leggere.

Soluzione. Come si dice nel testo, per queste ipotesi nel calcolo della trasmissione della quantità di moto si può supporre fissa la particella pesante e

trascurare la variazione della sua energia per l'urto. La variazione per la particella pesante si calcola in questo caso come variazione della quantità di moto (coincidente con essa) della particella leggera: $(\Delta p)^2 = 2p'^2 (1 - \cos \alpha)$, dove p' è il valore relativo alla particella leggera e α l'angolo di rotazione per diffusione. Di qui abbiamo

$$\sum (\Delta p)^2 = \delta t \int 2p'^2 (1 - \cos \alpha) N v' d\sigma$$

(dove N è la densità del numero di particelle del gas leggero) e infine

$$B = \frac{N}{3m} \langle p'^3 \sigma_t \rangle,$$

dove $\sigma_t = \int (1 - \cos \alpha) d\sigma$ è la sezione di trasporto e la media si calcola rispetto alla distribuzione delle particelle del gas leggero.

2. Determinare la mobilità di una particella pesante in un gas leggero mediante l'equazione di Fokker-Planck.

Soluzione. In presenza di un campo esterno, a primo membro dell'equazione (21,9) si aggiunge il termine $F \partial f / \partial p$, dove F è la forza agente sulla particella. Supponendo piccola questa forza, cerchiamo la soluzione stazionaria dell'equazione nella forma $f = f_0 + \delta f$, dove f_0 è la distribuzione di Maxwell e $\delta f \ll f_0$. Per δf troviamo l'equazione

$$B \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \delta f}{\partial p} + \frac{p}{MT} \delta f \right) = F \frac{\partial f_0}{\partial p}.$$

Di qui

$$B \left(\frac{\partial \delta f}{\partial p} + \frac{p}{MT} \delta f \right) = F f_0$$

e in seguito $\delta f = f_0 F p / B$. La mobilità b è il coefficiente nell'uguaglianza

$$\bar{v} = \int \delta f \cdot v d^3 p = b F.$$

Il calcolo dell'integrale dà

$$b = \frac{T}{B} = \frac{3mT}{N \langle \sigma_t p'^3 \rangle}$$

in accordo con la formula (12,4).

§ 22. Gas debolmente ionizzato in un campo elettrico

Consideriamo un gas ionizzato che si trova in un campo elettrico omogeneo E . Il campo viola la distribuzione d'equilibrio degli elettroni liberi nel gas e crea in esso una corrente elettrica. Deduciamo l'equazione cinetica che definisce la distribuzione di elettroni ¹⁾.

Ionizzazione debole significa che la concentrazione di elettroni (e di ioni) nel gas è piccola. Perciò a giocare il ruolo principale sono gli urti degli elettroni con le sole molecole neutre; gli urti reciproci

¹⁾ La teoria esposta in questo paragrafo appartiene a *B.I. Davydov* (1936). La formula limite (22,18) è stata dedotta ancora prima da *M. J. Druyvesteyn* (1930).

tra gli elettroni (e con gli ioni) si possono trascurare. Supporremo, inoltre, che l'energia media acquistata dagli elettroni nel campo elettrico (anche se il campo è forte; si veda più avanti) sia insufficiente per eccitare o ionizzare le molecole; in questo caso gli urti tra elettroni e molecole si possono supporre elastici.

Poiché la differenza tra le masse elettroniche m e le masse molecolari M è grande, la velocità media degli elettroni è superiore alla velocità media delle molecole. Per la stessa ragione la quantità di moto dell'elettrone in seguito a un urto varia molto in direzione e poco in valore assoluto. Per queste ipotesi l'integrale degli urti nell'equazione cinetica si divide nella somma di due termini, che rappresentano le variazioni del numero di particelle in un elemento dello spazio dei vettori quantità di moto dovute rispettivamente alla variazione del modulo e della direzione; il primo di questi termini può essere rappresentato nella forma differenziale di Fokker-Planck.

In forza della simmetria attorno alla direzione del campo, la funzione di distribuzione dipende (oltre che dal tempo) da due sole variabili: dal valore assoluto della quantità di moto p e dall'angolo θ tra $p = mv$ e la direzione di E (presa come asse z). L'equazione cinetica per la funzione $f(t, p, \theta)$ ha la forma ¹⁾

$$\frac{\partial f}{\partial t} - eE \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 s + Nv \int [f(t, p, \theta') - f(t, p, \theta)] d\sigma, \quad (22,1)$$

dove

$$s = -B \left(\frac{v}{T} f + \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad B = \frac{\sum (\Delta p)^2}{2\delta t}.$$

Il primo termine a secondo membro della (22,1) corrisponde al secondo membro dell'equazione di Fokker-Planck (21,12). Il secondo termine, invece, è l'integrale degli urti rispetto alla variazione della direzione della quantità di moto. In questo integrale le molecole si possono supporre fisse (N è la densità del loro numero); allora il numero di urti, cui è soggetto l'elettrone nell'unità di tempo e che cambiano la direzione della quantità di moto da θ a θ' (o da θ' a θ), è $Nv d\sigma$, dove $d\sigma$ è la sezione di diffusione dell'elettrone sulla molecola fissa, dipendente da p e dall'angolo α formato da p e p' (si suppone che la media della sezione sia già calcolata rispetto alle orientazioni della molecola).

Considereremo più avanti lo stato stazionario con funzione di distribuzione indipendente dal tempo, per cui il termine $\partial f/\partial t$ nell'equazione (22,1) sarà omissso.

¹⁾ In questo libro e esprime ovunque una grandezza positiva, cioè il valore assoluto della carica elementare. La carica dell'elettrone è, quindi, $-e$.

Per calcolare la grandezza B ricorriamo all'uguaglianza

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = (\mathbf{v}' - \mathbf{V}')^2,$$

che esprime la costanza del modulo della velocità relativa di due particelle per urto elastico (\mathbf{v} , \mathbf{V} e \mathbf{v}' , \mathbf{V}' sono le velocità iniziali e finali dell'elettrone e della molecola). La variazione della velocità della molecola è piccola rispetto a quella dell'elettrone: $\Delta \mathbf{V} = -m \Delta \mathbf{v}/M$; perciò dopo aver sviluppato l'uguaglianza scritta si può porre $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$. Allora

$$2V(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = v^2 - v'^2 \approx 2v \Delta v,$$

dove $\Delta v = v - v'$ è una grandezza piccola. Quindi,

$$(\Delta p)^2 = m^2 (\Delta v)^2 = \frac{m^2}{v^2} [(V\mathbf{v})^2 + (V\mathbf{v}')^2 - 2(V\mathbf{v})(V\mathbf{v}')].$$

La media di questa espressione si calcola in due tappe. Prima di tutto, calcoliamo la media rispetto alla distribuzione (di Maxwell) delle velocità molecolari \mathbf{V} . Essendo questa distribuzione isotropa, abbiamo $\langle V_\alpha V_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \langle V^2 \rangle / 3$, e il quadrato medio è $\langle V^2 \rangle = 3T/M$. Perciò otteniamo

$$(\Delta p)^2 = \frac{m^2 T}{M v^2} (v^2 + v'^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}') \approx \frac{2m^2 T}{M} (1 - \cos \alpha). \quad (22,2)$$

Ora si deve calcolare la media rispetto agli urti cui è soggetto l'elettrone nell'unità di tempo; ciò si realizza integrando rispetto a $Nv d\sigma$:

$$B = \frac{Nm^2 v \sigma_t T}{M} = \frac{pmT}{Ml}, \quad (22,3)$$

dove $\sigma_t = \int (1 - \cos \alpha) d\sigma$ è la sezione di trasporto e l la lunghezza del cammino libero medio, definito come

$$l = 1/N\sigma_t \quad (22,4)$$

(nel caso generale l è una funzione di p). Quindi, il flusso che figura nella (22,1) vale

$$s = -\frac{mp}{Ml} \left(v f + T \frac{\partial f}{\partial p} \right). \quad (22,5)$$

Notiamo che secondo la (22,2) la variazione di energia dell'elettrone per un urto è $\Delta \epsilon \sim \bar{v} \Delta p \sim T (m/M)^{1/2} \sim \bar{\epsilon} (m/M)^{1/2}$. Perciò una variazione sensibile di questa energia si verifica soltanto in seguito a $\sim M/m$ urti, mentre la direzione della quantità di moto cambia notevolmente già per un solo urto. In altre parole, il tempo di rilassamento rispetto alle energie degli elettroni è $\tau_\epsilon \sim \tau_p M/m$, dove $\tau_p \sim l/\bar{v}$ è il tempo di rilassamento rispetto alle direzioni delle quantità di moto.

Si deve trasformare nelle variabili p e θ anche il primo membro dell'equazione (22,1):

$$eE \frac{\partial f}{\partial p} = eE \frac{\partial f}{\partial p_z} = eE \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\sin^2 \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \right]. \quad (22,6)$$

La soluzione dell'equazione cinetica così costruita si può cercare sotto forma di sviluppo in polinomi di Legendre:

$$f(p, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p) P_n(\cos \theta). \quad (22,7)$$

Vedremo più avanti che i termini successivi di questo sviluppo decrescono rapidamente come ordine di grandezza. Perciò è sufficiente limitarsi ai due primi termini dello sviluppo

$$f(p, \theta) = f_0(p) + f_1(p) \cos \theta. \quad (22,8)$$

Con la sostituzione della (22,8), l'integrale nella (22,1) dà

$$\int [f(p, \theta') - f(p, \theta)] d\sigma = -f_1 \sigma_t \cos \theta$$

(si veda la trasformazione dello stesso integrale nella (11,4)), dopo di che l'equazione cinetica assume la forma

$$-eE \left[f'_0 \cos \theta + f'_1 \cos^2 \theta + \frac{f_1}{p} \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{p^2} (s_0 p^2)' + \frac{v}{l} f_1 \cos \theta = 0,$$

dove l'apice significa la derivazione rispetto a p ; qui è omissa il termine $p^{-2} (s_1 p^2)' \cos \theta$ che è piccolo automaticamente (nel rapporto $\sim m/M$) rispetto al termine $(v f_1/l) \cos \theta$ (le s_0 e s_1 sono l'espressione (22,5) con f_0 o f_1 al posto di f). Moltiplicando questa equazione per $P_0 = 1$ o $P_1 = \cos \theta$ ed integrandola rispetto a $d \cos \theta$, otteniamo due equazioni:

$$\frac{1}{p^2} (p^2 S)' = 0, \quad S = -\frac{1}{lM} (p^2 f_0 + m p T f'_0) - \frac{eE}{3} f_1, \quad (22,9)$$

$$f_1 = \frac{eEl}{v} f'_0. \quad (22,10)$$

L'espressione S rappresenta la densità del flusso di particelle nello spazio dei vettori quantità di moto, modificato dal campo elettrico. Dalla (22,9) segue che $S = \text{costante}/p^2$. Ma il flusso S deve essere finito per tutti i valori p ; perciò costante = 0. Sostituendo ora f_1 dalla (22,10) nell'equazione $S = 0$, troviamo l'equazione che definisce la funzione $f_0(p)$:

$$\left[pT + \frac{(eEl)^2 M}{3p} \right] f'_0 + \frac{p^2}{m} f_0 = 0. \quad (22,11)$$

Finora non abbiamo avanzato nessuna ipotesi sulla forma della funzione $l(p)$, e l'integrale dell'equazione del primo ordine (22,11)

può essere scritto con una funzione $l(p)$ arbitraria. Per ottenere risultati più concreti supponiamo $l = \text{costante}$, il che equivale all'ipotesi che la sezione σ_i sia indipendente dalla quantità di moto ¹⁾. Allora l'integrazione dell'equazione (22,11) dà

$$f_0(p) = \text{costante} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{T} + \frac{\gamma^2}{6} \right)^{\gamma^2/6} e^{-\varepsilon/T}, \quad (22,12)$$

dove

$$\gamma = \frac{eEl}{T} \sqrt{\frac{M}{m}}. \quad (22,13)$$

Per la funzione $f_1(p)$ dalle (22,10) e (22,12) abbiamo

$$f_1 = -f_0 \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{\gamma \varepsilon / T}{\varepsilon / T + \gamma^2 / 6}. \quad (22,14)$$

La grandezza γ è un parametro che caratterizza il grado di influsso del campo sulla distribuzione degli elettroni. Il caso limite di campi deboli corrisponde alla disuguaglianza $\gamma \ll 1$. In prima approssimazione $f_0(p)$ si riduce in questo caso alla distribuzione imperturbata di Maxwell ($f_0 \propto e^{-\varepsilon/T}$, $\bar{\varepsilon} = 3T/2$), e

$$f_1 = -\frac{eEl}{T} f_0, \quad \gamma \ll 1. \quad (22,15)$$

La corrente elettrica generata nel gas è definita dalla mobilità elettronica

$$b = \frac{\bar{v}_z}{-eE} = \frac{1}{-eEN_e} \int v \cos \theta \cdot f d^3p = -\frac{1}{3eEN_e} \int v f_1 d^3p \quad (22,16)$$

(N_e è la densità del numero di elettroni) ²⁾. Un semplice calcolo, con f_1 ottenuta dalla (22,15), dà per la mobilità in un campo debole

$$b_0 = \frac{2^{3/2} l}{3\pi^{1/2} (mT)^{1/2}} \quad (22,17)$$

Come ci si doveva aspettare, questa espressione verifica la relazione di Einstein $D = bT$, dove D è il coefficiente di diffusione (11,10).

Il significato della disuguaglianza $\gamma \ll 1$, quale criterio di debolezza del campo diventa chiaro dalle considerazioni semplici seguenti. È evidente che l'influenza del campo sulla distribuzione degli elettroni sarà debole finché l'energia acquisita dall'elettrone durante

¹⁾ In ogni caso ciò è valido per temperature degli elettroni sufficientemente basse, poiché per particelle lente la sezione tende a un limite indipendente dall'energia (si veda III, § 132).

²⁾ Notiamo che per l'ortogonalità di due diversi polinomi di Legendre, fra tutti i termini dello sviluppo (22,7) un contributo all'integrale di normalizzazione lo dà il solo termine f_0 , e un contributo a \bar{v}_z è fornito dal solo termine $f_1 \cos \theta$.

il suo cammino libero è piccola rispetto all'energia da esso ceduta a un atomo in seguito a un urto. La prima di queste energie è eEl , e la seconda

$$\delta\varepsilon \sim V\delta P \sim Vp \sim \sqrt{\frac{T}{M}} \sqrt{Tm}$$

(P e V sono la quantità di moto e la velocità dell'atomo; la variazione δP è dell'ordine di grandezza della quantità di moto dell'elettrone). Il confronto di ambedue le espressioni fornisce il criterio cercato. Nel caso contrario di campi forti ($\gamma \gg 1$) troviamo ¹⁾

$$f_0(p) = A \exp\left(-\frac{3\varepsilon^2}{\gamma^2 T^2}\right), \quad A = \frac{3^{3/4} N_e}{2^{3/2} \pi \Gamma(3/4) (m\gamma T)^{3/2}}, \quad (22,18)$$

$$f_1 = -6 \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{\varepsilon}{T\gamma} f_0. \quad (22,19)$$

L'energia media degli elettroni è

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2M}{3m}} \Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) eEl = 0,43eEl \sqrt{\frac{M}{m}}, \quad (22,20)$$

e la loro mobilità

$$b = \frac{4\Gamma(5/4) l^{1/2}}{3^{3/4} \pi^{1/2} (mM)^{1/4} (eE)^{1/2}}. \quad (22,21)$$

Resta da precisare il criterio di convergenza dello sviluppo (22,7). A tal fine osserviamo che i termini successivi sono legati, come ordine di grandezza, dalla relazione

$$\frac{eE}{mv} f_{n-1} \sim \frac{v}{l} f_n \quad (22,22)$$

(dopo la sostituzione della (22,7), la moltiplicazione per $P_n(\cos \theta)$ e l'integrazione rispetto a $d \cos \theta$, a primo membro dell'equazione cinetica resta il termine con f_{n-1} e nell'integrale degli urti soltanto quello con f_n). Per $\gamma \ll 1$ l'energia media dell'elettrone vale $\bar{\varepsilon} \sim T$ e dalla (22,22) ricaviamo

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{eEl}{T} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1.$$

Nel caso di campi forti, quando $\gamma \gg 1$, l'energia media vale $\bar{\varepsilon} \sim eEl (M/m)^{1/2}$ in modo che riotteniamo

$$f_n/f_{n-1} \sim (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

¹⁾ È più semplice ottenere la formula (22,18) risolvendo di nuovo l'equazione (22,11) (ponendo $T = 0$) anziché mediante un passaggio al limite nella (22,12).

Quindi, la convergenza dello sviluppo è garantita dalla piccolezza del rapporto m/M^1).

§ 23. *Fluttuazioni in un gas debolmente ionizzato non in equilibrio*

Consideriamo qui le fluttuazioni della funzione di distribuzione degli elettroni in uno stato stazionario di non equilibrio di un gas debolmente ionizzato; il gas è spazialmente omogeneo e si trova nel campo elettrico omogeneo costante E .

Ci interesseremo alla sola correlazione temporale e non spaziale delle fluttuazioni. Allora ha senso introdurre al posto della funzione esatta (fluttuante) dipendente dalle coordinate, la funzione

$$f(t, p) = \frac{1}{V} \int f(t, r, p) d^3r \quad (23,1)$$

la cui media si calcola su tutto il volume del gas (in questo paragrafo la indicheremo con f , senza l'argomento r); questa funzione fluttua unicamente con il tempo. La funzione $\bar{f}(p)$, invece, rispetto alla quale fluttua f , rappresenta la distribuzione (22,8) trovata al paragrafo precedente.

Per il sistema considerato presentano interesse particolare non tanto le fluttuazioni della funzione di distribuzione in se stessa, quanto le fluttuazioni della densità di corrente elettrica j legate ad esse. I correlatori di queste grandezze sono interconnessi dalla formula evidente

$$\langle \delta j_\alpha(t) \delta j_\beta(0) \rangle = e^2 \int \langle \delta f(t, p) \delta f(0, p') \rangle v_\alpha v'_\beta d^3p d^3p', \quad (23,2)$$

dove ovviamente δj rappresenta la fluttuazione media della densità di corrente, calcolata su tutto il volume del gas ²⁾.

La soluzione del problema per un gas non in equilibrio è basata sul metodo generale dato al § 20 ³⁾.

Secondo questo metodo, il correlatore $\langle \delta f(t, p) \delta f(0, p') \rangle$ soddisfa (rispetto alle variabili t e p) l'equazione cinetica (22,1) che, quindi, svolge il ruolo della (20,13) del metodo generale. Oltre a questo corre-

¹⁾ Notiamo, tuttavia, che le correzioni f_2, f_3, \dots non si potrebbero definire mediante l'equazione (22,1), poiché in quest'ultima è stata usata l'approssimazione di Fokker-Planck, in cui le grandezze di potenza più elevata in m/M sono state già trascurate.

²⁾ Questa media corrisponde all'impostazione dell'esperimento in cui si misurano le fluttuazioni della corrente totale nel gas: la fluttuazione della corrente totale è uguale alla fluttuazione della densità media di corrente in una data direzione, moltiplicata per la sezione del campione.

³⁾ Lo studio di questo problema da parte di *P.J. Price* (1959) fu il primo esempio di calcolo delle fluttuazioni in un sistema non in equilibrio. Diamo qui il metodo proposto da *V.L. Gurevič* e *R. Katiljus* (1965).

latore, la stessa equazione è verificata anche dalla funzione

$$g(t, p) = \int \langle \delta f(t, p) \delta f(0, p') \rangle v' d^3 p', \quad (23,3)$$

mediante la quale si esprime, a sua volta, il correlatore della corrente cercato:

$$\langle \delta j_\alpha(t) \delta j_\beta(0) \rangle = e^2 \int g_\beta(t, p) v_\alpha d^3 p. \quad (23,4)$$

Abbiamo così l'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial t} - e \left(\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial p} \right) g = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 B \left(\frac{v}{T} g + \frac{\partial g}{\partial p} \right) \right] - Nv \int [g(t, p, \theta) - g(t, p, \theta')] d\sigma \quad (23,5)$$

con B ottenuto dalla (22,3).

L'equazione cinetica (22,4) tiene conto degli urti tra elettroni e molecole, ma non tra i soli elettroni. Perciò qui non esiste un meccanismo che stabilisca la correlazione simultanea tra elettroni con quantità di moto diverse, e la condizione « iniziale » per la funzione $g(t, p)$ sarà la stessa che in stato di equilibrio. Poiché trattiamo la fluttuazione della funzione di distribuzione, la cui media è calcolata su tutto il volume del gas, dobbiamo tener conto della costanza del numero di particelle (elettroni)¹⁾. Per questa ipotesi in accordo con la (20,17) abbiamo

$$\langle \delta f(0, p) \delta f(0, p') \rangle = \frac{1}{\varphi_0} \left[\bar{f}(p) \delta(p - p') - \frac{1}{N_e} \bar{f}(p) \bar{f}(p') \right]$$

(N_e è la densità di elettroni), da cui per la funzione iniziale ricaviamo

$$g(0, p) = \frac{1}{\varphi_0} \bar{f}(p) (v - V), \quad (23,6)$$

dove V è la velocità media degli elettroni nello stato con distribuzione $\bar{f}(p)$. La velocità V è diretta, ovviamente, lungo il campo E ; scriviamola nella forma

$$V = -ebE, \quad (23,7)$$

¹⁾ Interessandoci la sola influenza sulle fluttuazioni dello stato di non equilibrio, legato alla presenza di un campo, trascuriamo le fluttuazioni del numero totale di elettroni, dovute a processi di ionizzazione e di ricombinazione. A rigore, queste fluttuazioni possono non esistere nel caso in cui tutti gli elettroni siano formati da impurità con piccolo potenziale di ionizzazione; allora il numero totale di elettroni coincide semplicemente con il numero totale di atomi delle impurità. Si trascurano anche le fluttuazioni della concentrazione di molecole neutre. La fluttuazione relativa di questa concentrazione è piccola a priori rispetto a quella per gli elettroni, poiché la concentrazione di elettroni è notevolmente inferiore alla concentrazione di molecole.

dove b è la mobilità. La costanza del numero totale di elettroni significa anche che $\int \delta f d^3p = 0$ e perciò

$$\int g(t, p) d^3p = 0. \quad (23,8)$$

Seguendo il metodo descritto al § 19, applichiamo all'equazione (23,5) la trasformazione unilaterale di Fourier, cioè la moltiplichiamo per $e^{i\omega t}$ e la integriamo rispetto a t nell'intervallo da 0 a ∞ . Inoltre il termine $e^{i\omega t} \partial g / \partial t$ si trasforma per parti tenendo conto della condizione iniziale (23,6) e della condizione $g(\infty, p) = 0$. Come risultato otteniamo l'equazione

$$-i\omega g^{(+)} - e \left(E \frac{\partial}{\partial p} \right) g^{(+)} - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{mT p^3}{Ml} \left(\frac{v}{T} g^{(+)} + \frac{\partial g^{(+)}}{\partial p} \right) \right] + \\ + N_e v \int [g^{(+)}(p) - g^{(+)}(p')] d\sigma = \frac{1}{\gamma_0} \bar{f}(p) (v - V), \quad (23,9)$$

dove

$$g^{(+)}(\omega, p) = \int_0^\infty e^{i\omega t} g(t, p) dt. \quad (23,10)$$

In virtù della (23,8) questa equazione deve essere risolta per la condizione supplementare

$$\int g^{(+)}(\omega, p) d^3p = 0. \quad (23,11)$$

Trovata la soluzione dell'equazione (23,9), lo sviluppo spettrale cercato del correlatore delle correnti si può trovare mediante una semplice integrazione. Scriviamo infatti

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \int_{-\infty}^\infty dt \int e^{i\omega t} \langle \delta f(t, p) \delta f(0, p') \rangle v_\alpha v'_\beta d^3p d^3p'$$

e, agendo in seguito analogamente alla deduzione della (19,14), otteniamo

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = e^2 \int \{ g_\beta^{(+)}(\omega, p) v_\alpha + g_\alpha^{(+)}(-\omega, p) v_\beta \} d^3p. \quad (23,12)$$

Per rendere più concreto il ragionamento, supporremo più avanti la lunghezza del cammino libero l costante. In stato di equilibrio, quando non esiste campo elettrico, la funzione \bar{f} è la distribuzione di equilibrio di Maxwell $f_0(p)$. Allora la soluzione dell'equazione (23,9) si scrive

$$g^{(+)} = \frac{p}{p} \frac{f_0(p)}{\gamma_0} \frac{l}{1 - i\omega l/v}, \quad (23,13)$$

il che è facile capire osservando che

$$\int (\mathbf{p} - \mathbf{p}') d\sigma = \sigma_i \mathbf{p}. \quad (23,14)$$

Se $\omega \tau_p \ll 1$ (dove $\tau_p \sim l/v_T$ è il tempo di rilassamento nelle direzioni della quantità di moto), allora nella (23,13) si può trascurare il termine $-i\omega l/v$ al denominatore. Il calcolo dell'integrale (23,12) dà

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{2T\sigma}{\mathcal{V}\omega} \delta_{\alpha\beta}, \quad (23,15)$$

dove $\sigma = e^2 N_e b_0$ è la conduttività del gas in un campo debole, b_0 la mobilità in un campo debole data dalla formula (22,17). Il risultato (23,15) corrisponde, ovviamente, alla formula generale di Nyquist per le fluttuazioni d'equilibrio di una corrente (si veda IX, § 78). Consideriamo infatti un volume cilindrico di gas lungo l'asse x . Poiché la densità media di corrente è stata già calcolata su tutto il volume, la corrente totale è $J = j_x S$, dove S è l'area della sezione del cilindro. Allora dalla (23,15) ricaviamo

$$(J^2)_\omega = \frac{2T\sigma S^2}{\mathcal{V}\omega} = \frac{2T\sigma S}{L} = \frac{2T}{R}, \quad (23,16)$$

dove $L = \mathcal{V}/S$ è la lunghezza del campione e $R = L/\sigma S$ la sua resistenza ¹⁾.

Per $E \neq 0$ l'equazione (23,9) si risolve con il metodo delle approssimazioni successive, analogamente alla soluzione dell'equazione (22,6). Ma mentre l'equazione (22,6) definiva una funzione scalare, l'equazione (23,9) è scritta per una funzione vettoriale. I primi termini dello sviluppo di questa funzione (dipendente da due vettori, ossia dalla costante E e dalla variabile \mathbf{p}) li scriviamo nella forma

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p}) = h(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{n} + e \{g_0(\omega, \mathbf{p}) + \text{neg}_1(\omega, \mathbf{p})\}, \quad (23,17)$$

dove $g_1 \ll g_0$ (qui $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, $e = E/E$). La funzione $\bar{f}(\mathbf{p})$, invece, vale

$$\bar{f}(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \text{ne} f_1(\mathbf{p}) \quad (23,18)$$

con f_0 e $f_1 = eElf'_0/v$ calcolate al paragrafo precedente.

Poniamo le (23,17-18) nell'equazione (23,9) e separiamo in essa i termini pari e dispari rispetto a \mathbf{p} . Ponendo di nuovo $\omega \tau_p \ll 1$, otteniamo riunendo i termini dispari

$$\frac{v}{l} \{h\mathbf{n} + g_1 e(\text{ne})\} - e \left(e \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}} \right) eE = \frac{f_0 v}{\mathcal{V}\omega};$$

¹⁾ Confrontando con la formula (78,1) in IX, si deve tener conto che $\hbar\omega \ll T$ e che in virtù della condizione $\omega \tau_p \ll 1$ non esiste dispersione della conduttività, cosicché $Z = R$.

qui abbiamo omissi i termini piccoli a priori (nel rapporto m/M) rispetto a quelli scritti. Di qui

$$h(p) = \frac{l}{\gamma^2} f_0(p), \quad g_1(\omega, p) = \frac{eElm}{p} \frac{\partial g_0(\omega, p)}{\partial p}. \quad (23,19)$$

Quanto ai termini pari rispetto a p , essi devono verificare l'equazione (23,9) soltanto dopo il calcolo della media lungo le direzioni p , in quanto l'espressione (23,17) fornisce unicamente i primi termini dello sviluppo della funzione cercata. Dopo un calcolo semplice (utilizzando le espressioni (23,19)) otteniamo la seguente equazione per la funzione $g_0(\omega, p)$:

$$-i\omega g_0 + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 S) = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ eEbf_0 + \frac{2eEl}{3p} \frac{\partial}{\partial p} pf_0 \right\}, \quad (23,20)$$

dove

$$S = -\frac{1}{lM} \left(p^2 g_0 + m p T \frac{\partial g_0}{\partial p} \right) - \frac{e^2 E^2 l m}{3p} \frac{\partial g_0}{\partial p}.$$

Questa equazione va risolta per la condizione supplementare

$$\int g_0(\omega, p) d^3 p = 0, \quad (23,21)$$

alla quale si riduce la (23,11) sostituendovi la (23,17).

In base alla funzione nota $g^{(+)}$ il correlatore della corrente cercato è definito dalla formula (23,12). Sostituendovi lo sviluppo (23,17) e con una semplice trasformazione mediante la (23,19) si ottiene

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \delta_{\alpha\beta} \frac{2e^2 l}{3\gamma^2} \int v f_0 d^3 p - \\ - E_\alpha E_\beta \frac{2le^3}{3E} \int [g_0(\omega, p) + g_0(-\omega, p)] \frac{d^3 p}{p}. \quad (23,22)$$

Il termine $-i\omega g_0$ nell'equazione (23,20) diventa essenziale per $\omega \sim mv/Ml$, cioè per $\omega\tau_e \sim 1$, dove τ_e è il tempo di rilassamento rispetto alle energie degli elettroni. Quindi, a partire da queste frequenze inizia la dispersione delle fluttuazioni della corrente.

Nel caso generale l'equazione (23,20) è molto complicata. Per illustrarla limitiamoci al caso di frequenze piccole, $\omega\tau_e \ll 1$, e di campi forti, soddisfacenti la condizione $\gamma \gg 1$, dove γ è il parametro (22,13). In virtù dell'ultima condizione la funzione $f_0(p)$ è definita dall'espressione (22,18). Il calcolo dell'integrale del primo termine nella (23,22) dà

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{2^{3/2}}{3^{5/4} \Gamma(3/4)} \frac{N_e e^2 l}{\gamma^2} \left(\frac{eEl}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{m} \right)^{1/4}.$$

Nel secondo termine della (23,22) limitiamoci a una stima letterale. Dall'equazione (23,20) (senza il termine $-i\omega g_0$) ricaviamo la stima

$$g_0 \sim \frac{eEl^2M}{\sqrt{\omega} p^2} f_0.$$

In seguito si trova la seguente stima dell'integrale:

$$e^3 l E \frac{g_0}{p} p^3.$$

Come risultato otteniamo per il correlatore della corrente l'espressione

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{N_e e^2 l}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{eEl}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{m} \right)^{1/4} \left[0,6\delta_{\alpha\beta} - \beta \frac{E_\alpha E_\beta}{E^2} \right], \quad (23,23)$$

dove $\beta \sim 1$ è una costante numerica.

§ 24. Ricombinazione e ionizzazione

Per stabilire il grado di equilibrio della ionizzazione in un gas parzialmente ionizzato si ricorre ai vari atti elementari di ionizzazione da urto e di ricombinazione inversa delle particelle cariche collidenti. Nel caso più semplice, in cui nel gas (oltre agli elettroni) esiste una sola specie di ioni, il processo con cui si stabilisce l'equilibrio di ionizzazione è descritto da un'equazione della forma

$$\frac{dN_e}{dt} = \beta - \alpha N_e N_i. \quad (24,1)$$

Qui β è il numero di elettroni che si formano in 1 s in 1 cm³ (per urti tra atomi neutri o per ionizzazione di atomi causata da fotoni); questo numero non dipende dalle densità esistenti di elettroni N_e e di ioni N_i . Il secondo termine dà la diminuzione del numero di elettroni dovuta alla loro ricombinazione con gli ioni; la grandezza α si chiama *coefficiente di ricombinazione*.

Il processo di ricombinazione, di solito, è assai lento rispetto agli altri processi, con i quali si stabilisce l'equilibrio nel plasma. Il fatto è che la formazione di un atomo neutro per l'urto tra uno ione e un elettrone richiede che l'energia liberata (l'energia di legame dell'elettrone nell'atomo) sia trasportata via. Questa energia può essere irradiata sotto forma di fotone (ricombinazione radiante); in questo caso la lentezza del processo è dovuta al fatto che la probabilità quantoelettromeccanica di irraggiamento è esigua. L'energia liberata può anche essere trasmessa a una terza particella, cioè a un atomo neutro; in questo caso la lentezza del processo è dovuta alla piccola probabilità di urti tripli. Tutto ciò rende opportuno studiare la ricombinazione nelle condizioni in cui la distribuzione di tutte le particelle può essere considerata del tipo di Maxwell.

In stato di equilibrio la derivata dN_e/dt si annulla. Ne segue che le grandezze α e β nella (24,1) sono legate mutuamente dalla relazione

$$\beta = \alpha N_{0e} N_{0i}, \quad (24,2)$$

dove N_{0e} e N_{0i} sono le densità di equilibrio di elettroni e di ioni, definite dalle formule termodinamiche corrispondenti (si veda V, § 104)¹⁾.

Il coefficiente di ricombinazione radiante si calcola direttamente rispetto alla sezione di ricombinazione σ_{ric} per l'urto di un elettrone con uno ione fisso (si può trascurare la velocità dello ione rispetto a quella dell'elettrone),

$$\alpha = \langle v_e \sigma_{ric} \rangle, \quad (24,3)$$

dove la media si calcola rispetto alla distribuzione di Maxwell delle velocità dell'elettrone v_e (si veda il problema 1).

La ricombinazione radiante è importante, tuttavia, soltanto in un gas sufficientemente rarefatto, quando gli urti tripli tra le particelle si possono completamente trascurare. In un gas meno rarefatto il meccanismo fondamentale è rappresentato dalla ricombinazione con partecipazione di una terza particella, cioè di un atomo neutro. Ora, consideriamo questo meccanismo in dettaglio.

L'energia dell'elettrone nell'urto con gli atomi cambia a piccole porzioni. Perciò il processo di ricombinazione inizia con il formarsi di un atomo fortemente eccitato, e negli urti successivi di questo atomo si verifica una « discesa » graduale dell'elettrone a livelli sempre più bassi. Questo carattere del processo consente di considerarlo come « diffusione rispetto all'energia » dell'elettrone catturato e, quindi, applicare ad esso l'equazione di Fokker-Planck (L.P. Pitaevskij, 1962).

Introduciamo la funzione di distribuzione delle energie (negative) ε degli elettroni catturati. Il ruolo principale lo svolgerà, naturalmente, la « diffusione » rispetto alla regione di energie $|\varepsilon| \sim T$. Ricordiamo, a questo proposito, che la temperatura va supposta qui in ogni caso piccola rispetto al potenziale di ionizzazione degli atomi I ; per $T \sim I$ il gas sarebbe praticamente tutto ionizzato (si veda V, § 104).

L'equazione di Fokker-Planck è

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial s}{\partial \varepsilon}, \quad s = -B \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - Af. \quad (24,4)$$

Come al solito, il coefficiente A si può esprimere in funzione di B con la condizione $s = 0$ per $f = f_0$, dove f_0 è la distribuzione di

¹⁾ Nel caso della ricombinazione radiante, lo stato di equilibrio presuppone anche l'equilibrio dell'irraggiamento nel plasma.

equilibrio. Dopo questa operazione il flusso s assume la forma

$$s = -Bf_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{f}{f_0}. \quad (24,5)$$

Il « coefficiente di diffusione » $B(\varepsilon)$ è definito secondo la regola generale come

$$B(\varepsilon) = \frac{\sum_1 (\Delta \varepsilon)^2}{2\delta t}, \quad (24,6)$$

dove $\Delta \varepsilon$ è la variazione dell'energia di eccitazione dell'atomo in seguito all'urto con un atomo non eccitato; il calcolo di $B(\varepsilon)$ secondo questa formula si riduce alla soluzione del problema meccanico dell'urto e all'ulteriore calcolo della media rispetto alla velocità dell'atomo non eccitato (si veda il problema 2).

Per trovare la funzione $f_0(\varepsilon)$ osserviamo che la distribuzione d'equilibrio delle quantità di moto e delle coordinate dell'elettrone in un campo coulombiano di carica ze (carica dello ione) è data dalla formula di Boltzmann

$$f_0(p, r) = (2\pi mT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/T}, \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \quad (24,7)$$

(per la sua normalizzazione si veda più avanti); il moto dell'elettrone per $|\varepsilon| \sim T \ll I$ è quasi-classico, ciò che permette di usare per l'energia ε la sua espressione classica. Quindi, la funzione di distribuzione di ε si scrive

$$f_0(\varepsilon) d\varepsilon = (2\pi mT)^{-3/2} e^{|\varepsilon|/T} \tau(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (24,8)$$

dove $\tau(\varepsilon)$ è il volume dello spazio delle fasi corrispondente all'intervallo $d\varepsilon$

$$\tau(\varepsilon) = \int \delta \left(|\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \right) d^3x d^3p. \quad (24,9)$$

Sostituendovi $d^3x d^3p = 4\pi r^2 dr \cdot 4\pi p^2 dp$ e integrando, otteniamo

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2} \pi^3 (ze^2)^3 m^{3/2}}{|\varepsilon|^{5/2}}. \quad (24,10)$$

Per formulare le condizioni che definiscono la soluzione per noi necessaria delle equazioni (24,4-5), è comodo supporre che la densità esistente di elettroni $N_e \gg N_{oe}$; allora nella (24,1) si può trascurare la velocità di ionizzazione β in modo che la diminuzione di N_e sarà definita dalla sola ricombinazione. In queste condizioni il valore costante del flusso s nella soluzione stazionaria dell'equazione (24,4) fornisce immediatamente il valore del coefficiente di ricombinazione ($s = \text{costante} = -\alpha$), purché la funzione $f(\varepsilon)$ sia normalizzata in modo appropriato. Precisamente, ai livelli più alti

($|\varepsilon| \ll T$) gli elettroni sono in equilibrio con gli elettroni liberi; ciò significa che deve essere

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{per } |\varepsilon| \rightarrow 0, \quad (24,11)$$

e inoltre la normalizzazione di $f_0(\varepsilon)$ deve corrispondere a un elettrone libero nell'unità di volume (cioè che è stato realizzato nella (24,7)).

Per trovare la seconda condizione al contorno (per $\varepsilon \rightarrow -\infty$) osserviamo che la distribuzione sui livelli interni dell'atomo eccitato non è perturbata dalla presenza di elettroni liberi e non dipende dal loro numero; essa è proporzionale al numero d'equilibrio N_{0e} e non al numero effettivo N_e . Per la condizione $N_e \gg N_{0e}$ questa situazione è espressa dalla condizione al contorno

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{per } |\varepsilon| \rightarrow \infty. \quad (24,12)$$

Integrando l'equazione $s = \text{costante}$ con la condizione al contorno (24,11) abbiamo

$$\frac{f}{f_0} = \text{costante} \int_0^{|\varepsilon|} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} + 1.$$

La costante coinciderà con $-\alpha$ se essa è definita in modo tale che sia soddisfatta la condizione (24,12). Troviamo così finalmente

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} = \frac{2T^{3/2}}{\pi^{3/2}(ze^2)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\varepsilon|/T} |\varepsilon|^{5/2}}{B(-|\varepsilon|)} d|\varepsilon|. \quad (24,13)$$

Questa formula si riferisce al processo in cui il « terzo corpo » è un atomo non eccitato. Se il gas è già fortemente ionizzato (il che è compatibile, tuttavia, con la condizione $T \ll I$) e sufficientemente denso, il ruolo principale può passare alla ricombinazione, con la partecipazione di un secondo elettrone quale terzo corpo. Allora la velocità di ricombinazione diventa proporzionale a $N_e^2 N_i$, in modo che il coefficiente di ricombinazione, definito come prima dalla (24,1), sarà proporzionale esso stesso a N_e . Poiché il rilassamento rispetto all'energia per urti tra elettroni si verifica rapidamente, il suddetto metodo di calcolo del coefficiente di ricombinazione è inapplicabile in questo caso.

PROBLEMI

1. Trovare il coefficiente di ricombinazione radiante con la cattura dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, per temperature $T \ll I$ ($I = e^4 m / 2\hbar^2$ è il potenziale di ionizzazione dell'atomo d'idrogeno).

Soluzione. La sezione di ricombinazione di un elettrone lento con il protone fisso nel livello fondamentale dell'atomo d'idrogeno è

$$\sigma_{\text{ric}} = \frac{2^{10} \pi^2 (e^2/\hbar c) a_B^2 I^2}{3(2,71 \dots)^4 m^2 c^2 v_e^2},$$

dove v_e è la velocità dell'elettrone, $a_B = \hbar^2/mc^2$ è il raggio di Bohr (si veda IV, § 56, formule (56,13) e (56,14)). Il valore medio è $\langle v_e^{-1} \rangle = (2m/\pi T)^{1/2}$. In accordo con la (24,3) otteniamo finalmente

$$\alpha = \frac{2^{10}\pi^{3/2}}{3(2,71)^4} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{a_B^3 I}{\hbar} \left(\frac{I}{T}\right)^{1/2} = 35 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{a_B^3 I}{\hbar} \left(\frac{I}{T}\right)^{1/2}.$$

2. Definire il coefficiente di ricombinazione secondo la (24,13), trascurando l'influenza del legame dell'elettrone nell'atomo eccitato sul processo del suo urto con un atomo non eccitato e supponendo la sezione di trasporto di questi urti indipendente dalla velocità.

Soluzione. Il « coefficiente di diffusione » $B(\varepsilon)$ si calcola così come al § 22 e vale

$$B(\varepsilon) = \frac{N}{3m} \langle v_{at}^2 \rangle \langle \sigma_t p^3 \rangle. \quad (1)$$

Qui N è la densità di atomi nel gas, m la massa dell'elettrone, v_{at} la velocità relativa dell'atomo eccitato e non eccitato. Le velocità v_{at} sono distribuite secondo Maxwell, con la massa ridotta ($M/2$, dove M è la massa dell'atomo) quale massa della particella; perciò $\langle v_{at}^2 \rangle = 6T/M$. Inoltre, p nella (1) rappresenta la quantità di moto dell'elettrone nel campo dello ione; il calcolo della media di $\sigma_t p^3$ si effettua sulla regione dello spazio delle fasi dell'elettrone $\tau(\varepsilon)$ corrispondente a $|\varepsilon|$ dato. Per $\sigma_t =$ costante troviamo

$$\langle \sigma_t p^3 \rangle = \frac{\sigma_t}{\tau(\varepsilon)} \int p^3 \delta \left(|\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \right) d^3x d^3p = \frac{32\sqrt{2}}{3\pi} \sigma_t m |\varepsilon|^{3/2}.$$

Quindi,

$$B = \frac{64\sqrt{2} T \sigma_t N |\varepsilon|^{3/2}}{3\pi M},$$

e in seguito il calcolo, in base alla (24,13), dà finalmente

$$\alpha = \frac{32\sqrt{2\pi} m^{1/2} (ze^2)^3 \sigma_t N}{3MT^{5/2}}. \quad (2)$$

È legittimo trascurare il legame dell'elettrone nell'atomo, se la frequenza dell'eccitazione generata dall'atomo nell'intorno dell'elettrone ($\sim d/v_{at}$, d sono le dimensioni atomiche) è grande rispetto alla frequenza di rotazione dell'elettrone con energia $|\varepsilon| \sim T$. Di qui ricaviamo la condizione $T \ll (e^2/d) (m/M)^{1/2}$.

§ 25. Diffusione ambipolare

Consideriamo la diffusione di particelle cariche in un gas debolmente ionizzato. Così come al § 22, il grado di ionizzazione è supposto talmente piccolo che gli urti reciproci tra le particelle cariche si possono trascurare rispetto ai loro urti con gli atomi neutri. Ma anche per queste ipotesi la diffusione di due specie di particelle cariche — elettroni e ioni — si verifica in modo non indipendente, in quanto in seguito al processo di diffusione si crea un campo elettrico (*W. Schottky*, 1924).

Le equazioni della diffusione hanno la forma di equazioni di continuità per elettroni (e) e ioni (i):

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div } i_e = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \text{div } i_i = 0, \quad (25,1)$$

dove le densità dei flussi si esprimono in funzione delle densità del numero di particelle e dei loro gradienti secondo le formule

$$\begin{aligned} i_e &= -N_e b_e e E - D_e \nabla N_e, \\ i_i &= N_i b_i e E - D_i \nabla N_i; \end{aligned} \quad (25,2)$$

D_e , D_i sono i coefficienti di diffusione e b_e , b_i le mobilità degli elettroni e degli ioni ¹⁾, legati a loro volta dalle relazioni di Einstein

$$D_e = T b_e, \quad D_i = T b_i, \quad (25,3)$$

che esprimono la condizione di scomparsa dei flussi (25,2) in equilibrio. Tenendo conto di queste relazioni ed esprimendo l'intensità del campo in funzione del suo potenziale ($E = -\nabla\varphi$), riscriviamo le equazioni (25,1) nella forma

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \operatorname{div} \left[\nabla N_e - \frac{e N_e}{T} \nabla \varphi \right], \quad (25,4)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \operatorname{div} \left[\nabla N_i + \frac{e N_i}{T} \nabla \varphi \right]. \quad (25,5)$$

A queste ultime bisogna aggiungere l'equazione di Poisson per il potenziale

$$\Delta \varphi = -4\pi e (N_i - N_e). \quad (25,6)$$

Il sistema di equazioni (25,4-6) si semplifica notevolmente se le distribuzioni delle concentrazioni N_e e N_i sono quasi omogenee. Allora nei coefficienti di $\nabla\varphi$ nelle (25,4-5) si può porre $N_e \approx N_i \approx \approx \text{costante} \equiv N_0$ ed eliminare φ mediante la (25,6). Come risultato otteniamo

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \left[\Delta N_e - \frac{N_e - N_i}{a^2} \right], \quad (25,7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \left[\Delta N_i + \frac{N_e - N_i}{a^2} \right], \quad (25,8)$$

dove $a^{-2} = 4\pi e^2 N_0 / T$ (a è il raggio di Debye degli elettroni o degli ioni; si veda più avanti al § 31).

Sebbene le sezioni di diffusione degli ioni e degli elettroni siano in generale del medesimo ordine di grandezza, i loro coefficienti di diffusione sono molto diversi, essendo diverse le velocità termiche medie (v_T), e cioè

$$\frac{D_e}{D_i} \sim \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \sim \sqrt{\frac{M}{m}}, \quad (25,9)$$

cosicché $D_e \gg D_i$. Questa circostanza conferisce al processo di diffusione tratti originali.

¹⁾ Poniamo la molteplicità della carica ionica $z_i = 1$, come ciò si verifica, di solito, per un piccolo grado di ionizzazione del gas.

Consideriamo l'evoluzione di una perturbazione debole delle densità elettronica e ionica, le cui dimensioni caratteristiche sono $L \gg a$. Nello stadio iniziale del processo, finché le parti variabili delle densità $|\delta N_e| \sim |\delta N_i| \sim |\delta N_e - \delta N_i|$, i primi termini ai secondi membri delle equazioni (25,7-8) sono piccoli rispetto ai secondi termini

$$\Delta N_e \sim \delta N_e / L^2 \ll (\delta N_e - \delta N_i) / a^2. \quad (25,10)$$

Osservando inoltre che in accordo con la (25,9) $|\partial N_i / \partial t| \ll |\partial N_e / \partial t|$ abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta N_e - \delta N_i) = -\frac{D_e}{a^2} (\delta N_e - \delta N_i), \quad (25,11)$$

da cui

$$\delta N_e - \delta N_i = (\delta N_e - \delta N_i)_0 \exp \left(-\frac{D_e}{a^2} t \right).$$

Di qui si vede che nel tempo $\tau_e \sim a^2 / D_e$ la differenza $|\delta N_e - \delta N_i|$ diventa piccola rispetto alle grandezze stesse δN_e e δN_i , vale a dire che il gas diventa quasi-neutro.

Lo stadio successivo del processo consiste nell'evoluzione della distribuzione degli elettroni verso quella di equilibrio (per una distribuzione di ioni assegnata) definita dalla condizione di annullamento del secondo membro della (25,7):

$$\delta N_e - \delta N_i = a^2 \Delta N_e \approx a^2 \Delta N_i \sim \frac{a^2}{L^2} \delta N_i. \quad (25,12)$$

Questo stadio prosegue secondo l'equazione (25,11) al cui secondo membro bisogna aggiungere il termine $D_e \Delta N_i$, cosicché il tempo caratteristico di rilassamento è, come in precedenza, $\sim \tau_e$. Questo tempo è piccolo rispetto al tempo caratteristico della diffusione degli ioni $\tau_i \sim L^2 / D_i$, la cui distribuzione si può supporre ancora invariata.

Il rilassamento definitivo della perturbazione delle densità elettronica e ionica si verifica secondo l'equazione (25,8), che dopo la sostituzione della (25,12) assume la forma

$$\frac{\partial \delta N_i}{\partial t} = 2D_i \Delta N_i. \quad (25,13)$$

In tal modo, in un tempo $\sim \tau_i$ gli elettroni e gli ioni si diffondono insieme ($\delta N_e \approx \delta N_i$) con un coefficiente doppio di diffusione degli ioni (la cosiddetta *diffusione ambipolare*). La metà di questo coefficiente è legata all'autodiffusione degli ioni e l'altra metà al campo elettrico creato dagli elettroni in fuga.

Notiamo infine che l'equazione (25,13) ha un dominio di applicabilità più largo di quanto risulta dalla deduzione fatta. Anche se la perturbazione non è debole, il moto degli elettroni conduce presto

allo stabilirsi della loro distribuzione di Boltzmann nel campo e all'uguagliarsi delle concentrazioni elettronica e ionica, cioè alla quasi-neutralità. Inoltre,

$$N_e = N_i = N_0 e^{e\varphi/T}, \quad e\varphi = T \ln \frac{N_i}{N_0}. \quad (25,14)$$

Ponendo la (25,14) nella (25,5) riotteniamo l'equazione (25,13), ma senza l'ipotesi che la perturbazione sia piccola.

§ 26. Mobilità degli ioni in soluzioni di elettroliti forti

Le equazioni dedotte al paragrafo precedente si generalizzano facilmente al caso in cui esistono ioni di specie diverse. Esse sono valide anche per il moto degli ioni in soluzioni di *elettroliti forti*¹⁾. Nel limite di diluizione « infinita » della soluzione (quando cioè la sua concentrazione tende a zero) la mobilità di ogni specie di ioni (dell'*a*-esima) tende a un limite costante $b_a^{(0)}$ e il suo coefficiente di diffusione, rispettivamente, al valore

$$D_a^{(0)} = T b_a^{(0)}. \quad (26,1)$$

Questo paragrafo è dedicato al calcolo (per concentrazione piccola) dei primi termini correttivi per la mobilità degli ioni in una soluzione debole²⁾. Con ciò vengono definiti anche i termini correttivi nella conduttività della soluzione. Nel campo elettrico E su ogni ione agisce la forza $ez_a E$, sotto la cui azione esso acquista la velocità orientata $b_a ez_a E$. Perciò la densità di corrente nella soluzione è

$$\mathbf{j} = E \sum_a ez_a N_a \cdot b_a ez_a,$$

dove N_a è la concentrazione (del numero di ioni della specie *a* nell'unità di volume) in modo che la conduttività è

$$\sigma = e^2 \sum_a N_a z_a^2 b_a. \quad (26,2)$$

La teoria qui esposta è basata sulle stesse rappresentazioni della teoria delle proprietà termodinamiche del plasma e degli elettroliti forti. Secondo queste rappresentazioni, attorno ad ogni ione si crea una distribuzione non uniforme di cariche (nube ionica) che scherma il campo dello ione. Le formule corrispondenti sono state dedotte in V, §§ 78 e 79 per il plasma; le formule analoghe per una soluzione di elettroliti forti differiscono solo per la presenza in esse della costante dielettrica e diversa da 1 del solvente; le scriveremo più avanti.

¹⁾ Ricordiamo che si chiamano elettroliti forti le sostanze che poste in soluzione si dissociano completamente in ioni.

²⁾ La teoria qui esposta è stata sviluppata da P. Debye e E. Hückel (1923) e da L. Onsager (1927).

La nube schermante cambia la mobilità dello ione per due effetti diversi. Primo, il moto dello ione nel campo elettrico esterno deforma la distribuzione delle cariche nella nube, per cui si crea un campo supplementare agente sullo ione. Secondo, il moto della nube mette in moto il liquido, il che implica una « traslazione » dello ione. La correzione di prima specie si dice *correzione di rilassamento*, quella di seconda specie *correzione elettroforetica*.

Correzione di rilassamento

Iniziamo dal calcolo della correzione di prima specie. Poiché la nube schermante comporta l'esistenza di una correlazione tra le posizioni di ioni distinti, allora si tratta dell'influsso del campo esterno E sulle funzioni di correlazione.

Definiamo la funzione di correlazione di coppia w_{ab} in modo tale che $N_a w_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) dV_a$ sia il numero di ioni della specie a che si trovano nel volume dV_a nell'intorno del punto \mathbf{r}_a , per l'ipotesi che uno degli ioni della specie b sia nel punto \mathbf{r}_b ; le specie a e b possono essere sia diverse che uguali. È evidente che

$$w_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = w_{ba}(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a), \quad (26,3)$$

e per $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| \rightarrow \infty$ le funzioni $w_{ab} \rightarrow 1$. In stato di equilibrio le funzioni w_{ab} dipendono unicamente dalle distanze $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$; ma in un campo esterno non è così ¹⁾.

Le funzioni di correlazione, così come tutte le funzioni di distribuzione, verificano equazioni che hanno la forma di un'equazione di continuità nello spazio corrispondente, nel caso considerato nello spazio delle configurazioni di due particelle:

$$\frac{\partial w_{ab}}{\partial t} + \text{div}_a \mathbf{j}_a + \text{div}_b \mathbf{j}_b = 0, \quad (26,4)$$

dove $\mathbf{j}_a, \mathbf{j}_b$ sono le densità dei flussi di probabilità per le particelle a e b e gli indici del segno div esprimono le variabili (\mathbf{r}_a o \mathbf{r}_b) rispetto alle quali si deve derivare.

Il flusso \mathbf{j}_a ha la forma

$$\mathbf{j}_a = -T b_a^{(0)} \nabla_a w_{ab} + b_a^{(0)} z_a e w_{ab} (\mathbf{E} - \nabla_a \varphi_b), \quad (26,5)$$

e il flusso \mathbf{j}_b ha la stessa forma, con gli indici a e b permutati. Il primo termine nella (26,5) descrive la traslazione diffusionale degli ioni a , che si verifica già in assenza di campo esterno. Il secondo termine è la densità del flusso degli ioni sotto l'azione delle forze del campo esterno \mathbf{E} e del campo $-\nabla_a \varphi_b$ creato nel punto \mathbf{r}_a dalla nube alterata, a condizione che nel punto \mathbf{r}_b si trovi lo ione b . Il potenziale $\varphi_b = \varphi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ dell'ultimo campo verifica l'equazione di

¹⁾ Il metodo delle funzioni di correlazione applicato allo stato d'equilibrio di un plasma (o di un elettrolita) è stato esposto in V, § 79.

Poisson

$$\Delta_a \Phi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -\frac{4\pi}{\epsilon_i} \left[\sum_c e z_c N_c w_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + e z_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \quad (26,6)$$

Il primo termine tra parentesi quadre è la densità media delle cariche di tutte le specie ioniche nella nube, il secondo termine la densità della carica localizzata (per ipotesi) nel punto \mathbf{r}_b . Il fattore $1/\epsilon$ esprime l'indebolimento del campo nel mezzo dielettrico (nel solvente).

Supponendo la soluzione sufficientemente disciolta, trascuriamo le correlazioni triple tra le posizioni degli ioni. In tale approssimazione le funzioni di correlazione di coppia w_{ab} sono vicine a 1; introduciamo le grandezze piccole

$$\omega_{ab} = w_{ab} - 1. \quad (26,7)$$

Dello stesso ordine di grandezza sono i potenziali φ_a . Trascurando i termini infinitesimi del secondo ordine, riscriviamo la (26,5) nella forma

$$\mathbf{j}_a = b_a^{(0)} [-T \nabla_a \omega_{ab} + e z_a (1 + \omega_{ab}) \mathbf{E} - e z_a \nabla_a \Phi_b]. \quad (26,8)$$

Quanto all'equazione (26,6), in virtù della neutralità elettrica in media della soluzione ($\sum e z_c N_c = 0$) si può scrivere semplicemente ω_{ab} al posto di w_{ab} :

$$\Delta_a \Phi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \left[\sum_c e z_c N_c \omega_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + e z_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \quad (26,9)$$

Nel campo omogeneo costante \mathbf{E} le funzioni w_{ab} non dipendono dal tempo e le coordinate dei due punti figurano in esse soltanto sotto forma della differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$; inoltre, $\nabla_a w_{ab} = -\nabla_b w_{ab}$. La sostituzione di \mathbf{j}_a dalla (26,8) (e dell'espressione analoga per \mathbf{j}_b) nella (26,4) conduce ora all'equazione

$$\begin{aligned} T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)}) \Delta \omega_{ab}(\mathbf{r}) + e z_a b_a^{(0)} \Delta \Phi_b(\mathbf{r}) + e z_b b_b^{(0)} \Delta \Phi_a(-\mathbf{r}) = \\ = (z_a b_a^{(0)} - z_b b_b^{(0)}) e \mathbf{E} \nabla \omega_{ab}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (26,10)$$

dove tutte le derivate si calcolano rispetto a \mathbf{r} .

Supponendo debole il campo esterno, si può risolvere il problema con il metodo delle approssimazioni successive rispetto a \mathbf{E} . Nell'approssimazione zero per $\mathbf{E} = 0$, i potenziali $\varphi_a^{(0)}(\mathbf{r})$ sono funzioni pari di \mathbf{r} . Tenendo presente che tutte le funzioni ω_{ab} e φ_a si devono annullare per $r \rightarrow \infty$, troviamo dalla (26,10)

$$T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)}) \omega_{ab}^{(0)} + e(b_a^{(0)} z_a \varphi_b^{(0)} + b_b^{(0)} z_b \varphi_a^{(0)}) = 0. \quad (26,11)$$

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\omega_{ab}^{(0)}(\mathbf{r}) = z_a z_b \omega^{(0)}(\mathbf{r}), \quad e \varphi_a^{(0)}(\mathbf{r}) = -T z_a \omega^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (26,12)$$

In questo caso l'equazione (26,11) è verificata identicamente e dalla (26,9) ricaviamo l'equazione per la funzione $\omega^{(0)}(\mathbf{r})$

$$\Delta \omega^{(0)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{a^2} \omega^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon T} \delta(\mathbf{r}), \quad (26,13)$$

dove

$$a^{-2} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon T} \sum_c N_c z_c^2. \quad (26,14)$$

La soluzione di questa equazione è

$$\omega^{(0)}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{\varepsilon T} \frac{e^{-r/a}}{r}. \quad (26,15)$$

La grandezza a è il raggio di schermatura di Debye nella soluzione dell'elettrolita.

Nell'approssimazione successiva poniamo

$$\varphi_a = \varphi_a^{(0)} + \varphi_a^{(1)}, \quad \omega_{ab} = \omega_{ab}^{(0)} + \omega_{ab}^{(1)}, \quad (26,16)$$

dove con l'indice (1) denotiamo piccole correzioni ai valori nulli. Tutte queste funzioni di correzione, essendo scalari, hanno la forma $\text{Erf}(r)$, dove $f(r)$ è funzione del solo modulo di r ; perciò tutte le $\omega_{ab}^{(1)}$ e $\varphi_a^{(1)}$ sono funzioni dispari di r . Poiché secondo la (26,3) abbiamo

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = \omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \equiv \omega_{ba}^{(1)}(-\mathbf{r}),$$

ne segue anche che

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (26,17)$$

(ricordiamo che ovunque $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$). Se gli ioni a e b si riferiscono alla medesima specie, la permutazione degli indici non può modificare la funzione $\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r})$ e perciò dalla (26,17) segue che queste $\omega_{aa}^{(1)}$ sono nulle. Ciò vuol dire che le correzioni $\omega_{ab}^{(1)}$ esistono soltanto per le funzioni di correlazione di coppie di ioni distinti.

Per rendere più semplici i calcoli ulteriori limitiamoci al caso di un elettrolita solo con due specie di ioni. Allora è diversa da zero solo la funzione $\omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega_{21}^{(1)}(\mathbf{r})$ e la sostituzione della (26,16) nell'equazione di Poisson (26,9) dà

$$\Delta \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} z_1 N_1 \omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (26,18)$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Tenendo conto della neutralità elettrica della soluzione e delle suindicate proprietà di simmetria delle funzioni, è facile vedere che il potenziale $\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r})$ verifica la stessa equazione e perciò $\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r})$.

Sostituendo la (26,16) nell'equazione (26,10), conserviamo al suo secondo membro solo il termine con $\omega_{12}^{(0)}$ e troviamo

$$T(b_1^{(0)} + b_2^{(0)}) \Delta \omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}) + e(b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2) \Delta \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}) = (b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2) e z_1 z_2 E \nabla \omega^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (26,19)$$

Il sistema di equazioni (26,18-19) si risolve con il metodo di Fourier. Per le componenti di Fourier $\omega_{2k}^{(1)}$ e $\varphi_{2k}^{(1)}$ si ottiene un sistema di equazioni algebriche che differisce dal sistema (26,18-19) per la sostituzione degli operatori $\nabla \rightarrow ik$, $\Delta \rightarrow -k^2$. La componente di Fourier di $\omega^{(0)}(\mathbf{r})$ (26,15), che figura a secondo membro dell'espressione (26,19), è data dalla formula

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(0)} = -\frac{e^2}{\varepsilon T} \frac{4\pi}{k^2 + a^{-2}}.$$

Diamo subito il risultato definitivo per la componente di Fourier del potenziale:

$$\varphi_{2k}^{(1)} = \frac{4\pi e^2 z_1 z_2 q}{\varepsilon T a^2} \frac{ikE}{k^2 (k^2 + a^{-2}) (k^2 + qa^{-2})}, \quad (26,20)$$

dove

$$q = \frac{b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2}{(z_1 - z_2) (b_1^{(0)} + b_2^{(0)})}. \quad (26,21)$$

Poiché z_1 e z_2 sono di segno opposto, è evidente che $0 < q < 1$.

Ricordiamo che $\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ è il potenziale supplementare che si crea nel punto \mathbf{r}_1 , a condizione che nel punto \mathbf{r}_2 si trovi lo ione 2. L'intensità di questo campo è

$$E_2^{(1)}(\mathbf{r}) = -\nabla_1 \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\nabla \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}).$$

Il suo valore per $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ (cioè per $\mathbf{r} = 0$) fornisce il campo cercato, che agisce sullo ione 2 e ne cambia quindi la mobilità.

La componente di Fourier $E_{2k}^{(1)} = -ik\varphi_{2k}^{(1)}$. Perciò

$$E_2^{(1)}(0) = - \int ik\varphi_{2k}^{(1)} e^{ikr} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Big|_{r=0} = - \int ik\varphi_{2k}^{(1)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Sostituendovi la (26,20) otteniamo l'integrale

$$I = \int \frac{k(kE)}{k^2 (k^2 + a^{-2}) (k^2 + a^{-2}q)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Dopo il calcolo della media nelle direzioni \mathbf{k} al posto di $\mathbf{k}(kE)$ si ha $k^2 E/3$, dopo di che l'integrale rispetto a k si calcola con i residui dell'espressione integranda nei poli $k = i/a$ e $k = i\sqrt{q}/a$; come risultato si ottiene

$$I = \frac{Ea}{12\pi (1 + \sqrt{q})}.$$

Quindi, il campo totale agente sullo ione 2 è

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_2^{(1)}(0) = \left[1 - \frac{e^2 |z_1 z_2| q}{3\varepsilon T a (1 + \sqrt{q})} \right] \mathbf{E}. \quad (26,22)$$

Abbiamo lo stesso risultato per il campo agente sullo ione 1, come è evidente già dalla simmetria dell'espressione (26,22) rispetto agli

indici 1 e 2. Moltiplicando il campo (26,22) per $b^{(0)}ez$ otteniamo la velocità acquistata dallo ione e scrivendo la stessa velocità nella forma $bezE$ troviamo che l'espressione tra parentesi quadre definisce anche il rapporto $b/b^{(0)}$. Quindi, la correzione di rilassamento cercata per la mobilità dello ione è

$$b_{rel} = -b \frac{e^2 |z_1 z_2| q}{3eTa (1 + \sqrt{q})}. \quad (26,23)$$

È da notare che questo effetto diminuisce la mobilità.

Correzione elettroforetica

Passiamo al calcolo della correzione legata al moto del solvente. L'impostazione del problema è la seguente.

Consideriamo uno ione singolo nella soluzione assieme alla nube schermante che lo circonda. Questa nube è carica elettricamente, con densità

$$\delta\rho = \sum_a ez_a \delta N_a,$$

dove δN_a è la differenza della concentrazione di ioni dell' a -esima specie nella nube dal suo valore medio N_a nella soluzione. Nel campo elettrico E il liquido che porta questa nube è soggetto perciò all'azione di forze con densità di volume $f = E\delta\rho$. Sotto l'azione di queste forze il liquido si muove e questo moto, a sua volta, trascina lo ione centrale in esame.

La distribuzione degli ioni nella nube è legata al potenziale φ del campo in essa dalla formula di Boltzmann

$$\delta N_a = N_a [e^{-z_a e \varphi / T} - 1] \approx - \frac{z_a e \varphi N_a}{T}.$$

Essendo il campo E debole, nel problema ora considerato possiamo trascurare la deformazione della nube ionica. In una nube a simmetria sferica il potenziale è dato dalla formula

$$\varphi = ez_b \frac{e^{-r/a}}{r},$$

dove ez_b è la carica dello ione centrale e a è definito dalla formula (26,14) (si veda V, § 78). Perciò la densità totale delle cariche nella nube è

$$\delta\rho = -\frac{e^2 \varphi}{T} \sum_a N_a z_a^2 = -\frac{ez_b}{4\pi a^2} \frac{e^{-r/a}}{r}. \quad (26,24)$$

Essendo lento il moto sotto l'azione del campo E , il liquido si può supporre incompressibile, in modo che

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (26,25)$$

Per la stessa ragione si può omettere il termine con il quadrato della velocità nell'equazione di Navier-Stokes, che si riduce in questo caso (per un moto stazionario) all'equazione

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{f} = 0, \quad (26,26)$$

dove P è la pressione, η il coefficiente di viscosità del liquido (del solvente).

Passando nelle equazioni (26,25-26) alle componenti di Fourier abbiamo

$$k \mathbf{v}_k = 0, \quad -\eta k^2 \mathbf{v}_k - i k P_k + E \delta \rho_k = 0.$$

Moltiplichiamo la seconda equazione per $i k$; troviamo così $P_k = -i k E \delta \rho_k / k^2$ e in seguito

$$\mathbf{v}_k = \frac{\delta \rho_k}{\eta} \frac{k^2 \mathbf{E} - k (k \mathbf{E})}{k^4}. \quad (26,27)$$

La componente di Fourier per la densità delle cariche (26,24) è

$$\delta \rho_k = -\frac{e z_b}{a^2 k^2 + 1}. \quad (26,28)$$

La velocità del liquido nel punto $r = 0$, in cui si trova lo ione centrale, è data dall'integrale

$$\mathbf{v}(0) = \int \mathbf{v}_k \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Sostituendovi \mathbf{v}_k dalle (26,27-28) e integrando rispetto alle direzioni \mathbf{k} otteniamo

$$\mathbf{v}(0) = -E \frac{e z_b}{(2\pi)^3 \eta} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 a^2 + 1}$$

e infine

$$\mathbf{v}(0) = -\frac{e z_b}{6\pi \eta a} \mathbf{E}.$$

Questa velocità va sommata alla velocità $e z_b b_b^{(0)} \mathbf{E}$ acquistata direttamente dallo ione sotto l'azione del campo. Ne segue che la correzione elettroforetica alla mobilità che cercavamo è uguale per gli ioni di tutte le specie e vale

$$b_{ef} = -1/6\pi \eta a. \quad (26,29)$$

La correzione totale è data dalla somma di ambedue le espressioni (26,23) e (26,29). Entrambe sono negative e insieme con $1/a$ sono proporzionali alla radice quadrata della concentrazione.

PLASMA SENZA URTI

§ 27. Campo autocompatibile

Il plasma, con cui intenderemo un gas completamente ionizzato ¹⁾, rappresenta una vasta regione di applicazione della teoria cinetica. Nei volumi V (§§ 78-80) e IX (§ 85) del presente Corso è stata già considerata la teoria termodinamica dello stato d'equilibrio del plasma. I capitoli III-V di questo volume sono dedicati allo studio delle proprietà cinetiche del plasma. Per evitare complicazioni supporremo (laddove sarà necessario) un plasma a due componenti, cioè contenente soltanto elettroni (di carica $-e$) e ioni positivi di una stessa specie (di carica ze).

Come per i gas ordinari, la condizione di applicabilità dell'equazione cinetica al plasma richiede che esso sia sufficientemente rarefatto; il gas non deve deviare che debolmente da quello ideale. Tuttavia, poiché la diminuzione delle forze coulombiane è lenta, questa condizione è più forte per un plasma che per un gas di particelle neutre. Per il momento, senza fare distinzione tra particelle di cariche diverse, scriviamo la condizione per cui un plasma è debolmente non perfetto:

$$T \gg e^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3}, \quad (27,1)$$

dove T è la temperatura del plasma, N il numero totale di particelle nell'unità di volume e $\bar{r} \sim N^{-1/3}$ la distanza media tra le particelle. Questa condizione esprime il fatto che il valore medio dell'energia d'interazione di due ioni è piccolo rispetto al valore medio della loro energia cinetica. Esprimiamo questa condizione in un'altra forma ancora, introducendo il cosiddetto raggio di plasma di Debye a_D definito come segue:

$$a_D^{-2} = \frac{4\pi}{T} \sum_a N_a (z_a e)^2, \quad (27,2)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le specie degli ioni; ricordiamo (si veda V, § 78) che a_D determina la distanza alla quale viene schermato il campo coulombiano della carica nel plasma. Introducendo

¹⁾ È stato *I. Langmuir* (1923) ad introdurre questo termine e a dare il via a uno studio teorico sistematico del plasma.

nella (27,1) $a \sim (T/4\pi N e^2)^{1/2}$ otteniamo

$$e^2 N^{1/3} T \sim \bar{r}^2 / 4\pi a^2 \ll 1, \quad (27,3)$$

vale a dire che la distanza media tra le particelle in un plasma rarefatto deve essere piccola rispetto al raggio di Debye, cioè la « nube ionica » attorno alla carica deve contenere effettivamente molte particelle. Il piccolo rapporto (27,3) funge per il plasma da « parametro gassoso ».

Ovunque nei capitoli III-V (tranne il solo § 40) il plasma sarà supposto classico. Con ciò si intende che è verificata soltanto una condizione molto debole, cioè che la temperatura del plasma deve essere alta rispetto alla temperatura di degenerazione della sua componente elettronica

$$T \gg \hbar^2 N^{2/3} / m, \quad (27,4)$$

dove m è la massa dell'elettrone (si veda V, § 80).

L'equazione cinetica per ogni specie di particelle nel plasma (elettroni e ioni) ha la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \text{St } f, \quad (27,5)$$

dove f è la funzione di distribuzione delle particelle date rispetto alle coordinate e alle quantità di moto, St il loro integrale degli urti (con le particelle di tutte le specie). La derivata \mathbf{p} è determinata dalla forza agente sulla particella. Questa forza si esprime, a sua volta, in funzione delle intensità dei campi elettrico e magnetico creati da tutte le altre particelle nel punto in cui si trova la particella considerata. Qui sorge, tuttavia, il seguente problema.

Nel caso di particelle neutre (atomi o molecole), in virtù della diminuzione rapida delle forze interagenti, variazioni sensibili nel loro moto, interpretabili come urti, si verificano soltanto a piccole distanze d'impatto (dell'ordine di grandezza delle dimensioni atomiche stesse). Negli intervalli tra questi urti le particelle si muovono come libere; ecco perché a primo membro dell'equazione cinetica per i gas ordinari si è posto $\mathbf{p} = 0$. Nel plasma invece, in virtù del raggio d'azione grande delle forze coulombiane, una variazione sensibile del moto delle particelle si verifica anche a distanze d'impatto grandi; la schermatura delle forze coulombiane nel plasma si produce soltanto a distanze $\sim a$ che, in accordo con la condizione (27,3), sono grandi persino rispetto alle distanze tra le particelle (si veda V, § 78 e il problema 1 del § 34). Non tutti questi casi, tuttavia, si devono interpretare come urti nell'equazione cinetica. Nella teoria cinetica gli urti caotici rappresentano il meccanismo che porta ad avvicinarsi allo stato d'equilibrio, con il corrispondente aumento dell'entropia del sistema. Fra l'altro, gli urti a distanze d'impatto

grandi ($\geq a$) non possono servire a questo meccanismo di rilassamento. Il fatto è che l'interazione di due particelle cariche a queste distanze rappresenta in realtà un effetto collettivo, cui partecipa un numero grande di particelle. Corrispondentemente anche il campo efficace, con cui si può descrivere questa interazione, è creato da un numero grande di particelle, cioè ha carattere macroscopico. Quindi, tutto il processo acquista carattere macroscopico reale e non stocastico; questi processi non possono implicare aumento dell'entropia del sistema. Perciò vanno esclusi dalla nozione di urti, di cui si tiene conto a secondo membro delle equazioni cinetiche.

A ciò corrisponde la rappresentazione dei valori microscopici esatti dei campi elettrico (e) e magnetico (h), agenti su una particella nel plasma, nella forma

$$e = E + e', \quad h = B + h', \quad (27,6)$$

dove E e B sono i valori medi dei campi calcolati in regioni contenenti numerose particelle, cioè in regioni di dimensioni grandi rispetto al raggio di Debye. Quanto ai termini e' e h' , in questo caso essi descrivono fluttuazioni casuali dei campi, che conducono a variazioni casuali del moto delle particelle, ossia ad urti.

Secondo il loro significato esatto E e B nell'espressione (27,6) sono i valori medi dei campi nel punto in cui si trova la particella data. Ma in virtù della supposta rarefazione del plasma si può trascurare la correlazione tra le posizioni simultanee delle particelle in esso. Allora il punto in cui si trova una data particella non è determinato in nessun modo, cosicché E e B si possono intendere semplicemente come valori medi dei campi calcolati nel senso abituale dell'elettrodinamica macroscopica. Saranno questi campi a determinare la forza di Lorentz, che deve essere sostituita al posto di p nell'equazione (27,5).

In questo capitolo considereremo fenomeni in cui gli urti tra le particelle del plasma sono inessenziali; in questi casi si parla di *plasma senza urti*¹⁾. Le condizioni esatte, che consentono di trascurare gli urti, dipendono in generale dall'impostazione del problema. Ma di solito una condizione necessaria è che la frequenza efficace degli urti ν (l'inverso del tempo medio del cammino libero della particella) sia piccola rispetto alla frequenza ω di variazione dei campi macroscopici E e B nel processo in esame:

$$\nu \ll \omega. \quad (27,7)$$

In forza di questa condizione l'integrale degli urti nell'equazione cinetica risulta essere piccolo rispetto alla derivata $\partial f / \partial t$. Gli urti si possono trascurare anche nel caso in cui la lunghezza media del

¹⁾ In queste condizioni è sufficiente intendere la media nella (27,6) come media macroscopica ordinaria calcolata in regioni di dimensioni grandi solo rispetto a distanze medie tra particelle.

cammino libero delle particelle $l \sim \bar{v}/\nu$ sia grande rispetto alla distanza L , alla quale cambia il campo (la « lunghezza d'onda » del campo). Se indichiamo $1/L \sim k$, questa condizione si scrive nella forma

$$v \ll k\bar{v}. \quad (27,8)$$

In questo caso l'integrale degli urti sarà piccolo rispetto al termine $v\nabla f$ a primo membro dell'equazione cinetica.

Trascurato l'integrale degli urti, le equazioni cinetiche per le funzioni di distribuzione degli elettroni (f_e) e degli ioni (f_i) assumono la forma ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + ze \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (27,9)$$

A queste equazioni bisogna aggiungere il sistema delle equazioni di Maxwell mediate

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (27,10)$$

dove ρ e \mathbf{j} sono le densità medie delle cariche e della corrente che si esprimono con la funzione di distribuzione mediante le formule evidenti

$$\begin{aligned} \rho &= e \int (zf_i - f_e) d^3p, \\ \mathbf{j} &= e \int (zf_i - f_e) \mathbf{v} d^3p. \end{aligned} \quad (27,11)$$

Le equazioni (27,9-11) costituiscono un sistema connesso di equazioni che definiscono contemporaneamente sia le funzioni di distribuzione f_e, f_i che i campi \mathbf{E}, \mathbf{B} ; i campi così definiti si chiamano *auto-compatibili*. È stato A.A. Vlasov (1937) a introdurre il campo auto-compatibile nell'equazione cinetica; perciò il sistema di equazioni (27,9-11) si chiama *equazioni di Vlasov*.

In accordo con quanto detto sopra, l'evoluzione delle funzioni di distribuzione in un plasma senza urti, con campo autocompatibile, non è legata all'aumento dell'entropia e, quindi, di per sé non può

¹⁾ A rigore, in presenza di campo magnetico lo spazio delle fasi della particella deve essere definito come spazio \mathbf{r}, \mathbf{P} , dove $\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})/c$ è la quantità di moto generalizzata. Ma $d^3x d^3P = d^3x d^3p$, poiché l'aggiunta di \mathbf{A} non fa altro che cambiare l'origine del calcolo della quantità di moto in ogni punto dello spazio. Perciò si può riferire la funzione di distribuzione, come prima, a $d^3x d^3p$.

condurre ad equilibrio statistico. Ciò è evidente anche dalla forma delle equazioni (27,9), in cui E e B figurano formalmente soltanto come campi esterni applicati al plasma.

Ciascuna delle equazioni cinetiche (27,9) ha la forma

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (27,12)$$

dove la derivata totale significa derivazione lungo la traiettoria descritta dalle particelle. La soluzione generale di questa equazione è una funzione arbitraria di tutti gli integrali del moto della particella nei campi E e B .

§ 28. Dispersione spaziale in un plasma

Riscriviamo le equazioni (27,10) nella forma più abituale per l'elettrodinamica macroscopica introducendovi, oltre all'intensità E , anche lo spostamento dielettrico D . In questo caso definiamo il vettore polarizzazione elettrica P mediante le relazioni

$$\frac{\partial P}{\partial t} = j, \quad \text{div } P = -\rho; \quad (28,1)$$

la non contraddittorietà di queste due formule è garantita dall'equazione di continuità $\text{div } j = -\partial\rho/\partial t$ (torneremo ancora a questa definizione più avanti nel presente paragrafo). Allora le equazioni (27,10) assumono la forma

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, & \text{div } B &= 0, \\ \text{rot } B &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, & \text{div } D &= 0. \end{aligned} \quad (28,2)$$

Nei campi deboli il legame tra spostamento dielettrico D e intensità E è lineare¹⁾. Ma già nei mezzi ordinari questo legame non ha carattere temporale istantaneo: il valore $D(t, r)$ in un certo istante t dipende, in generale, dai valori $E(t, r)$ non soltanto in questo stesso istante, ma anche in tutti gli istanti precedenti (si veda VIII, § 77). Nel plasma si aggiunge anche il carattere non locale del legame: il valore $D(t, r)$ in un punto r dipende dai valori $E(t, r)$ non soltanto in questo punto, ma in generale in tutto il volume del plasma. Questa proprietà è dovuta al fatto che il moto « libero » (cioè senza urti) delle particelle nel plasma è definito dai valori del campo su tutta la loro traiettoria.

Il legame lineare generale tra le funzioni $D(t, r)$ e $E(t, r)$ si può scrivere nella forma

$$D_\alpha(t, r) = E_\alpha(t, r) + \int_{-\infty}^t \int K_{\alpha\beta}(t-t', r, r') E_\beta(t', r') d^3x' dt'$$

¹⁾ La condizione di debolezza del campo verrà formulata al § 29.

(un plasma imperturbato è supposto stazionario). Per un plasma spazialmente omogeneo il nucleo dell'operatore integrale $K_{\alpha\beta}$ dipende unicamente dalla differenza degli argomenti spaziali $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Ponendo $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}$ e $t - t' = \tau$ riscriviamo questo legame nella forma

$$D_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = E_{\alpha}(t, \mathbf{r}) + \int_0^{\infty} \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) E_{\beta}(t - \tau, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d^3\rho d\tau. \quad (28,3)$$

Come al solito, sviluppando in serie o in integrale di Fourier si può rappresentare il campo come un insieme di onde piane in cui \mathbf{E} e \mathbf{D} sono proporzionali a $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Per queste onde il legame tra \mathbf{D} e \mathbf{E} assume la forma

$$D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta}, \quad (28,4)$$

dove il tensore della costante dielettrica è

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \int_0^{\infty} \int K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\boldsymbol{\rho})} d^3\rho d\tau. \quad (28,5)$$

Da questa definizione risulta immediatamente che

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{k}). \quad (28,6)$$

Quindi, il carattere non locale del legame tra \mathbf{E} e \mathbf{D} fa sì che la costante dielettrica del plasma risulta essere funzione non solo della frequenza, ma anche del vettore d'onda; quest'ultima dipendenza si chiama *dispersione spaziale*, così come la dipendenza dalla frequenza si chiama *dispersione temporale* (o di frequenza).

Tornando alle equazioni (28,1-2) ricordiamo che nella formulazione delle equazioni di Maxwell per campi variabili in mezzi ordinari, oltre alla polarizzazione dielettrica \mathbf{P} , si introduce anche la magnetizzazione \mathbf{M} e, inoltre, la corrente microscopica media si scinde in due parti: $\partial\mathbf{P}/\partial t$ e $c \text{ rot } \mathbf{M}$; nell'onda piana queste espressioni diventano $-i\omega\mathbf{P}$ e $ic[\mathbf{k}\mathbf{M}]$. Ma se esiste dispersione spaziale, per cui tutte le grandezze dipendono lo stesso da \mathbf{k} , questa separazione è inopportuna.

È da notare anche che se la corrente \mathbf{j} e la densità delle cariche ρ figurano completamente nella definizione della polarizzazione \mathbf{P} (come è stato fatto nella (28,1)) quest'ultima, in generale, dipende sia dal campo elettrico \mathbf{E} sia dal campo magnetico \mathbf{B} . Ma il campo \mathbf{B} si può esprimere in funzione di \mathbf{E} secondo la prima coppia delle equazioni di Maxwell (28,2) contenente unicamente queste due grandezze, cioè (per un'onda piana) secondo $[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \omega\mathbf{B}/c$, $\mathbf{k}\mathbf{B} = 0$. Allora la polarizzazione \mathbf{P} sarà espressa anch'essa soltanto in funzione di \mathbf{E} , ciò che si intende nella definizione di $\varepsilon_{\alpha\beta}$ secondo le (28,3-5).

La dipendenza dal vettore d'onda porta nella funzione $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ una direzione prefissata, cioè la direzione dell'argomento \mathbf{k} . Perciò

se esiste dispersione spaziale, la costante dielettrica è un tensore anche in un mezzo isotropo. La forma generale di questo tensore è la seguente:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \varepsilon_l(\omega, k) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (28,7)$$

Moltiplicandolo per E_β il primo termine nella (28,7) dà allo spostamento dielettrico \mathbf{D} un contributo perpendicolare al vettore d'onda, e il secondo termine un contributo parallelo a \mathbf{k} . Per campi \mathbf{E} perpendicolari a \mathbf{k} o diretti lungo \mathbf{k} il legame tra \mathbf{D} e \mathbf{E} si riduce rispettivamente a $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$ o $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$. Le funzioni scalari ε_t e ε_l si chiamano *costante dielettrica trasversale* e *longitudinale*, rispettivamente. Esse dipendono da due variabili indipendenti: dalla frequenza ω e dal modulo del vettore d'onda k . Per $\mathbf{k} \rightarrow 0$ la direzione prefissata scompare e allora il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ deve assumere la forma $\varepsilon(\omega) \delta_{\alpha\beta}$, dove $\varepsilon(\omega)$ è la costante dielettrica scalare ordinaria, che tiene conto della sola dispersione di frequenza. Corrispondentemente i valori limite delle funzioni ε_t e ε_l sono uguali e valgono

$$\varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \quad (28,8)$$

In accordo con la (28,6) le funzioni scalari ε_t e ε_l godono della proprietà

$$\varepsilon_t(-\omega, k) = \varepsilon_t^*(\omega, k), \quad \varepsilon_l(-\omega, k) = \varepsilon_l^*(\omega, k). \quad (28,9)$$

La dispersione spaziale non incide sulle proprietà di ε_t e ε_l , quali funzioni della variabile complessa ω . Per queste funzioni restano in vigore tutti i risultati noti (si veda VIII, § 82) che si riferiscono alla costante dielettrica $\varepsilon(\omega)$ dei mezzi ordinari senza dispersione spaziale.

In questo capitolo ci limiteremo alla considerazione di un plasma isotropo. Sottolineiamo che con ciò si presuppone non soltanto la mancanza di un campo magnetico esterno, ma anche l'isotropia della funzione di distribuzione delle quantità di moto delle particelle (nel plasma non perturbato da un campo). In caso contrario compaiono direzioni prefissate nuove e la struttura tensoriale di $\varepsilon_{\alpha\beta}$ si rende più complicata.

È stato già detto che l'origine della dispersione spaziale nel plasma è legata alla dipendenza del moto « libero » della particella dai valori del campo lungo la loro traiettoria. È ovvio che sul moto di una particella in ogni punto della sua traiettoria di fatto incidono notevolmente i valori del campo non su tutta la traiettoria, ma su alcuni suoi tratti di lunghezza non troppo grande. L'ordine di grandezza di queste lunghezze può essere determinato con due meccanismi: mediante gli urti che violano il moto libero sulla traiettoria o mediante il calcolo del valore medio del campo oscillante durante il tempo in cui la particella percorre la traiettoria. Per il primo

meccanismo la distanza caratteristica è rappresentata dalla lunghezza del cammino libero della particella $l \sim \bar{v}/\nu$ e per il secondo dalla distanza \bar{v}/ω alla quale si sposta la particella con velocità media \bar{v} durante un periodo del campo.

Nell'espressione (28,3) alla lontananza della correlazione tra i valori di \mathbf{D} e di \mathbf{E} in punti diversi dello spazio corrispondono le distanze r_{cor} , a cui diminuisce sostanzialmente la funzione $K_{\alpha\beta}(\tau, \rho)$. Si può affermare, quindi, che l'ordine di grandezza di queste distanze è dato dalla più piccola delle due grandezze, l o \bar{v}/ω (bisogna considerarla per le particelle, elettroni o ioni, per le quali essa ha valore più grande)¹⁾. Se $\nu \ll \omega$ la più piccola è la grandezza \bar{v}/ω e allora

$$r_{\text{cor}} \sim \bar{v}/\omega. \quad (28,10)$$

La dispersione spaziale è notevole per $kr_{\text{cor}} \gg 1$ e scompare per $kr_{\text{cor}} \ll 1$; nell'ultimo caso nella formula (28,5) si può sostituire $e^{-ik\rho} \approx 1$ e l'integrale cessa di dipendere da \mathbf{k} . Il valore di r_{cor} dalla (28,10) mostra, quindi, che la dispersione spaziale è notevole per le onde, la cui velocità di fase (ω/k) è comparabile o inferiore alla velocità media delle particelle nel plasma. Nel caso contrario limite per

$$\omega \gg k\bar{v} \quad (28,11)$$

la dispersione spaziale è inessenziale.

È importante che i valori di r_{cor} nel plasma possano essere grandi rispetto alle distanze medie tra le particelle ($\sim N^{-1/3}$). È precisamente questa condizione a rendere possibile la descrizione macroscopica della dispersione spaziale nei termini della costante dielettrica anche nei casi in cui la dispersione sia notevole. Ricordiamo (si veda VIII, § 104) che nei mezzi ordinari sono le dimensioni atomiche a fungere da lunghezza di correlazione; perciò già la condizione di applicabilità della teoria macroscopica richiede che sia soddisfatta la disuguaglianza $kr_{\text{cor}} \ll 1$ (la lunghezza d'onda deve essere grande rispetto alle dimensioni atomiche). Questa è la ragione per cui in tali mezzi la dispersione spaziale (che si manifesta nella cosiddetta attività ottica naturale, ad esempio) non è altro che una piccola correzione.

§ 29. Costante dielettrica di un plasma senza urti

Nel caso generale di \mathbf{k} arbitrari, quando la dispersione spaziale ha un ruolo rilevante, il calcolo della costante dielettrica richiede che sia applicata l'equazione cinetica. Facciamolo, supponendo

¹⁾ In termini più precisi, per $l \ll \bar{v}/\omega$ la distanza $r_{\text{cor}} \sim l$ per ϵ_1 . A causa della diffusione delle particelle lungo il campo per la costante dielettrica longitudinale $r_{\text{cor}} \sim (l\bar{v}/\omega)^{1/2}$.

che alla polarizzazione dielettrica del plasma partecipino i soli elettroni e che il moto degli ioni sia inessenziale (in questi casi il plasma è detto *elettronico*); torneremo sull'accettabilità di questa ipotesi e sulla generalizzazione dei risultati al § 31.

Nel caso di un campo debole cerchiamo la funzione di distribuzione degli elettroni nella forma $f = f_0 + \delta f$, dove f_0 è la funzione di distribuzione stazionaria isotropa e spazialmente omogenea non perturbata dal campo e δf la sua variazione sotto l'influsso del campo. Trascurando nell'equazione cinetica i termini infinitesimi del secondo ordine otteniamo

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

In un plasma isotropo la funzione di distribuzione dipende unicamente dal modulo della quantità di moto. Per questa funzione il verso del vettore $\partial f_0 / \partial \mathbf{p}$ coincide con la direzione di $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e il suo prodotto con $[\mathbf{v} \mathbf{B}]$ si annulla. In tal modo, nell'approssimazione lineare il campo magnetico non incide sulla funzione di distribuzione. Per δf resta l'equazione

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} = e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (29,1)$$

Come il campo \mathbf{E} , la funzione δf è supposta proporzionale a $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$. Allora dalla (29,1) ricaviamo

$$\delta f = \frac{e \mathbf{E}}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (29,2)$$

La condizione di debolezza del campo è dovuta al fatto che si richiede che δf sia piccola rispetto a f_0 . Il coefficiente di $\partial f_0 / \partial \mathbf{p}$ nella (29,2) è l'ampiezza della quantità di moto acquistata dall'elettrone nel campo \mathbf{E} . Questa ampiezza deve essere piccola rispetto alla quantità di moto media $m\bar{v}$ (definita in base alla distribuzione f_0).

In un plasma imperturbato la densità delle cariche elettroniche è compensata in ogni punto dalle cariche ioniche e la densità di corrente è identicamente nulla per l'isotropia del plasma. Quanto alla densità delle cariche e alla densità di corrente che nascono nel plasma per la perturbazione dovuta a un campo, esse valgono

$$\rho = -e \int \delta f d^3 p, \quad \mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f d^3 p. \quad (29,3)$$

Con δf queste grandezze sono proporzionali a $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$, e secondo la (28,1) il loro legame con la polarizzazione dielettrica è dato dalle formule

$$i\mathbf{k}\mathbf{P} = -\rho, \quad -i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}. \quad (29,4)$$

Il metodo di calcolo degli integrali nella (29,3) richiede, tuttavia, una precisazione, in quanto la funzione δf ha un polo per

$$\omega = kv. \quad (29,5)$$

Perché l'integrale abbia senso, considereremo al posto del campo rigorosamente armonico ($\propto e^{-i\omega t}$) un campo che si inserisce in modo indefinitamente lento dall'istante $t = -\infty$. A questa descrizione del campo corrisponde l'aggiunta alla sua frequenza di una parte immaginaria infinitesima positiva, cioè la sostituzione $\omega \rightarrow \omega + i\delta$, dove $\delta \rightarrow +0$. Infatti, in questo caso si avrà $E \propto e^{-i\omega t} e^{t\delta} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$; quanto all'aumento indefinito del campo generato dal fattore $e^{t\delta}$ per $t \rightarrow \infty$, esso è inessenziale poiché in virtù del principio di causalità non può incidere sui fenomeni considerati per istanti t finiti (fra l'altro, un campo con $\delta < 0$ sarebbe grande nel passato, ciò che violerebbe l'applicabilità dell'approssimazione lineare rispetto al campo). Quindi, la *regola di aggiramento* dei poli (29,5) è definita dalla sostituzione

$$\omega \rightarrow \omega + i0; \quad (29,6)$$

questa regola è stata stabilita originariamente da *L. D. Landau* (1946).

La regola (29,6) può essere giustificata da un altro punto di vista, mediante l'introduzione nell'equazione cinetica di un integrale degli urti infinitesimo rappresentato nella forma $St f = -v\delta f$. L'aggiunta di questo termine a secondo membro dell'equazione (29,1) è equivalente alla sostituzione $\omega \rightarrow \omega + iv$ nel termine $\partial\delta f/\partial t = -i\omega\delta f$; facendo tendere in seguito $v \rightarrow 0$ riotteniamo la regola (29,6)¹⁾.

Nelle integrazioni con la regola di aggiramento (29,6) abbiamo a che fare con integrali della forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z) dz}{z - i\delta}, \quad \delta > 0.$$

In questo integrale il cammino di integrazione nel piano della variabile complessa z passa sotto il punto $z = i\delta$; per $\delta \rightarrow 0$ ciò equivale all'integrazione lungo l'asse reale, aggirando dal basso il polo $z = 0$ lungo una semicirconferenza infinitesima. Il contributo all'integrale ottenuto da questo aggiramento è determinato dal semiresiduo del-

¹⁾ Nelle considerazioni esposte si tratta infatti di due passaggi al limite: a campi piccoli (linearizzazione delle equazioni) e a $v \rightarrow 0$. Sottolineiamo che il primo limite si realizza prima del secondo. La necessità di questo ordine dei passaggi al limite è dovuta alla necessità che sia soddisfatta la condizione $\delta f \ll f_0$ nella linearizzazione; per $v = 0$ l'aggiunta di δf diventerebbe infinita per $kv = \omega$.

l'espressione integranda e, come risultato, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z-i0} dz = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{iz} dz + i\pi f(0), \quad (29,7)$$

dove il segno d'integrale cancellato significa che l'integrale si calcola nel senso del valore principale. Si può scrivere questa espressione anche in forma simbolica

$$\frac{1}{z-i0} = P \frac{1}{iz} + i\pi\delta(z), \quad (29,8)$$

dove il simbolo P significa il calcolo (nelle integrazioni ulteriori) del valore principale.

Calcoliamo la parte longitudinale della costante dielettrica del plasma. A tal fine ricorriamo alla prima delle relazioni (29,4) sostituendovi δp dalle formule (29,3) e (29,2):

$$ikP = -e^2 E \int \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{d^3 p}{i(kv - \omega - i0)}.$$

Supponiamo che il campo E (e con esso anche P) sia diretto come k ; allora $4\pi P = (\epsilon_l - 1) E$. Otteniamo così la seguente formula, che esprime la costante dielettrica longitudinale del plasma, con una funzione di distribuzione stazionaria qualsiasi $f(p)$ (in cui omettiamo più avanti l'indice 0):

$$\epsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int k \frac{\partial f}{\partial p} \frac{d^3 p}{kv - \omega - i0}. \quad (29,9)$$

Prendiamo la direzione k come asse x . Nell'espressione integranda della (29,9) solo f dipende da p_y, p_z . Perciò si può riscrivere in un altro modo la formula (29,9) introducendo la funzione di distribuzione soltanto di $p_x = mv_x$:

$$f(p_x) = \int f(p) dp_y dp_z.$$

Allora

$$\epsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(p_x)}{dp_x} \frac{dp_x}{kv_x - \omega - i0}. \quad (29,10)$$

In un plasma isotropo $f(p_x)$ è una funzione pari di p_x .

Diamo subito il seguente importante risultato: la costante dielettrica di un plasma senza urti è una grandezza complessa; la parte immaginaria dell'integrale (29,10) è data dalla formula (29,7). Torneremo al prossimo paragrafo su questo risultato importante, mentre qui consideriamo le proprietà analitiche della funzione della frequenza ω definita dall'integrale (29,10). Già dalle proprietà generali della costante dielettrica è noto che questa funzione può

avere punti singolari soltanto nel semipiano inferiore della variabile complessa ω (si veda VIII, § 82); ciò è conseguenza già della definizione stessa (28,5). È utile, tuttavia, vedere come ciò deriva immediatamente dalla formula (29,10) e stabilire un legame tra questi punti singolari e le proprietà della funzione di distribuzione $f(p_x)$.

Cambiando la notazione della variabile d'integrazione, scriviamo l'integrale (29,10) nella forma

$$\int_C \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{z - \omega/k}. \quad (29,11)$$

Si integra nel piano della variabile complessa z lungo l'asse reale aggirando dal basso il punto $z = \omega/k$ (fig. 7, a). Così l'integrale

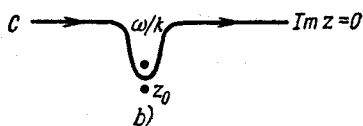
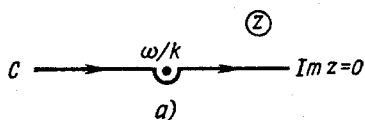


Fig. 7

(29,11) definisce una funzione analitica anche in tutto il semipiano superiore di ω ; per tutti questi valori di ω il polo $z = \omega/k$ è aggirato, come ci si doveva aspettare, dal basso. Invece, per prolungamento analitico di questa funzione al semipiano inferiore di ω , la necessità dell'aggiramento del polo dal basso comporta ogni volta uno spostamento corrispondente del cammino d'integrazione (fig. 7, b). Ma la funzione $df(z)/dz$, regolare per z reali, ha in generale punti sin-

golari per z complessi (che indichiamo con z_0) compreso anche il semipiano inferiore della variabile z . È impossibile allontanare il cammino d'integrazione C dal polo $z = \omega/k$ quando questo polo si avvicina a uno dei punti singolari z_0 e il contorno C è stretto tra questi due punti. Quindi, la funzione (29,11) ha punti singolari nel semipiano inferiore di ω per valori ω/k coincidenti con i punti singolari della funzione $df(z)/dz$.

§ 30. Smorzamento di Landau

È stato già notato che la costante dielettrica di un plasma senza urti è una grandezza complessa ($\epsilon_l = \epsilon'_l + i\epsilon''_l$). Separando la parte immaginaria mediante la formula (29,8) abbiamo

$$\epsilon''_l = -4\pi^2 e^2 \int \frac{\partial f}{\partial p} \frac{k}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3 p, \quad (30,1)$$

ossia

$$\epsilon''_l = -\frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \left. \frac{df(p_x)}{dp_x} \right|_{v_x = \omega/k}. \quad (30,2)$$

Come è noto, la complessità della costante dielettrica significa che esiste dissipazione dell'energia del campo elettrico nel mezzo. Ricordiamo le formule che esprimono l'energia media dissipata Q (nell'unità di tempo e nell'unità di volume) di un campo elettrico monocromatico. Se questo campo è rappresentato nella forma complessa

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\omega \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

nel caso generale di mezzo anisotropo abbiamo ¹⁾

$$Q = \frac{i\omega}{8\pi} \frac{1}{2} [\varepsilon_{\beta\alpha}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})] E_{\alpha}^* E_{\beta}; \quad (30,3)$$

la dissipazione è definita dalla parte antihermitiana del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Se questo tensore è simmetrico, la parte antihermitiana si riduce a quella immaginaria e allora

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}''(\omega, \mathbf{k}) E_{\alpha} E_{\beta}^*. \quad (30,4)$$

Nel caso di campo longitudinale qui resta solo la parte immaginaria della costante dielettrica longitudinale

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_l'' |\mathbf{E}|^2. \quad (30,5)$$

Ponendovi la (30,2) troviamo in questo caso che

$$Q = -|\mathbf{E}|^2 \frac{\pi m e^2 \omega}{2k^2} \left. \frac{df(p_x)}{dp_x} \right|_{v_x = \omega/\hbar}. \quad (30,6)$$

Quindi, la dissipazione compare già in un plasma senza urti; questo fenomeno predetto da *L. D. Landau* (1946) si chiama *smorzamento di Landau*. Non essendo legato agli urti esso differisce in linea di principio dalla dissipazione nei mezzi assorbenti ordinari:

¹⁾ Questa espressione si ottiene dalla formula generale

$$Q_{\dot{\mathbf{A}}} = \langle \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} \rangle / 4\pi,$$

dove le parentesi angolari indicano il valore medio rispetto al tempo (si veda VIII, § 80). Qui è supposto che \mathbf{E} e \mathbf{D} siano reali. Se, invece, \mathbf{E} è rappresentato in forma complessa allora nella formula si deve sostituire a \mathbf{E} la semisomma $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)/2$. Il vettore corrispondente \mathbf{D} ha le componenti

$$\frac{1}{2} \{ \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E_{\beta}^* \},$$

e il vettore $\dot{\mathbf{D}}$

$$\frac{i\omega}{2} \{ -\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E_{\beta}^* \}.$$

Calcolando la media del prodotto $\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}$ e tenendo conto della proprietà (28,8), otteniamo la (30,3) (si veda la nota a pag. 157).

la dissipazione senza urti non è legata all'aumento dell'entropia e perciò rappresenta un processo termodinamicamente reversibile (su questo aspetto del fenomeno torneremo al § 35).

Il meccanismo dello smorzamento di Landau è legato strettamente alla dispersione spaziale. Come si vede dalla (30,6), la dissipazione proviene dagli elettroni, la cui velocità nella direzione di propagazione dell'onda elettrica coincide con la velocità di fase dell'onda ($v_x = \omega/k$); si dice che questi elettroni si muovono in fase con l'onda¹⁾. Nei confronti di essi il campo è stazionario e perciò compie sugli elettroni un lavoro, il cui valore medio rispetto al tempo non si annulla (come ciò si verifica per gli altri elettroni nei confronti dei quali il campo oscilla). È istruttivo osservare questo campo in dettaglio, deducendo la formula (30,6) in modo diretto senza ricorrere all'equazione cinetica.

Supponiamo che l'elettrone si muova lungo l'asse x in un campo elettrico debole diretto lungo questo asse

$$E(t, x) = \text{Re} \{E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{t\delta}\}; \quad (30,7)$$

il fattore $e^{t\delta}$ descrive di nuovo l'inserimento lento del campo dall'istante $t = -\infty$. Cercheremo la velocità $v_x \equiv w$ e la coordinata x dell'elettrone in moto nella forma

$$w = w_0 + \delta w, \quad x = x_0 + \delta x,$$

dove δw e δx sono correzioni al moto imperturbato $x_0 = w_0 t$ che avviene con velocità costante w_0 . L'equazione del moto dell'elettrone, linearizzata nelle grandezze piccole, è

$$m \frac{d\delta w}{dt} = -eE(t, x_0) = -e \text{Re} \{E_0 e^{ikl(w_0 - \omega/k)} e^{t\delta}\}.$$

Di qui

$$\begin{aligned} \delta w &= -\frac{e}{m} \text{Re} \frac{E(t, x_0)}{ik(w_0 - \omega/k) + \delta}, \\ \delta x &= -\frac{e}{m} \text{Re} \frac{E(t, x_0)}{[ik(w_0 - \omega/k) + \delta]^2}. \end{aligned} \quad (30,8)$$

Il lavoro medio compiuto dal campo sull'elettrone nell'unità di tempo è

$$\begin{aligned} q &= -e \langle wE(t, x) \rangle = -e \langle (w_0 + \delta w) E(t, x_0 + \delta x) \rangle \approx \\ &\approx -ew_0 \left\langle \frac{\partial E}{\partial x_0} \delta x \right\rangle - e \langle \delta w \cdot E(t, x_0) \rangle, \end{aligned}$$

¹⁾ È da notare a questo proposito che la differenza $\omega - kv$ rappresenta la frequenza del campo nel sistema di riferimento che si muove insieme con l'elettrone.

o, in forma complessa ¹⁾,

$$q = -\frac{e}{2} \operatorname{Re} \left\{ w_0 \delta x \frac{\partial E^*}{\partial x_0} - \delta w \cdot E^* \right\}.$$

Sostituendovi E , δx , δw dalle formule (30,7-8) otteniamo dopo una semplice trasformazione

$$q = \frac{e^2}{2m} |E|^2 \frac{d}{dw_0} \frac{w_0 \delta}{\delta^2 + k^2 (w_0 - \omega/k)^2}.$$

Ora resta di sommare q sugli elettroni con tutte le possibili quantità di moto iniziali $p_x = mw_0$:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} q f(p_x) dp_x = -\frac{e^2 |E|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_0 \delta}{\delta^2 + k^2 (w_0 - \omega/k)^2} \frac{df}{dp_x} dp_x$$

(dopo integrazione per parti). Il passaggio al limite si realizza mediante la formula

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta^2 + z^2} = \pi \delta(z) \quad (30,9)$$

e conduce immediatamente all'espressione (30,6).

In accordo con il carattere reversibile della dissipazione senza urti, le condizioni termodinamiche non richiedono che la grandezza Q sia positiva (come ciò si verifica per una dissipazione vera e propria). L'espressione (30,6) è sempre positiva per una distribuzione isotropa $f(p)$ (si veda il problema). Per distribuzioni anisotrope, tuttavia, Q può essere una grandezza negativa, quando cioè gli elettroni cederanno in media l'energia all'onda anziché riceverla ²⁾. Questi casi sono strettamente legati all'instabilità possibile del plasma (si veda il § 61) e, quindi, la condizione $Q > 0$ (e perciò anche $\epsilon'' > 0$) non è altro che il risultato della stabilità dello stato del plasma.

Dal punto di vista della raffigurazione fisica dello smorzamento di Landau descritta sopra, la presenza della derivata df/dp_x nella formula (30,6) si può interpretare intuitivamente nel seguente modo:

¹⁾ Se due grandezze A e B , periodiche rispetto al tempo, sono rappresentate in forma complessa ($\propto e^{-i\omega t}$), allora

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \frac{1}{4} \langle (A + A^*) (B + B^*) \rangle.$$

I valori medi dei prodotti AB e A^*B^* contenenti $e^{-2i\omega t}$ ed $e^{2i\omega t}$ si annullano e resta

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (AB^*).$$

²⁾ La deduzione suindicata della formula (30,6) non è legata all'isotropia della distribuzione. Neanche l'espressione (30,2) è legata all'isotropia: si veda più avanti al § 32.

allo scambio di energia con il campo partecipano le particelle di velocità v_x vicine a ω/k ; inoltre, le particelle con $v_x < \omega/k$ ricevono l'energia dall'onda e quelle con $v_x > \omega/k$ la cedono all'onda; l'onda perderà energia se le prime particelle superano in numero le seconde.

PROBLEMA

Mostrare che per un plasma isotropo la dissipazione senza urti Q è sempre positiva.

Soluzione. Nel plasma isotropo f è una funzione unicamente di $p^2 = p_x^2 + p_{\perp}^2$ (p_x e p_{\perp} sono le componenti di \mathbf{p} , cioè longitudinale e trasversale rispetto a \mathbf{k}). Scriviamo

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = \frac{d}{dp_x} \int_0^{\infty} f(p_x^2 + p_{\perp}^2) \pi dp_{\perp}^2 = 2\pi p_x \int_0^{\infty} f'(p_x^2 + p_{\perp}^2) d(p_{\perp}^2),$$

e poiché $f(p^2) \rightarrow 0$ per $p^2 \rightarrow \infty$, allora

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = -2\pi p_x f(p_x^2),$$

in modo che $df/dp_x < 0$ per $p_x = \omega/k > 0$.

§ 31. Costante dielettrica del plasma di Maxwell

Applichiamo la formula (29,10) al plasma elettronico con distribuzione d'equilibrio degli elettroni (maxwelliana)

$$f(p_x) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m T_e}\right), \quad (31,1)$$

dove T_e è la temperatura del gas elettronico (tenendo conto che più avanti verrà considerata anche la componente ionica del plasma, denotiamo con l'indice e le grandezze riferite agli elettroni). Troviamo

$$\epsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2} \left[1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} kv_{Te}}\right) \right], \quad (31,2)$$

dove la funzione $F(x)$ è definita dall'integrale ¹⁾

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z - x - i0} = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z - x} + i\sqrt{\pi} x e^{-x^2} \quad (31,3)$$

e si sono introdotti i parametri

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m}}, \quad a_e = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi N_e e^2}}. \quad (31,4)$$

¹⁾ Per forme diverse della rappresentazione della funzione $F(x)$ si veda il libro di F.D. Fried, S.D. Conte, *The plasma dispersion function*, Academic Press, N.Y., 1961.

La grandezza v_{Te} è la velocità termica media degli elettroni; a_e è il raggio di Debye definito in base alla carica, alla temperatura e alla densità elettronica.

Le espressioni limite della funzione $F(x)$ per x grandi e piccoli si possono ottenere facilmente dalla definizione (31,3). Per $x \gg 1$ scriviamo

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left(1 + \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} + \dots\right) dz.$$

Gli integrali dei termini in x dispari si annullano e gli altri danno

$$F(x) + 1 \approx -\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4} + i\sqrt{\pi} x e^{-x^2}, \quad x \gg 1. \quad (31,5)$$

Per $x \ll 1$ cambiamo dapprima la variabile d'integrazione $z = u + x$ e in seguito sviluppiamo in potenze di x :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - 2ux} \frac{du}{u} \approx \\ &\approx \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left(\frac{1}{u} - 2x\right) du. \end{aligned}$$

Il valore principale dell'integrale del primo termine (dispari in u) si annulla e, tenendo conto del secondo termine, troviamo

$$F(x) \approx -2x^2 + i\sqrt{\pi}x, \quad x \ll 1. \quad (31,6)$$

Queste formule consentono di scrivere espressioni limite per la costante dielettrica. Per grandi frequenze abbiamo

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + \\ &+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \Omega_e^2}{(kv_{Te})^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) \quad \text{per } \omega/kv_{Te} \gg 1. \end{aligned} \quad (31,7)$$

Qui è stato introdotto il parametro

$$\Omega_e = \frac{v_{Te}}{a_e} = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m}} \quad (31,8)$$

che si chiama frequenza di plasma (o di Langmuir) per gli elettroni. Come ci si doveva aspettare, nel caso $\omega/kv_{Te} \gg 1$ la dispersione spaziale conduce unicamente a piccole correzioni alla costante dielettrica, inoltre la parte immaginaria ϵ_i risulta essere esponenzialmente piccola, risultato dovuto al fatto che nella distribuzione maxwelliana soltanto una parte di elettroni esponenzialmente piccola ha velocità

$v_x = \omega/k \gg v_{Te}$. Il valore limite della costante dielettrica indipendente da k è

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\Omega_e/\omega)^2. \quad (31,9)$$

Questa espressione si riferisce sia alla costante dielettrica longitudinale che a quella trasversale (si veda la formula (28,8)). È facile ottenerla mediante considerazioni elementari senza ricorrere all'equazione cinetica.

Infatti, per $k \rightarrow 0$ il campo dell'onda si può supporre omogeneo e allora l'equazione del moto elettronico $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ dà $\mathbf{v} = e\mathbf{E}/im\omega$, in modo che la densità della corrente creata dagli elettroni è

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N_e}{im\omega} \mathbf{E}.$$

D'altra parte, abbiamo

$$\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P} = -i\omega \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Il confronto di queste due espressioni conduce alla formula (31,9).

Nel caso limite inverso per frequenze piccole abbiamo

$$\varepsilon_l = 1 + \left(\frac{\Omega_e}{kv_{Te}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{kv_{Te}}\right)^2 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}}\right] \quad \text{per } \omega/kv_{Te} \ll 1. \quad (31,10)$$

Sottolineiamo che la dispersione spaziale elimina il polo per $\omega = 0$, che ha la costante dielettrica di un mezzo conduttore ordinario. Notiamo anche che la parte immaginaria è relativamente piccola (anche se non esponenzialmente) anche per piccole frequenze, ma questa volta ciò è dovuto al piccolo volume di fase degli elettroni, in cui si verifica la condizione $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega$.

È stato mostrato al § 29 che la funzione $\varepsilon_l(\omega)$ definita dall'integrale (29,10) non ha punti singolari nel semipiano superiore di ω e che i suoi punti singolari nel semipiano inferiore sono definiti dai punti singolari di $df(p_x)/dp_x$ come funzione della variabile complessa p_x . Ma per la distribuzione maxwelliana la funzione

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} \sim p_x \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT}\right)$$

in generale non ha punti singolari a distanze finite in tutto il piano complesso p_x (cioè è una funzione intera). Perciò la costante dielettrica di un plasma maxwelliano senza urti è anch'essa una funzione intera di ω , cioè non ha affatto singolarità per valori finiti di ω .

Finora abbiamo considerato il contributo nella costante dielettrica dovuto esclusivamente alla componente elettronica del plasma. Il contributo della parte ionica si calcola allo stesso modo e i due contributi in $\varepsilon_l - 1$ si sommano semplicemente; otteniamo così

la generalizzazione evidente della formula (31,2)

$$\varepsilon_i - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} \left[F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} kv_{Te}} \right) + 1 \right] + \frac{1}{(ka_i)^2} \left[F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} kv_{Ti}} \right) + 1 \right]. \quad (31,11)$$

Gli indici e ed i distinguono le grandezze riferite a elettroni e ioni;

$$v_{Ti} = \left(\frac{T_i}{M} \right)^{1/2}, \quad a_i = \frac{v_{Ti}}{\Omega_i} = \left[\frac{T_i}{4\pi N_i (ze)^2} \right]^{1/2},$$

$$\Omega_i^2 = \frac{4\pi N_i (ze)^2}{M} \quad (31,12)$$

(M e ze sono la massa e la carica ioniche). L'espressione (31,11) si riferisce al plasma « a doppia temperatura », in cui ciascuna delle componenti ha una distribuzione d'equilibrio, ma a temperature diverse in modo che elettroni e ioni non si trovano in equilibrio reciproco. Questo caso è completamente naturale, in quanto la grande differenza di massa rende difficile lo scambio di energia per urti tra elettroni e ioni.

Di solito, si ha a che fare con la situazione in cui $T_i \ll T_e$; in questo caso $v_{Ti} \ll v_{Te}$. Tenendo anche conto che sempre $\Omega_i \ll \Omega_e$, è facile concludere che nel caso $\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}$ il contributo ionico è trascurabile in modo che è valida la formula (31,7). Nel caso limite inverso abbiamo

$$\varepsilon_i - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} + \frac{1}{(ka_i)^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{(ka_i)^2 kv_{Ti}}, \quad (31,13)$$

$$\omega \ll kv_{Ti} \ll kv_{Te}.$$

Il caso $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ sarà considerato al § 32.

Tutti i calcoli in questo e nei paragrafi precedenti sono stati eseguiti per la parte longitudinale della costante dielettrica. Il calcolo della parte trasversale presenta interesse minore. Infatti, il campo trasversale si riduce, di solito, alle onde elettromagnetiche ordinarie, per cui la frequenza e il vettore d'onda sono legati dalla relazione $\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon_t}$. In questo caso $\omega/k > c \gg v_{Te}$, cioè $\omega \gg kv_{Te}$; perciò la dispersione spaziale è piccola e la costante dielettrica si esprime mediante la formula (31,9). Per queste onde non esiste smorzamento di Landau; poiché la velocità di fase dell'onda supera la velocità della luce nel plasma non esistono particelle che potrebbero muoversi in fase con l'onda (a rigore, la dimostrazione di questa affermazione richiede un esame relativistico; si veda il problema 4).

P R O B L E M I

1. Trovare il potenziale del campo elettrico creato da una piccola carica puntiforme aggiunta e_1 che si trova a riposo nel plasma.

Soluzione. Tenendo conto della polarizzazione del plasma, il campo è definito dall'equazione $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi e_1 \delta(\mathbf{r})$. Per un campo costante le componenti di Fourier dell'induzione e del potenziale sono legate dalla relazione $\mathbf{D}_k = \varepsilon_l(0, k) \mathbf{E}_k = -ik\varepsilon_l(0, k) \varphi_k$. Perciò per φ_k troviamo l'equazione

$$ik\mathbf{D}_k = k^2\varepsilon_l(0, k) \varphi_k = 4\pi e_1.$$

Ricavando $\varepsilon_l(0, k)$ dalla (31,13) abbiamo

$$\varphi_k = \frac{4\pi e_1}{k^2 + a^{-2}}, \quad a^{-2} = a_e^{-2} + a_i^{-2}.$$

La funzione delle coordinate corrispondente è

$$\varphi = \frac{e_1}{r} e^{-r/a};$$

quindi, la costante dielettrica (31,13) descrive la schermatura della carica statica in accordo con V, § 78. La condizione di piccola carica, $e_1 \ll Na^3e$, $-e_1$, deve essere piccola rispetto alla carica delle particelle del plasma nel volume $\sim a^3$.

2. Calcolare la costante dielettrica trasversale di un plasma.

Soluzione. Calcolata la polarizzazione elettronica $\mathbf{P} = -\mathbf{j}/i\omega$ con \mathbf{j} definito dalla (29,3), otteniamo il tensore ¹⁾

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i0} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_\beta} d^3p. \quad (1)$$

La parte trasversale si separa da $\varepsilon_{\alpha\beta}$ come

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right]$$

ed è data dall'integrale

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \mathbf{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_\perp} \frac{d^3p}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i0}, \quad (2)$$

dove $\mathbf{p}_\perp = m\mathbf{v}_\perp$ è la componente della quantità di moto, trasversale rispetto a \mathbf{k} . Dopo l'integrazione rispetto a d^2p_\perp troviamo infine per la distribuzione maxwelliana f

$$\varepsilon_t - 1 = \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k v_{Te}} \right) \quad (3)$$

con la funzione F definita dalla (31,3); gli ioni portano a $\varepsilon_t - 1$ un contributo analogo. Nei casi limite abbiamo

$$\varepsilon_t - 1 = -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left[1 + \left(\frac{k v_{Te}}{\omega} \right)^2 \right] + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_e}{\omega k a_e} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right) \quad (4)$$

($\omega \gg k v_{Te} \gg k v_{Ti}$),

$$\varepsilon_t - 1 = -\frac{1}{(k a_e)^2} - \frac{1}{(k a_i)^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_e}{\omega k a_e} \quad (5)$$

($\omega \ll k v_{Ti} \ll k v_{Te}$).

¹⁾ In questa espressione il plasma non è supposto ancora isotropo.

3. Determinare la costante dielettrica di un plasma di elettroni ultrarelativistico; la temperatura $T_e \gg mc^2$ (V. P. Silin, 1960).

Soluzione. L'equazione cinetica conserva la sua forma (27,9) anche nel caso relativistico. Corrispondentemente restano valide le formule del tipo (29,9) o (2) del problema 2. Nel caso ultrarelativistico la velocità degli elettroni $v \approx c$, la loro energia vale cp e la funzione di distribuzione d'equilibrio è

$$f(p) = \frac{N_e c^3}{8\pi T_e^3} e^{-cp/T_e}.$$

Troviamo la costante dielettrica longitudinale

$$\epsilon_l - 1 = \frac{4\pi e^2 c}{k T_e} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \frac{f(p) \cos \theta \cdot 2\pi p^2 dp d \cos \theta}{kc \cos \theta - \omega - i0} \quad (6)$$

(θ è l'angolo tra \mathbf{k} e \mathbf{v}). L'integrazione della distribuzione f rispetto a $2\pi p^2 dp$ dà $N_e/2$ e, in seguito, l'integrazione rispetto a $d \cos \theta$, con aggiramento del polo $\cos \theta = \omega/kc$ dal basso, conduce al risultato

$$\begin{aligned} \epsilon'_l(\omega, k) - 1 &= \frac{4\pi N_e e^2}{k^2 T_e} \left[1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \left| \frac{\omega - ck}{\omega + ck} \right| \right], \\ \epsilon''_l(\omega, k) &= \begin{cases} \pi\omega/2kc & \text{per } \omega/k < c, \\ 0 & \text{per } \omega/k > c. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Analogamente, partendo dalla (2) troviamo la costante dielettrica trasversale

$$\begin{aligned} \epsilon'_t(\omega, k) - 1 &= \frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) \ln \left| \frac{\omega - ck}{\omega + ck} \right| - \frac{2\omega}{ck} \right], \\ \epsilon''_t(\omega, k) &= \begin{cases} \pi(1 - \omega^2/c^2 k^2) & \text{per } \omega/k < c, \\ 0 & \text{per } \omega/k > c. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

4. Trovare la parte immaginaria ϵ_i di un plasma di elettroni non relativistici ($T_e \ll mc^2$) per $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ (V. P. Silin, 1960).

Soluzione. Dalla formula (29,9), che è valida qualunque sia la velocità degli elettroni, dopo integrazione rispetto a $d \cos \theta$ ricaviamo

$$\epsilon''(\omega, k) = \frac{8\pi^3 e^2 \omega}{k^3 T_e} \int_{p_m}^\infty \frac{f(p) p^2}{v} dp, \quad p_m = \frac{mc\omega}{\sqrt{c^2 k^2 - \omega^2}} \quad (9)$$

il polo $\cos \theta = \omega/kv$ giace sul cammino d'integrazione rispetto a $\cos \theta$ soltanto per $\omega/kv < 1$; perciò il limite inferiore di integrazione rispetto a dp corrisponde al valore $v = \omega/k$. La funzione di distribuzione per $T_e \ll mc^2$, valida per tutte le velocità degli elettroni, è

$$f(p) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left(-\frac{mc^2}{T_e} - \frac{\epsilon(p)}{T_e} \right), \quad \epsilon = c(p^2 + m^2 c^2)^{1/2}$$

(il valore dell'integrale di normalizzazione è definito dalla regione $\epsilon - mc^2 \approx p^2/2m \sim T_e \ll mc^2$). Per $\omega/k \sim c \gg v_{Te}$ nell'integrale (9) è importante la regione di valori p in prossimità del limite inferiore. Ponendo nell'esponente

$$\epsilon(p) \approx \epsilon(p_m) + \frac{d\epsilon}{dp} \Big|_{p=p_m} (p - p_m) = \epsilon(p_m) + \frac{\omega}{k} (p - p_m)$$

(o nel fattore davanti all'esponente $p \approx p_m$, $v \approx \omega/k$) e integrando rispetto a $p - p_m$ da 0 a ∞ , otteniamo

$$\varepsilon_l'' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \Omega_e^2}{(kv_{Te})^3} \frac{1}{1 - (\omega/kc)^2} \exp \left\{ -\frac{mc^2}{T_e} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/kc)^2}} - 1 \right] \right\}.$$

Questa formula esprime la legge dell'annullamento di ε_l'' per $\omega/kc \rightarrow 1$.

§ 32. Onde di plasma longitudinali

La dispersione spaziale conduce alla possibilità di propagazione nel plasma di onde elettriche longitudinali. La dipendenza della frequenza dal vettore d'onda (o, come si suol dire, la *legge della dispersione*) per queste onde è data dall'equazione

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (32,1)$$

Infatti, per $\varepsilon_l = 0$ abbiamo $D = 0$ per il campo elettrico longitudinale E . Ponendo anche $B = 0$, verifichiamo identicamente la seconda coppia di equazioni di Maxwell (28,2). Della prima coppia, invece, resta l'equazione $\text{rot } E = 0$, la cui verifica è garantita dalla longitudinalità del campo: $\text{rot } E = i[kE] = 0$.

Le radici dell'equazione (32,1) sono complesse ($\omega = \omega' + i\omega''$). Se la parte immaginaria ε_l'' è positiva, queste radici giacciono nel semipiano inferiore della variabile complessa ω , cioè $\omega'' < 0$. La grandezza $\gamma = -\omega''$ rappresenta la diminuzione dello smorzamento dell'onda che ubbidisce alla legge $e^{-\gamma t}$. È ovvio che si può parlare della propagazione dell'onda soltanto se $\gamma \ll \omega'$, ossia la diminuzione dello smorzamento deve essere piccola rispetto alla frequenza.

Otteniamo tale radice dell'equazione (32,1) supponendo che

$$\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}. \quad (32,2)$$

Allora alle oscillazioni partecipano i soli elettroni e la funzione $\varepsilon_l(\omega, k)$ è data dalla formula (31,7). L'equazione $\varepsilon_l = 0$ si risolve con il metodo delle approssimazioni successive. In prima approssimazione, omettendo tutti i termini dipendenti da k , troviamo che¹⁾

$$\omega = \Omega_e, \quad (32,3)$$

vale a dire che le onde hanno frequenza costante indipendente da k . Queste onde si chiamano onde di plasma o di Langmuir (I. Langmuir, L. Tonks, 1926). Esse sono lunghe nel senso che

$$ka_e \ll 1, \quad (32,4)$$

come ciò risulta per $\omega = \Omega_e$ dalla (32,2).

¹⁾ Se tenessimo conto delle oscillazioni degli ioni ciò implicherebbe soltanto una piccola traslazione di questa frequenza: $\omega^2 = \Omega_e^2 + \Omega_i^2$.

Per determinare la correzione dipendente da k alla parte reale della frequenza è sufficiente porre $\omega = \Omega_e$ nel termine correttivo in ε' ; allora otteniamo

$$\omega = \Omega_e \left(1 + \frac{3}{2} k^2 a_e^2 \right) \quad (32,5)$$

(A. A. Vlasov, 1938).

Inoltre, la parte immaginaria è

$$\omega'' = -\frac{1}{2} \Omega_e \varepsilon_i''(\omega, k) \quad (32,6)$$

ed è esponenzialmente piccola insieme con ε_i'' . Per la sua definizione (insieme con il fattore davanti all'esponente) bisogna sostituire in ε_i'' il valore già corretto (32,5). Come risultato otteniamo

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\Omega_e}{(ka_e)^3} \exp \left[-\frac{1}{2(ka_e)^2} - \frac{3}{2} \right] \quad (32,7)$$

(L. D. Landau, 1946). In virtù della condizione $ka_e \ll 1$, la diminuzione dello smorzamento delle onde di plasma è effettivamente esponenzialmente piccola. Essa aumenta con la diminuzione della lunghezza d'onda e per $ka_e \sim 1$ (quando la formula (32,7) è già inapplicabile) diventa dello stesso ordine di grandezza della frequenza, cosicché la nozione di propagazione delle onde di plasma non ha più senso.

Lo studio effettuato si riferisce, a rigore, solo al plasma isotropo, in cui il tensore della costante dielettrica si riduce, in accordo con la (28,7), alle due grandezze scalari ε_l e ε_t . Nel plasma anisotropo (cioè per una distribuzione $f(\mathbf{p})$ dipendente dalla direzione \mathbf{p}) non esistono onde rigorosamente longitudinali. Tuttavia, per condizioni appropriate in esso possono propagarsi onde « quasi-longitudinali », in cui la componente del campo $\mathbf{E}^{(t)}$, trasversale rispetto al vettore \mathbf{k} , è piccola rispetto alla componente longitudinale $\mathbf{E}^{(l)}$:

$$E^{(t)} \ll E^{(l)}. \quad (32,8)$$

Per determinare queste condizioni osserviamo, soprattutto, che trascurando $\mathbf{E}^{(t)}$ dall'equazione $\text{div } \mathbf{D} = 0$ risulta che

$$\mathbf{kD} \approx k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \frac{1}{k} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E^{(l)} = 0.$$

Questa uguaglianza, che definisce la legge di dispersione delle onde, si può riscrivere nella forma (32,1) se la costante dielettrica « longitudinale » è definita come

$$\varepsilon_l = \frac{1}{k^2} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}; \quad (32,9)$$

sottolineiamo che questa grandezza dipende ora dalla direzione \mathbf{k} . Tuttavia dalla condizione $\varepsilon_l = 0$ non deriva più l'uguaglianza

$D = 0$; la grandezza

$$D_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{k_\beta}{k} E^{(l)} \equiv \varepsilon_\alpha E^{(l)}$$

è diversa da zero (nel plasma isotropo, invece, $\varepsilon_\alpha \equiv 0$ per $\varepsilon_l = 0$). In seguito, dall'equazione di Maxwell $\text{rot } \mathbf{B} = c^{-1} \partial \mathbf{D} / \partial t$ ricaviamo la stima del campo magnetico nell'onda

$$B \sim \frac{\omega}{ck} \varepsilon E^{(l)}$$

e dall'equazione $\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{B} / \partial t$ una stima del campo elettrico trasversale

$$E^{(t)} \sim \frac{\omega}{ck} B \sim \left(\frac{\omega}{ck} \right)^2 \varepsilon E^{(l)}. \quad (32,10)$$

In tal modo, la condizione di « quasi-longitudinalità » (32,8) è soddisfatta se l'onda è « lenta » nel senso che

$$\omega/k \ll c/\sqrt{\varepsilon}. \quad (32,11)$$

Notiamo, infine, che la formula (29,10) resta in vigore anche per la grandezza ε_l definita dalla (32,9) nel caso di plasma anisotropo, come risulta con chiarezza deducendola dall'espressione

$$\mathbf{kP} = \frac{1}{4\pi} (k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta - \mathbf{kE})$$

con il campo longitudinale \mathbf{E} . In questo caso è importante che nell'equazione cinetica si possa trascurare la forza di Lorentz $e[\mathbf{vB}]/c$ rispetto a $e\mathbf{E}$ (sebbene il suo prodotto con $\partial f / \partial \mathbf{p}$ non si annulli più identicamente per una funzione $f(\mathbf{p})$ anisotropa). Con la stima (32,10) abbiamo infatti

$$\frac{|[\mathbf{vB}]|}{cE^{(l)}} \sim \frac{\omega \bar{v}}{kc^2} \ll 1.$$

Questo rapporto è piccolo sia in virtù della condizione di « lentezza » dell'onda (32,11) che in virtù di $\bar{v} \ll c$.

PROBLEMI

1. Dedurre la legge di dispersione per le oscillazioni trasversali di un plasma.

Soluzione. Per le onde trasversali la legge di dispersione è data dalla relazione $\omega^2 = c^2 k^2 / \varepsilon_t$. Le oscillazioni ad alta frequenza ($\omega \gg kv_{Te}$) corrispondono alle onde elettromagnetiche ordinarie. Troviamo, con ε_t ottenuto dalla (31,9) (si veda anche il problema 2 del § 31),

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega_e^2.$$

Questa espressione è valida per qualunque k ; lo smorzamento di Landau non esiste, come è stato indicato alla fine del § 31.

Per le oscillazioni a bassa frequenza ($\omega \ll kv_{Te}$) il moto descritto dagli ioni è anch'esso inessenziale. Per le onde lunghe ($ka_e \ll 1$) il termine principale

nella legge di dispersione è

$$\omega = -i \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{k^2 c^2 v_{Te}}{\Omega_e^2}};$$

ω è una grandezza immaginaria pura e significa smorzamento aperiodico, in modo che è impossibile parlare, in generale, di propagazione di onde.

2. Dedurre la legge di dispersione delle onde plasmatiche in un plasma elettronico ultrarelativistico (V. P. Silin, 1960).

Soluzione. Per $\omega \gg ck$ la formula dedotta nel problema 3 del § 31 dà

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_e^2 \text{rel}}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 c^2}{\omega^2} \right),$$

dove

$$\Omega_e^2 \text{rel} = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e}.$$

Uguagliando a zero questa espressione otteniamo la legge di dispersione

$$\omega^2 = \Omega_e^2 \text{rel} + \frac{3}{5} c^2 k^2, \quad (ck \ll \Omega_e \text{rel}).$$

All'aumentare di k questa formula diventa inapplicabile, ma resta sempre $\omega > ck$ (e perciò lo smorzamento di Landau non esiste). Nel caso limite di k grandi la frequenza ω tende a ck secondo la legge

$$\omega = ck \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{2k^2 c^2}{3\Omega_e^2 \text{rel}} - 2 \right) \right].$$

3. Risolvere il problema 2 per le onde trasversali.

Soluzione. Ricorrendo all'espressione di $\varepsilon_l(\omega, k)$, ottenuta nel problema 3 del § 31, deduciamo la legge di dispersione

$$\omega^2 = \Omega_e^2 \text{rel} + \frac{6}{5} c^2 k^2 \quad \text{per } \omega \gg ck.$$

Per grandi k l'espressione limite è

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \Omega_e^2 \text{rel} + c^2 k^2.$$

Anche qui resta sempre $\omega > ck$ e perciò non esiste smorzamento.

§ 33. Onde ionico-acustiche

Accanto alle onde plasmatiche legate alle oscillazioni degli elettroni, nel plasma si propagano anche onde in cui subiscono oscillazioni notevoli le densità elettronica e ionica. Questo ramo dello spettro delle oscillazioni ha uno smorzamento debole (e perciò si può parlare della propagazione di onde) nel caso in cui la temperatura del gas ionico nel plasma sia piccola rispetto alla temperatura degli elettroni:

$$T_i \ll T_e. \quad (33,1)$$

Come sarà confermato dai risultati dei calcoli, la velocità di fase di queste onde verifica le disuguaglianze

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \quad (33,2)$$

La piccolezza dello smorzamento di Landau in queste condizioni è evidente a priori: poiché la velocità di fase si trova all'esterno degli intervalli fondamentali di dispersione delle velocità termiche sia ioniche che elettroniche, soltanto una parte piccola di particelle può muoversi in fase con l'onda e, quindi, partecipare allo scambio di energia con essa.

Il contributo degli elettroni alla costante dielettrica, nelle condizioni (33,2), è dato dalla formula limite (31,10) e il contributo degli ioni dalla formula (31,7), sostituendo le grandezze elettroniche con quelle ioniche. Con la precisione necessaria abbiamo

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{(ka_e)^2} \left[1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right]. \quad (33,3)$$

Trascurando dapprima la parte immaginaria relativamente piccola, dall'equazione $\varepsilon_l = 0$ ricaviamo

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k^2 a_e^2}{1 + k^2 a_e^2} = \frac{zT_e}{M} \frac{k^2}{1 + k^2 a_e^2} \quad (33,4)$$

(nell'ultima espressione abbiamo usato il fatto che $N_e = zN_i$).

Per le onde più lunghe, con la condizione $ka_e \ll 1$, la legge di dispersione (33,4) si riduce alla relazione ¹⁾

$$\omega = k \sqrt{\frac{zT_e}{M}}, \quad ka_e \ll 1. \quad (33,5)$$

La frequenza è proporzionale al vettore d'onda come nelle onde acustiche ordinarie. Le onde che ubbidiscono a questa legge di dispersione si chiamano onde *ionico-acustiche*. La loro velocità di fase è $\omega/k \sim (T_e/M)^{1/2}$, in modo che la condizione (33,2) si verifica effettivamente. Tenendo conto della parte immaginaria ε_l nell'approssimazione successiva, è facile trovare la diminuzione dello smorzamento

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{\pi z m}{8M}}. \quad (33,6)$$

Questo smorzamento è condizionato dagli elettroni. Quanto al contributo degli ioni a γ , esso è esponenzialmente piccolo e contiene il fattore $\exp(-zT_e/2T_i)$.

Per lunghezze d'onda più piccole nella regione $1/a_e \ll k \ll 1/a_i$ (che esiste in virtù della disuguaglianza supposta (33,1)), dalla (33,4) si ricava semplicemente

$$\omega \approx \Omega_i. \quad (33,7)$$

¹⁾ La legge (33,5) è stata dedotta da *Langmuir e Tonks* (1926) e la necessità della condizione (33,1) è stata indicata da *G.V. Gordeev* (1954).

Queste onde ioniche sono analoghe a quelle di plasma elettroniche. È facile provare che anche in questo caso vengono soddisfatte le condizioni (33,2) e che lo smorzamento è piccolo. Al diminuire ulteriore delle lunghezze d'onda lo smorzamento, tuttavia, aumenta, e per $ka_i \gg 1$ il contributo ionico alla diminuzione dello smorzamento è comparabile con la frequenza, in modo che è impossibile parlare di propagazione di onde.

Nella fig. 8 è rappresentato schematicamente lo spettro (la legge di dispersione) per le dette oscillazioni a basse frequenze (la curva inferiore) in confronto allo spettro delle onde elettroniche di plasma ad alta frequenza (la curva superiore). In tratteggio sono indicate le regioni in cui lo smorzamento diventa grande.

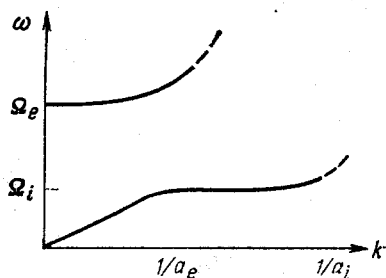


Fig. 8

§ 34. Rilassamento della perturbazione iniziale

Consideriamo il problema della soluzione dell'equazione cinetica con il campo autocompatibile, con le condizioni iniziali assegnate (L. D. Landau, 1946). Ci limiteremo al caso di un campo elettrico puramente potenziale ($E = -\nabla\varphi$), con campo magnetico nullo e supporremo che alla perturbazione sia soggetta solo la distribuzione elettronica, per distribuzione degli ioni invariante.

Supporremo piccola anche la perturbazione iniziale: la distribuzione iniziale elettronica è

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (34,1)$$

dove $f_0(\mathbf{p})$ è la distribuzione d'equilibrio (maxwelliana) e $g \ll f_0$. La perturbazione resta piccola, ovviamente, anche agli istanti successivi, in modo che le equazioni si possono linearizzare; cerchiamo la funzione di distribuzione nella forma

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (34,2)$$

Per la piccola correzione δf e per il potenziale del campo autocompatibile $\varphi(t, \mathbf{r})$ (infinitesimo dello stesso ordine) troviamo un sistema di equazione composto dall'equazione cinetica

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + e \nabla \varphi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (34,3)$$

e dall'equazione di Poisson

$$\Delta \varphi = 4\pi e \int \delta f d^3p \quad (34,4)$$

(la carica elettronica d'equilibrio è compensata dalla carica ionica).

Poiché queste equazioni sono lineari e non contengono le coordinate in forma esplicita, le funzioni cercate δf e φ si possono sviluppare in integrale di Fourier rispetto alle coordinate e scrivere le equazioni per ciascuna componente di Fourier separatamente. In altre parole, è sufficiente considerare soluzioni della forma

$$\delta f(t, r, p) = f_k(t, p) e^{ikr}, \quad \varphi(t, r) = \varphi_k(t) e^{ikr}. \quad (34,5)$$

Per queste soluzioni le equazioni (34,3-4) assumono la forma

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikv f_k + ie\varphi_k k \frac{\partial f_0}{\partial p} = 0, \quad (34,6)$$

$$k^2 \varphi_k = -4\pi e \int f_k d^3 p. \quad (34,7)$$

Per risolvere queste equazioni è comodo ricorrere alla trasformazione di Fourier unilaterale definendo l'immagine $f_{\omega k}^{(+)}(p)$ della funzione $f_k(t, p)$ come

$$f_{\omega k}^{(+)}(p) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} f_k(t, p) dt. \quad (34,8)$$

La trasformazione inversa è data dalla formula

$$f_k(t, p) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} f_{\omega k}^{(+)}(p) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (34,9)$$

dove l'integrale si calcola nel piano complesso ω lungo la retta parallela all'asse reale, passante sopra di essa ($\sigma > 0$) e più alta di tutte le singolarità della funzione $f_{\omega k}^{(+)}$.

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione (34,6) per $e^{-i\omega t}$ e integriamo rispetto a t . Osservando che

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial t} e^{i\omega t} dt = f_k e^{i\omega t} \Big|_0^{\infty} - i\omega \int_0^{\infty} f_k e^{i\omega t} dt = -g_k - i\omega f_{\omega k}^{(+)}$$

¹⁾ La trasformazione (34,8-9) non è altro che la nota trasformazione di Laplace

$$f_p = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} f_p e^{pt} dp,$$

nella quale la variabile p è stata sostituita con $-i\omega$ e, rispettivamente, si è cambiato il cammino d'integrazione nella formula della funzione $f(t)$ in base alla sua immagine f_p .

(dove $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \equiv f_{\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})$) e dividendo per $i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)$ entrambi i membri dell'equazione, otteniamo

$$f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{1}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \left[g_{\mathbf{k}} - ie\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (34,10)$$

Analogamente dalla (34,7) ricaviamo

$$k^2 \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -4\pi e \int f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) d^3 p. \quad (34,11)$$

Sostituendo nella (34,11) $f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$ dalla (34,10) otteniamo già l'equazione che definisce la sola $\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$ e da essa troviamo che

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) d^3 p}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}, \quad (34,12)$$

dove si è introdotta la costante dielettrica longitudinale ε_l in accordo con la (29,9). Introducendo di nuovo (come al § 29) la componente della quantità di moto $p_x = mv_x$ lungo la direzione \mathbf{k} , riscriviamo questa formula come segue:

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathbf{k}}(p_x) dp_x}{i(kv_x - \omega)}, \quad (34,13)$$

dove

$$g_{\mathbf{k}}(p_x) = \int g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) dp_y dp_z.$$

Per la definizione ulteriore della dipendenza temporale del potenziale secondo la formula di inversione

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} e^{-i\omega t} \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} d\omega \quad (34,14)$$

è necessario stabilire preliminarmente le proprietà analitiche di $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ quale funzione della variabile complessa ω .

Un'espressione della forma

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \int_0^{\infty} \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\omega t} dt$$

come funzione della variabile complessa ω ha senso soltanto nel semipiano superiore. Lo stesso si riferisce anche all'espressione (34,13), dove il cammino d'integrazione (asse reale p_x) passa sotto il polo $p_x = m\omega/k$. Come abbiamo visto al § 29, la funzione della variabile ω definita da questo integrale nel suo prolungamento analitico al semipiano inferiore ha singolarità solo nei punti coincidenti con i punti singolari della funzione $g_{\mathbf{k}}(p_x)$. Supporremo che $g_{\mathbf{k}}(p_x)$ come funzione della variabile complessa p_x sia una funzione intera

(cioè che essa non abbia alcuna singolarità per p_x finite); allora l'integrale considerato definisce anch'esso una funzione intera di ω .

È stato detto al § 31 che la costante ε_l del plasma maxwelliano è anch'essa una funzione intera di ω . In tal modo, la funzione $\varphi_{\omega k}$, analitica in tutto il piano ω , è quoziente di due funzioni intere. Ne segue che le uniche singolarità (poli) della funzione $\varphi_{\omega k}$ sono gli zeri del suo denominatore, cioè gli zeri della funzione $\varepsilon_l(\omega, k)$.

Queste considerazioni consentono di stabilire la legge asintotica di decrescenza del potenziale $\varphi_k(t)$, per tempi t grandi. Nella formula d'inversione (34,14) si integra lungo la retta orizzontale nel piano ω .

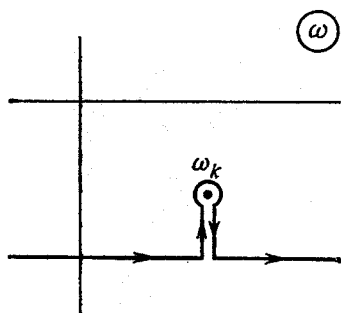


Fig. 9

Tuttavia, intendendo con $\varphi_{\omega k}$ una funzione analitica, definita nel suddetto modo in tutto il piano, possiamo spostare il cammino d'integrazione nel semipiano inferiore in modo tale che non sia intersecato nessun polo della funzione. Sia $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$ la radice dell'equazione $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$ avente la parte immaginaria più piccola in modulo (cioè la più vicina all'asse reale). Integriamo nella (34,14) lungo un cammino posto sufficientemente lontano sotto il punto $\omega = \omega_k$ e aggirante

questo punto (così come gli altri poli giacenti sopra) nel modo indicato nella fig. 9. Allora nell'integrale sarà importante (per t grandi) solo il residuo relativo al polo ω_k ; le altre parti dell'integrale, compreso l'integrale esteso alla parte orizzontale del cammino, saranno esponenzialmente piccole rispetto al residuo suindicato, in quanto nell'espressione integranda figura il fattore $e^{-i\omega t}$ che decresce rapidamente all'aumentare di $|\text{Im } \omega|$. Quindi, la legge asintotica di decrescenza del potenziale è data dall'espressione

$$\varphi_k(t) \sim e^{-i\omega'_k t} e^{-|\omega''_k| t}, \quad (34,15)$$

vale a dire che con il tempo la perturbazione del campo si smorza esponenzialmente con decremento $\gamma_k = |\omega''_k|$ ¹⁾.

Per le perturbazioni ad onde lunghe ($ka_e \ll 1$) la frequenza ω_k e il decremento γ_k coincidono con quelli per le onde di plasma e sono definiti dalle formule (32,5-6). La diminuzione dello smorzamento

¹⁾ Se la funzione iniziale $g_k(p_x)$ ha singolarità, allora nel novero dei valori di ω concorrenti, oltre agli zeri della funzione $\varepsilon_l(\omega, k)$, figurano anche i punti singolari della funzione $\varphi_{\omega k}$ provenienti dalla singolarità dell'integrale nella formula (34,13). In particolare, se $g_k(p_x)$ ha una singolarità (punto di flesso, ad esempio) sull'asse reale, allora $\varphi_{\omega k}$ avrà anch'essa una singolarità per $\omega = kv_x$ reale. Questa perturbazione (nel plasma senza urti!) in generale non si smorzerà.

di queste perturbazioni è esponenzialmente piccola. Nel caso di perturbazioni ad onde corte ($ka_e \sim 1$) lo smorzamento diventa molto forte e la diminuzione γ_k grande anche rispetto a $\omega_k^{(1)}$.

Soffermiamoci, infine, sulle proprietà della distribuzione elettronica stessa. La funzione cercata $f_k(t, \mathbf{p})$ si ottiene mediante la sostituzione della (34,10) nell'integrale (34,9). Oltre ai poli nel semipiano inferiore provenienti da $\varphi_{\omega k}$, l'espressione integranda ha un polo nel punto $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ appartenente all'asse reale. Sarà questo polo a determinare il comportamento asintotico dell'integrale per t grandi. Mediante il suo residuo troviamo che

$$f_k(t, \mathbf{p}) \sim e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}. \quad (34,16)$$

Quindi, la perturbazione della funzione di distribuzione non si smorza con il tempo. La distribuzione diventa, tuttavia, una funzione della velocità oscillante sempre più rapidamente (il periodo di oscillazioni rispetto alla velocità $\sim 1/kt$). Perciò la perturbazione della densità (cioè l'integrale $\int f_k d^3p$) si smorza così come il potenziale φ_k ²).

L'evoluzione della funzione di distribuzione secondo la (34,16) si riferisce al tempo allorché il campo si può supporre smorzato; la formula (34,16) corrisponde semplicemente al cammino libero delle particelle, ciascuna con una velocità costante. Infatti, una funzione della forma

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}\mathbf{v}t)} \quad (34,17)$$

rappresenta una soluzione dell'equazione cinetica delle particelle libere

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (34,18)$$

per una distribuzione iniziale ($t = 0$) delle velocità assegnata e per una distribuzione periodica ($\sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) delle coordinate.

§ 35. *Eco di plasma*

Il carattere termodinamicamente reversibile dello smorzamento di Landau si manifesta in fenomeni non lineari originali, che si chiamano *eco di plasma*. Questi fenomeni compaiono in seguito a

¹) Ci si può chiedere: da dove proviene il grande smorzamento se la « velocità di fase » ω_k'/k giace all'esterno dell'intervallo fondamentale delle velocità termiche? In realtà, tuttavia, per $\gamma > \omega'$ non si può, in generale, intendere il rapporto ω'/k come velocità di fase. Se sviluppiamo di nuovo una funzione della forma $e^{-i\omega' t} e^{-\gamma t}$ in integrale di Fourier, in esso figureranno componenti con frequenze in tutto l'intervallo da 0 a γ e con « velocità di fase » da 0 a $\sim \gamma/k$.

²) Tuttavia, vogliamo notare in anticipo che il carattere oscillante della distribuzione per t grandi conduce a un forte aumento del numero efficace di urti coulombiani e, quindi, accelera lo smorzamento della perturbazione che, in fin dei conti, appare (si veda il problema del § 41).

quelle oscillazioni non smorzantisi della funzione di distribuzione (34,16), che restano dopo il rilassamento senza urti delle perturbazioni della densità (e del campo) nel plasma. Essi hanno di fatto un'origine cinematica non legata all'esistenza di un campo elettrico autocompatibile nel plasma. Dapprima illustreremo ciò sull'esempio di un gas composto da particelle non cariche e non collidenti.

Supponiamo che all'istante iniziale nel gas sia data una perturbazione, in cui la funzione di distribuzione, restando rispetto alle velocità maxwelliana in ogni punto dello spazio, varia lungo l'asse x secondo la legge periodica

$$\delta f = A_1 \cos k_1 x \cdot f_0(p) \quad \text{per } t = 0 \quad (35,1)$$

(in questo paragrafo con $p = mv$ indicheremo la componente x della quantità di moto; la funzione di distribuzione è supposta già integrata rispetto a p_y e p_z). Secondo la stessa legge lungo l'asse x (e allo stesso istante $t = 0$) varia anche la perturbazione della densità del gas, cioè l'integrale $\int \delta f \cdot dp$. Agli istanti successivi la perturbazione della funzione di distribuzione varierà secondo la legge

$$\delta f = A_1 \cos k_1 (x - vt) f_0(p), \quad (35,2)$$

corrispondente al moto libero di ogni particella lungo l'asse x con la propria velocità v . La perturbazione della densità, tuttavia, si smorzera (in un tempo $\sim 1/v_T k_1$) in seguito allo smorzamento dell'integrale $\int \delta f dp$, in seguito al fattore $\cos k_1 (x - vt)$ oscillante nelle velocità nell'espressione integranda. La legge asintotica di questo smorzamento per tempi $t \gg 1/k_1 v_T$ è data dall'espressione

$$\delta N = \int \delta f dp \propto \exp \left(-\frac{1}{2} k_1^2 v_T^2 t^2 \right) \quad (35,3)$$

(la stima dell'integrale si ottiene con il metodo del punto di sella).

Supponiamo ora che a un istante $t = \tau \gg 1/k_1 v_T$ la funzione di distribuzione sia di nuovo modulata con ampiezza A_2 e un vettore d'onda $k_2 > k_1$. La perturbazione della densità che compare si smorzera di nuovo (in un tempo $\sim 1/k_2 v_T$), ma per ricomparire all'istante

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \tau. \quad (35,4)$$

Infatti, la seconda modulazione implica la comparsa nella funzione di distribuzione (all'istante $t = \tau$) di un termine del secondo ordine della forma

$$\delta f^{(2)} = A_1 A_2 \cos(k_1 x - k_1 v \tau) \cos k_2 x \cdot f_0(p). \quad (35,5)$$

L'evoluzione ulteriore di questa perturbazione per $t > \tau$ la trasforma in

$$\begin{aligned}\delta f^{(2)} &= A_1 A_2 f_0(p) \cos[k_1 x - k_1 v t] \cos[k_2 x - k_2 v(t - \tau)] = \\ &= \frac{1}{2} A_1 A_2 f_0(p) \{ \cos[(k_2 - k_1)x - (k_2 - k_1)vt + k_2 v \tau] + \\ &\quad + \cos[(k_2 + k_1)x - (k_2 + k_1)vt + k_2 v \tau] \}.\end{aligned}$$

Si vede ora che all'istante $t = \tau'$ la dipendenza oscillante da v nel primo termine scompare, in modo che questo termine darà un contributo finito alla perturbazione della densità del gas con il vettore d'onda $k_2 - k_1$. L'eco così generata si smorzerà in seguito in un tempo $\sim 1/v_T(k_2 - k_1)$, e l'ultimo stadio di questo smorzamento si effettua secondo una legge analoga alla (35,3).

Passiamo allo studio di questo fenomeno in un plasma elettronico (R.W. Gould, T.M. O'Neil, J.H. Malmberg, 1967). Il suo meccanismo resta lo stesso, ma la legge concreta di smorzamento varia sotto l'influsso del campo autocompatibile.

Supporremo che le perturbazioni siano generate dalle quantità di moto di un potenziale esterno (creato da cariche « aggiunte ») $\varphi^{(ag)}$ applicate al plasma agli istanti $t = 0$ e $t = \tau$:

$$\varphi^{(ag)} = \varphi_1 \delta(t) \cos k_1 x + \varphi_2 \delta(t - \tau) \cos k_2 x; \quad (35,6)$$

inoltre viene supposto che $k_2 > k_1$ e $\tau \gg 1/k_1 v_T$, $1/\gamma(k_1)$ (dove $\gamma(k)$ è la diminuzione dello smorzamento di Landau).

La perturbazione della funzione di distribuzione ($f = f_0 + \delta f$) verifica l'equazione cinetica senza urti che, tenendo conto del termine del secondo ordine, ha la forma

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{df_0}{dp} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p}. \quad (35,7)$$

In questo caso il potenziale φ del campo creato nel plasma (comprendente anche la parte « aggiunta » $\varphi^{(ag)}$) soddisfa l'equazione

$$\Delta(\varphi - \varphi^{(ag)}) = 4\pi e \int \delta f dp. \quad (35,8)$$

Cercheremo la soluzione di queste equazioni nella forma degli integrali di Fourier

$$\delta f = \int f_{\omega' k'} e^{i(k' x - \omega' t)} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2},$$

$$\varphi = \int \varphi_{\omega'' k''} e^{i(k'' x - \omega'' t)} \frac{d\omega'' dk''}{(2\pi)^2}.$$

Ponendo queste espressioni, moltiplicando in seguito le equazioni per $e^{-i(hx-\omega t)}$ e integrandole rispetto a $dx dt$, otteniamo

$$(kv - \omega) f_{\omega k} + ek\varphi_{\omega k} \frac{df_0}{dp} = -e \int (k - k') \varphi_{\omega - \omega', k - k'} \frac{df_{\omega' k'}}{dp} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}, \quad (35,9)$$

$$-k^2 \varphi_{\omega k} = 4\pi e \int f_{\omega k} dp - k^2 \varphi_{\omega k}^{(ag)}, \quad (35,10)$$

dove

$$\varphi_{\omega k}^{(ag)} = \pi \varphi_1 [\delta(k + k_1) + \delta(k - k_1)] + \pi \varphi_2 [\delta(k + k_2) + \delta(k - k_2)] e^{i\omega\tau}.$$

Nell'approssimazione lineare (trascurando cioè il secondo membro della (35,9)) la soluzione di queste equazioni è

$$f_{\omega k}^{(1)} = -e \frac{df_0}{dp} \frac{k}{kv - \omega} \varphi_{\omega k}^{(1)}, \quad \varphi_{\omega k}^{(1)} = \frac{\varphi_{\omega k}^{(ag)}}{\varepsilon_l(\omega, k)}, \quad (35,11)$$

dove ε_l è la costante dielettrica (29,10). A questa soluzione corrispondono le perturbazioni smorzantisi dagli istanti $t = 0$ e $t = \tau$ con i decrementi $\gamma(k_1)$ e $\gamma(k_2)$, rispettivamente.

Nell'approssimazione del secondo ordine si deve porre la (35,11) a secondo membro dell'equazione (35,9) e così, per i termini del secondo ordine nelle perturbazioni della funzione di distribuzione e del potenziale si ottengono le equazioni

$$(kv - \omega) f_{\omega k}^{(2)} + ek\varphi_{\omega k}^{(2)} \frac{df_0}{dp} = \frac{dI_{\omega k}}{dp}, \quad (35,12)$$

$$k^2 \varphi_{\omega k}^{(2)} = -4\pi e \int f_{\omega k}^{(2)} dp, \quad (35,13)$$

dove

$$I_{\omega k} = -e \int (k - k') \varphi_{\omega - \omega', k - k'}^{(1)} f_{\omega' k'}^{(1)} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}. \quad (35,14)$$

L'effetto cercato, ossia l'eco con il vettore d'onda $k_2 - k_1$, sarà incluso nei termini a secondo membro dell'equazione (35,12) contenenti $\delta(k \pm (k_2 - k_1))$. Riuniamo questi termini nell'espressione di $I_{\omega k}$. All'istante $t = \tau$ la perturbazione $\varphi^{(1)}$, proveniente dall'impulso φ_1 applicato all'istante $t = 0$, si smorzerà. Perciò è evidente a priori che nella sostituzione della (35,11) nella (35,14) si deve tener conto in $\varphi_{\omega k}^{(1)}$ solo del termine con φ_2 ; i termini cercati della forma

$$I_{\omega k} = I_{\omega}(k_1, k_2) \delta(k - k_2 + k_1) + I_{\omega}(-k_1, -k_2) \delta(k + k_2 - k_1) \quad (35,15)$$

si ottengono inoltre dai termini in $f_{\omega k}^{(1)}$ contenenti φ_1 . Dopo l'integrazione rispetto a dk' nella (35,14) otteniamo

$$I_{\omega}(k_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{4} e^2 \varphi_1 \varphi_2 k_1 k_2 \frac{df_0}{dp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - \omega')\tau} d\omega'}{(k_1 v + \omega') \varepsilon_l(\omega', k_1) \varepsilon_l(\omega - \omega', k_2)}; \quad (35,16)$$

inoltre, come sempre, la variabile d'integrazione ω' si deve intendere come $\omega' + i0$ ¹⁾.

L'integrale (35,16) si può calcolare tenendo conto che τ è supposto grande ($\tau \gg 1/kv_T, 1/\gamma$). A tal fine spostiamo nel semipiano inferiore della variabile complessa ω' il contorno d'integrazione, che inoltre « si attacca » ai poli dell'espressione integranda. Questi poli si trovano negli zeri delle funzioni ε_l e nel punto $\omega' = -k_1 v - i0$. I primi di questi poli hanno le parti immaginarie negative non nulle ($-\gamma(k_1)$ o $-\gamma(k_2)$) e i loro contributi all'integrale (residui nei poli) si smorzano all'aumentare di τ come $e^{-\gamma\tau}$. Il contributo che si smorza proviene soltanto dal polo reale $\omega' = -k_1 v - i0$. Otteniamo così

$$I_{\omega}(k_1, k_2) = -e^2 \frac{i\pi}{2} \frac{df_0}{dp} \frac{\varphi_1 \varphi_2 k_1 k_2 e^{i(\omega + k_1 v)\tau}}{\varepsilon_l(-k_1 v, k_1) \varepsilon_l(\omega + k_1 v, k_2)}. \quad (35,17)$$

Tornando alle equazioni (35,12-13) e sostituendo $f_{\omega k}^{(2)}$ dalla prima equazione nella seconda, troviamo

$$\varphi_{\omega k}^{(2)} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI_{\omega k}}{dp} \frac{dp}{kv - \omega - i0}. \quad (35,18)$$

Calcolando la derivata $dI_{\omega k}/dp$ si deve derivare solo il fattore esponenziale nella (35,17), poiché $k_1 v_T \tau \gg 1$.

Riunendo ora le espressioni (35,15-18) così ottenute ed effettuando la trasformazione inversa di Fourier, otteniamo il potenziale d'eco cercato, con il vettore d'onda $k_3 = k_2 - k_1$, nella forma

$$\varphi^{(2)}(t, x) = \text{Re} \{A(t) e^{ik_3 x}\}. \quad (35,19)$$

Scriviamo subito l'ampiezza $A(t)$ nel limite asintotico per $t - \tau \rightarrow \infty$. In questo limite l'integrale rispetto a ω è definito dal residuo dell'espressione integranda solo nel polo $\omega = k_3 v - i0$. Troviamo, infine,

$$A(t) = -i\pi e^3 \varphi_1 \varphi_2 \tau \frac{k_1^2 k_2}{k_3^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0}{dp} \frac{e^{-ivk_3(t-\tau')} dp}{\varepsilon_l(k_3 v, k_3) \varepsilon_l(-k_1 v, k_1) \varepsilon_l(k_2 v, k_2)}, \quad (35,20)$$

dove $\tau' = k_2 \tau / k_3$.

¹⁾ Nel calcolare si deve tenere conto che ε_l dipende unicamente da $|k|$ e perciò nelle notazioni di questo paragrafo (dove $k \equiv k_x$) abbiamo $\varepsilon_l(\omega, -k) = \varepsilon_l(\omega, k)$.

Questa espressione — l'ampiezza dell'eco — è massima per $t = \tau'$, inoltre il valore massimo è proporzionale a τ , cioè all'intervallo di tempo tra due impulsi. Da ambo le parti del massimo l'ampiezza $A(t)$ decresce, ma secondo leggi diverse. L'integrale (35,20) è definito asintoticamente per $t - \tau' \rightarrow \infty$ dal residuo dell'espressione integranda nel suo polo con la parte immaginaria negativa più piccola in modulo; questo polo giace per $\varepsilon_1(k_3 v, k_3) = 0$ e la sua parte immaginaria vale $\text{Im } v = -\gamma(k_3)/k_3^1$. Dall'altra parte del

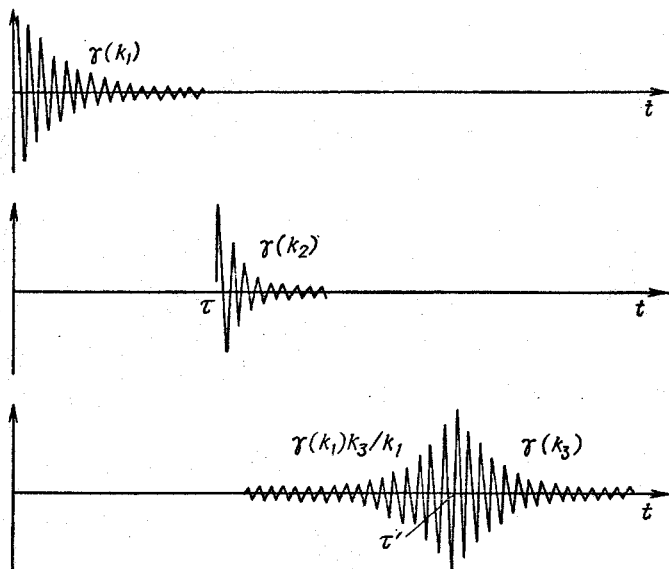


Fig. 10

massimo, per $t - \tau' \rightarrow -\infty$, l'integrale è definito dal residuo nel polo per $\varepsilon_1(-k_1 v, k_1) = 0$, per il quale $\text{Im } v = \gamma(k_1)/k_1$ (in questo caso il cammino d'integrazione deve essere spostato nel semipiano superiore della variabile complessa v). Come risultato troviamo che

$$A(t) \sim \exp[-\gamma(k_3)(t - \tau')] \quad \text{per } t - \tau' \rightarrow \infty,$$

$$A(t) \sim \exp\left[-\frac{k_3}{k_1} \gamma(k_1)(\tau' - t)\right] \quad \text{per } t - \tau' \rightarrow -\infty. \quad (35,21)$$

Quindi, l'ampiezza dell'eco, prima che sia raggiunto il massimo, aumenta con l'incremento $k_3 \gamma(k_1)/k_1$, e dopo il massimo diminuisce con decremento $\gamma(k_3)$. La fig. 10 illustra il fenomeno studiato: le

¹ È supposto che i vettori d'onda $k \ll 1/a_e$. Allora $\gamma(k)$ è esponenzialmente piccolo e decresce all'aumentare di k . Poiché $k_3 < k_2$, allora il polo per $\varepsilon_1(k_2 v, k_2) = 0$ si trova a priori più lontano, per queste ipotesi, dall'asse reale v che non il polo per $\varepsilon_1(k_3 v, k_3) = 0$.

prime due curve rappresentano l'andamento di variazione del potenziale nei due impulsi applicati agli istanti $t=0$ e $t=\tau$, la terza curva rappresenta la forma dell'eco. Per le curve sono indicati il corrispondente decremento o l'incremento.

I calcoli fatti trascurano gli urti. Perciò la condizione di applicabilità della formula quantitativa (35,20) è che all'istante t considerato le oscillazioni della funzione di distribuzione non abbiano fatto in tempo a smorzarsi sotto l'influsso degli urti. Anticipando l'esposizione ulteriore e usando i risultati del § 41, si può formulare questa condizione come segue:

$$\nu (\nu_T) (k\nu_T)^2 t^3 \ll 1, \quad (35,22)$$

dove $\nu (\nu_T)$ è la frequenza media degli urti coulombiani dell'elettrone.

§ 36. Cattura adiabatica di elettroni

Consideriamo il problema della distribuzione degli elettroni in un plasma che si trova in un campo elettrico potenziale inseribile lentamente. Siano L l'ordine di grandezza della lunghezza del campo e τ il tempo caratteristico della sua variazione. Supporremo che

$$\tau \gg L/\bar{v}_e. \quad (36,1)$$

Al tempo stesso supporremo τ piccolo rispetto al tempo di cammino libero degli elettroni, in modo che si tratterà come prima di un plasma senza urti.

In virtù della condizione (36,1) si può supporre stazionario il campo durante il tempo in cui lo percorre l'elettrone. Con la stessa approssimazione sarà stazionaria anche la funzione di distribuzione degli elettroni nel campo. Come è stato detto alla fine del § 27, la soluzione dell'equazione cinetica senza urti dipende unicamente dagli integrali del moto della particella; per una distribuzione stazionaria possono essere tali solo integrali non dipendenti esplicitamente dal tempo.

Ci limiteremo al caso unidimensionale, in cui il potenziale del campo ϕ dipende solo dalla coordinata x . Poiché il moto lungo gli assi y e z è inessenziale, si tratterà della funzione di distribuzione f soltanto rispetto alla quantità di moto p_x (e alla coordinata x).

Nel caso unidimensionale l'equazione del moto ha due integrali, di cui non dipende esplicitamente dal tempo (in un campo stazionario) solo uno, ossia l'energia dell'elettrone,

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m} + U(x), \quad (36,2)$$

dove $U(x) = -e\varphi(x)$ ¹⁾. Perciò la funzione di distribuzione stazionaria dipenderà da p_x e x soltanto nella combinazione (36,2):

$$f = f[\varepsilon(x, p_x)]. \quad (36,3)$$

Quanto alla forma della funzione $f(\varepsilon)$, essa va determinata ricorrendo alle condizioni al contorno.

Supponiamo che il campo $U(x)$ abbia la forma di una barriera di potenziale (fig. 11, a). In questo caso la funzione $f(\varepsilon)$ viene definita dalla forma di distribuzione degli elettroni che arrivano alla barriera dall'infinito. Così, se da ambo le parti lontano dalla barriera gli elettroni hanno una distribuzione d'equilibrio (omogenea rispetto allo spazio) con temperatura T_e , allora in tutto lo spazio sarà valida la distribuzione di Boltzmann

$$f = \frac{N_0}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_e}\right). \quad (36,4)$$

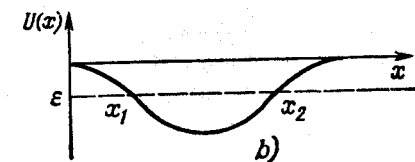


Fig. 11

La densità del gas elettronico, invece, sarà distribuita ovunque secondo la formula

$$N_e(x) = N_0 e^{-U(x)/T_e}, \quad (36,5)$$

dove N_0 è la densità lontano dalla barriera.

Supponiamo ora che il campo abbia la forma di una buca di potenziale (fig. 11, b). In questo caso la distribuzione degli elettroni con energia positiva ε sarà determinata di nuovo dalla distribuzione delle particelle provenienti dall'infinito; per una distribuzione d'equilibrio all'infinito, la distribuzione degli elettroni con $\varepsilon > 0$ sarà di Boltzmann in tutto lo spazio. Ma oltre alle particelle con $\varepsilon > 0$, in questo caso esistono anche particelle di energia $\varepsilon < 0$; queste particelle compiono un moto finito all'interno della buca di potenziale, cioè sono « catturate ». All'infinito non esistono particelle con $\varepsilon < 0$; perciò le considerazioni suindicate, in cui l'energia è supposta come una grandezza rigorosamente conservativa, sono insufficienti per stabilire la distribuzione delle particelle catturate. È necessario considerare anche la variazione dell'energia in un campo non rigorosamente stazionario, per cui risulta che questa distribuzione è, in generale, dipendente dalla storia passata, ossia dall'andamento dell'inclusione del campo (A. V. Gurevič, 1967).

¹⁾ Il secondo integrale del moto può essere, ad esempio, il valore iniziale (a un istante dato) della coordinata x_0 della particella, espresso in funzione del tempo e della coordinata corrente lungo la traiettoria $x_0(t, x)$.

In virtù della condizione (36,1) il campo varia poco durante il periodo del moto finito compiuto dalle particelle catturate. Come è noto, in questo caso si conserva il cosiddetto *invariante adiabatico*, cioè l'integrale

$$I(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{x_1}^{x_2} [2m(\varepsilon - U(t, x))]^{1/2} dx, \quad (36,6)$$

calcolato tra le due frontiere del moto (per ε e t dati). Sarà ora questa grandezza a svolgere il ruolo dell'integrale del moto, per mezzo del quale dovrà essere espressa la funzione di distribuzione delle particelle catturate:

$$f_{\text{cat}} = f_{\text{cat}}(I(t, \varepsilon)) \quad (36,7)$$

(dove l'energia ε , a sua volta, è supposta espressa in funzione di x e p_x secondo la formula (36,2)). La forma della funzione (36,7) va determinata dal fatto che per un'inclusione lenta del campo la funzione di distribuzione sarà una funzione continua di ε . Perciò la funzione $f_{\text{cat}}(I)$, come valore al contorno dell'energia delle particelle catturate, deve coincidere con la funzione di distribuzione delle particelle che compiono un moto infinito sopra la buca.

Il caso della buca di potenziale rappresentata nella fig. 11, b, tuttavia, è particolarmente semplice in quanto l'energia al contorno resta (per un'inclusione graduale del campo) costante, uguale a zero. Allora dalla suddetta condizione al contorno segue che f_{cat} si riduce alla costante

$$f_{\text{cat}} = f(0), \quad (36,8)$$

dove $f(\varepsilon)$ è la funzione di distribuzione delle particelle sopra la buca. Cerchiamo la distribuzione spaziale degli elettroni in questo caso se $f(\varepsilon)$ è la funzione di Boltzmann della forma (36,4).

Sommando il numero di elettroni con $\varepsilon > 0$ e con $\varepsilon < 0$ abbiamo

$$N_e = 2 \int_{p_1}^{\infty} f(\varepsilon) dp_x + 2 \int_0^{p_1} f(0) dp_x, \quad p_1 = (2m |U|)^{1/2}$$

(i fattori 2 tengono conto delle particelle con $p_x > 0$ e con $p_x < 0$). Sostituendovi $f(\varepsilon)$ dalla (36,4) otteniamo

$$N_e(t, x) = N_0 \left\{ e^{U/T_e} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{|U|}{T_e}} \right) \right] + 2 \sqrt{\frac{|U|}{\pi T_e}} \right\}, \quad (36,9)$$

dove

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du. \quad (36,10)$$

Per $\xi \ll 1$ dopo lo sviluppo dell'espressione (36,10) in potenze di u abbiamo

$$\Phi(\xi) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right).$$

Perciò la distribuzione degli elettroni catturati in una buca poco profonda ($|U| \ll T_e$) è data dalla formula

$$N_e = N_0 \left[1 + \frac{|U|}{T_e} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{|U|}{T_e} \right)^{3/2} \right]. \quad (36,11)$$

Il primo termine correttivo coincide con quello che si otterrebbe dalla formula di Boltzmann (36,5). Ma già la correzione successiva differisce da quella di Boltzmann.

Per $\xi \gg 1$ la differenza $1 - \Phi(\xi)$ è esponenzialmente piccola ($\sim \exp(-\xi^2)$). Perciò nel caso di una buca profonda ($|U| \gg T_e$) nella (36,9) ha importanza solo il secondo termine tra parentesi graffe, in modo che

$$N_e(t, x) = 2N_0 \left(\frac{|U|}{\pi T_e} \right)^{1/2}. \quad (36,12)$$

All'aumentare di $|U|$ la densità cresce in modo molto più lento di quanto dovrebbe fare in accordo con la formula di Boltzmann.

§ 37. Plasma quasi-neutro

Le equazioni dinamiche del plasma consentono una semplificazione superiore a quella normale per una categoria di fenomeni, nei quali le dimensioni caratteristiche delle lunghezze e dei tempi soddisfano le condizioni seguenti. La dimensione caratteristica L delle disomogeneità nel plasma è supposta grande rispetto al raggio elettronico di Debye:

$$a_e/L \ll 1. \quad (37,1)$$

Quanto alla velocità del processo, essa è supposta definita dal moto ionico, in modo che la dimensione caratteristica della velocità è data da una grandezza v_{Ti} , piccola rispetto alle velocità degli elettroni. Il moto ionico implica una lenta variazione del potenziale elettrico, appresso cui segue adiabaticamente la distribuzione elettronica.

Siano δN_e e δN_i le variazioni delle densità degli elettroni e degli ioni nel plasma perturbato. Queste variazioni creano nel plasma la densità media di carica non compensata: $\delta \rho = e(\delta N_i - \delta N_e)$. Il potenziale del campo elettrico generato da queste cariche è definito dall'equazione di Poisson

$$\Delta \varphi = -4\pi e(\delta N_i - \delta N_e). \quad (37,2)$$

Come ordine di grandezza $\Delta\varphi \sim \varphi/L^2$. Perciò

$$\left| \frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e} \right| \sim \frac{1}{4\pi e L^2} \left| \frac{\varphi}{\delta N_e} \right|. \quad (37,3)$$

Se il campo è debole ($e\varphi \ll T_e$), la variazione della densità elettronica è

$$\delta N_e \sim e\varphi N_e / T_e$$

(si veda la (36,11)) e allora

$$\left| \frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e} \right| \sim \frac{a_e^2}{L^2} \ll 1. \quad (37,4)$$

Questa disuguaglianza resta valida anche nel caso di una perturbazione forte in cui $e\varphi \sim T_e$; in questo caso $\delta N_e \sim N_e$ e dalla (37,3) deriva nuovamente la (37,4).

Quindi, la densità non compensata di cariche creata dalla perturbazione risulta essere piccola rispetto alle densità perturbate delle cariche elettroniche e ioniche separatamente; in questi casi il plasma si dice *quasi-neutro*. Questa proprietà consente di definire, nello studio della cerchia dei fenomeni considerati, la distribuzione del potenziale nel plasma partendo semplicemente dall'« equazione di quasi-neutralità »

$$N_e = zN_i \quad (37,5)$$

assieme all'equazione cinetica per gli ioni e all'equazione che esprime la distribuzione « adiabatica » degli elettroni ¹⁾.

È ovvio che all'istante iniziale, se si studia un problema con condizioni iniziali, le densità elettroniche possono essere assegnate in modo arbitrario e non soddisfano necessariamente la disuguaglianza (37,4). In questo caso si crea un grande campo elettrico, il quale, tuttavia, implicherà un moto di elettroni che ristabilirà presto, durante i tempi « elettronici » caratteristici, la quasi-neutralità (nel caso di diffusione questo processo è stato studiato al § 25).

Il passaggio dall'equazione elettrodinamica (37,2) alla condizione (37,5) significa non soltanto una semplificazione notevole del sistema di equazioni dinamiche del plasma, ma anche una variazione teorica della loro struttura dimensionale. Infatti, il potenziale φ figura nell'equazione cinetica e nella distribuzione elettronica soltanto sotto forma di prodotto per la carica e e nella condizione (37,5) (contraria-

¹⁾ Sottolineiamo che questo risultato di per sé si riferisce sia a un plasma senza urti che a uno con urti. Osserviamo anche che, poiché la deduzione della disuguaglianza (37,4) non è legata all'ipotesi della debolezza del campo, la proprietà di quasi-neutralità è valida anche nei casi in cui le proprietà elettromagnetiche del plasma non si possono descrivere mediante la costante dielettrica (cioè supponendo un legame lineare tra D e E).

mente all'equazione (37,2)) la carica non figura affatto. Pertanto con la sostituzione

$$e\varphi \rightarrow \psi \quad (37,6)$$

la carica e si elimina in generale dalle equazioni e con essa scompare anche il parametro dimensionale di lunghezza, cioè il raggio di Debye a_e .

L'assenza del parametro di lunghezza nelle equazioni rende possibile moti autocompatibili del plasma. Queste soluzioni compaiono nei casi in cui i parametri dimensionali di lunghezza siano assenti nelle condizioni iniziali o al contorno del problema; allora tutte le funzioni possono dipendere dalle coordinate e dal tempo soltanto nella combinazione r/t . Supponiamo, ad esempio, che dapprima il plasma occupi il semispazio $x < 0$. All'istante $t = 0$ « si toglie il tramezzo » e il plasma si espande nel vuoto. I primi a muoversi sono gli elettroni, in modo che la densità elettronica forma in prossimità della frontiera uno strato transitorio di larghezza caratteristica $\sim a_e$. In un tempo $t_1 \gg a_e/v_{Te}$ il moto elettronico si smorza e, in seguito, la densità elettronica segue adiabaticamente il potenziale secondo la formula di Boltzmann. Ora la variazione di tutte le grandezze è determinata dal moto degli ioni. Perciò in un tempo $t_2 \gg \gg a_e/v_{Ti} \gg a_e/v_{Te}$ la frontiera si smussa a distanze superiori ad a_e . A questo punto il plasma diventa quasi-neutro e il moto automodelato.

Scriviamo l'equazione dinamica per il plasma quasi-neutro nella forma sviluppata supponendo, per fissare le idee, che la distribuzione della densità elettronica sia ovunque la distribuzione di Boltzmann:

$$N_e = N_0 e^{\psi/T_e}; \quad (37,7)$$

come è stato mostrato al § 36, questa distribuzione non viene violata da un campo variabile lentamente se il campo non contiene buche di potenziale. La formula (37,7) insieme con la condizione (37,5) permette di esprimere direttamente il potenziale mediante la funzione di distribuzione degli ioni:

$$\psi = T_e \ln \frac{z N_i}{N_0} = T_e \ln \left[\frac{z}{N_0} \int f_i d^3 p \right]. \quad (37,8)$$

Se, invece, poniamo questa espressione nell'equazione cinetica per gli ioni (con il campo autocompatibile $E = -\nabla\varphi$), otteniamo

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} - z T_e \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \int f_i d^3 p = 0. \quad (37,9)$$

E da notare che, malgrado la non linearità di questa equazione, le sue soluzioni non dipendono dalla densità media del plasma: se $f_i(t, \mathbf{r})$ è una soluzione, allora $C f_i$ sarà anch'essa una soluzione con il fattore costante arbitrario C .

Ricordiamo che nel caso unidimensionale l'equazione (37,9) ha una classe di soluzioni caratterizzate dal fatto che la funzione $f_i(t, x, p)$ in esse dipende dalla coordinata x e dal tempo t soltanto attraverso una certa funzione $\chi(t, x)$, cioè

$$f_i = f_i[\chi(t, x), p]. \quad (37,10)$$

Queste soluzioni in un certo senso sono analoghe alle onde semplici dell'idrodinamica ordinaria ¹⁾.

§ 38. Idrodinamica di un plasma a doppia temperatura

Un plasma a doppia temperatura, in cui

$$T_e \gg T_i, \quad (38,1)$$

consente una descrizione teorica estremamente semplice. Abbiamo visto già al § 33 che in questo caso nel plasma si possono propagare onde ionico-acustiche con velocità $\sim (T_e/M)^{1/2}$. La stessa velocità è caratteristica, in generale, per la propagazione di perturbazioni nel plasma. Poiché al tempo stesso questa velocità è grande (in virtù della (38,1)) rispetto alle velocità termiche degli ioni, nella maggioranza dei problemi del moto del plasma si può trascurare in generale la dispersione termica delle velocità degli ioni. Allora il moto della componente ionica del plasma sarà descritto nell'« approssimazione idrodinamica » dalla velocità $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i$ assegnata come funzione di punto nello spazio (e del tempo) e soddisfacente l'equazione

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e z \mathbf{E},$$

ossia

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e z}{M} \mathbf{E}. \quad (38,2)$$

A questa equazione vanno aggiunte l'equazione di continuità

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \text{div}(N_i \mathbf{v}) = 0 \quad (38,3)$$

e l'equazione di Poisson che definisce il potenziale φ del campo elettrico (e con esso anche l'intensità $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\Delta\varphi = -4\pi e (z N_i - N_e). \quad (38,4)$$

Per quanto riguarda gli elettroni, la loro distribuzione segue adiabaticamente la distribuzione del campo quando il plasma compie moti con velocità $v \ll (T_e/M)^{1/2} \ll v_{Te}$. Come abbiamo visto al § 36, in questo caso l'espressione concreta per la densità elettronica N_e

¹⁾ Si veda A.V. Gurevič, L.P. Pitaeuskij, ZETF, 1969, v. 56, pag. 1778.

dipende notevolmente dal carattere del campo. Per un campo senza buche di potenziale questa densità è data semplicemente dalla formula di Boltzmann (37,7) in modo che l'equazione (38,4) assume la forma

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 \left(\frac{zN_i}{N_0} - e^{e\varphi/T_e} \right). \quad (38,5)$$

Le equazioni (38,2-3) e (38,5) costituiscono un sistema completo di equazioni per le funzioni v , N e φ . Questo sistema può essere semplificato ancora per un plasma quasi-neutro. In questo caso secondo la (37,8) abbiamo

$$e\varphi = T_e \ln \frac{zN_i}{N_0}, \quad eE = -T_e \frac{\nabla N_i}{N_i} \quad (38,6)$$

e la (38,2) si può riscrivere nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{zT_e}{M} \frac{\nabla N_i}{N_i}. \quad (38,7)$$

Il sistema di equazioni (38,3) e (38,7) è identico formalmente alle equazioni idrodinamiche per un gas isotermico perfetto con massa delle particelle M e temperatura zT_e . La velocità del suono in questo gas vale $(zT_e/M)^{1/2}$ in accordo con la formula (33,5), che esprime la velocità delle onde ionico-acustiche; in questa approssimazione la dispersione delle onde non esiste.

L'analogia così stabilita con l'idrodinamica necessita di una precisazione sostanziale. Come è noto, un sistema di equazioni idrodinamiche è ben lungi dall'avere sempre soluzioni continue in tutto lo spazio. L'assenza di una soluzione continua nell'idrodinamica ordinaria significa il formarsi di onde d'urto, cioè di superfici sulle quali le grandezze fisiche sono soggette a discontinuità. Nell'idrodinamica senza urti non esistono onde d'urto, poiché queste ultime, per loro natura, sono dovute alla dissipazione di energia che in questo caso non esiste. L'assenza di soluzioni continue significa qui che in una regione dello spazio è violata l'ipotesi della quasi-neutralità del plasma. In queste regioni (che si chiamano convenzionalmente *onde collidenti senza urto*) la dipendenza delle grandezze fisiche dalle coordinate e dal tempo risulta essere oscillante e, inoltre, la lunghezza d'onda di queste oscillazioni è determinata non soltanto dalle dimensioni caratteristiche del problema, ma anche dalle proprietà intrinseche del plasma, ossia dal suo raggio di Debye¹).

Torniamo alle equazioni più generali (38,2-4), in cui non è supposta la quasi-neutralità del plasma. La proprietà più importante di queste equazioni è l'esistenza in esse di soluzioni unidimensionali, nelle quali tutte le grandezze dipendono dalle variabili t e x soltanto

¹) Si veda R.Z. Sagdeev, Raccolta «Voprosy teorii plazmy» (Questioni della teoria del plasma), 1964, op. 4, pag. 20.

nella combinazione $\xi = x - ut$, con u costante. Queste soluzioni descrivono onde che si propagano con la velocità u , senza modificare il proprio profilo. Se passiamo a un sistema di riferimento che si muove con velocità u relativamente al sistema iniziale, allora il moto del plasma in esso sarà stazionario. Fra le soluzioni di questo tipo presentano interesse maggiore quelle periodiche nello spazio e le soluzioni decrescenti da ambo le parti all'infinito. Consideriamo qui queste ultime, che si chiamano *onde solitarie* o *solitoni*¹⁾ (A. A. Vedenov, E. P. Velichov, R. Z. Sagdeev, 1961).

Indicando con l'apice la derivazione rispetto a ξ , dalle (38,2-3) ricaviamo

$$(v - u)v' = -\frac{e}{M}\varphi', \quad (N_i v)' - uN_i' = 0$$

(per semplicità poniamo $z = 1$).

Integrando queste equazioni con le condizioni al contorno $\varphi = 0$, $v = 0$, $N_i = N_0$ per $\xi \rightarrow \infty$, troviamo

$$\frac{e}{M}\varphi = \frac{u^2}{2} - \frac{(u-v)^2}{2}, \quad (38,8)$$

$$N_i = N_0 \frac{u}{u-v} = N_0 \frac{u}{[u^2 - 2e\varphi/M]^{1/2}}. \quad (38,9)$$

Quanto all'equazione (38,4), essa dà $\varphi'' = -4\pi e(N_i - N_e)$, oppure dopo la moltiplicazione per $2\varphi'$ e l'integrazione

$$\varphi'^2 = -8\pi e \int_0^\varphi [N_i(\varphi) - N_e(\varphi)] d\varphi. \quad (38,10)$$

Inoltre la funzione $N_i(\varphi)$ è definita dalla (38,9) e $N_e(\varphi)$ dalle formule del § 36. E da notare che nell'onda considerata si ha sempre $\varphi > 0$, come ciò risulta dalla (38,8). L'energia potenziale dell'elettrone in questo campo è $U = -e\varphi < 0$, cioè nei confronti degli elettroni il campo ha il carattere di una buca di potenziale.

L'equazione (38,10) riduce a delle quadrature il problema della definizione del profilo dell'onda $\varphi(\xi)$. In questo caso la velocità u è direttamente legata all'ampiezza dell'onda, cioè al valore massimo della funzione $\varphi(\xi)$ (indichiamo questo valore con φ_m). Infatti, per $\varphi = \varphi_m$ deve essere $\varphi' = 0$. Uguagliando a zero l'integrale a secondo membro della (38,10) (e integrando in esso il primo termine), otteniamo l'equazione

$$\frac{Mu^2}{e} \left[1 - \left(1 - \frac{2e}{Mu^2} \varphi_m \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{N_0} \int_0^{\varphi_m} N_e(\varphi) d\varphi, \quad (38,11)$$

¹⁾ Dall'inglese *solitary*.

che definisce in linea di principio la dipendenza di u da φ_m . Inoltre, è evidente che deve essere

$$2e\varphi_m/Mu^2 < 1. \quad (38,12)$$

Questa condizione in generale stabilisce la frontiera superiore di tutti i valori possibili dell'ampiezza dell'onda φ_m (e della velocità u).

E da notare ancora che per trascurare completamente gli urti è necessario che la frequenza del campo ω sia grande rispetto alle frequenze caratteristiche degli urti reciproci sia fra elettroni ν_e che fra ioni ν_i . Ma poiché $\nu_e \sim (M/m)^{1/2} \nu_i \gg \nu_i$ (si veda il § 43), è possibile una situazione in cui $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$. In questo caso gli urti, come prima, non incidono sul moto ionico, ma la distribuzione elettronica si può supporre come di Boltzmann anche in presenza di buche di potenziale.

P R O B L E M A

Determinare il profilo e la velocità di un solitone di piccola intensità ($e\varphi_m/T_e \ll 1$) in un plasma con elettroni distribuiti secondo la formula (36,11) (A. V. Gurevič, 1967).

Soluzione. Nella (36,11) devono essere conservati tutti i termini; la comparsa del solitone è legata all'ultimo termine non lineare in questa espressione. Il calcolo mediante la formula (38,11) dà

$$u^2 = \frac{T_e}{M} \left[1 + \frac{16}{15} \left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e} \right)^{1/2} \right].$$

Il profilo dell'onda si ottiene integrando l'equazione (38,10) e ha la forma

$$\varphi = \varphi_m \operatorname{ch}^{-4} \left[\frac{x}{\sqrt{15} a_e} \left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e} \right)^{1/4} \right].$$

§ 39. Solitoni in un mezzo debolmente dispersivo

L'esistenza (in un mezzo non dissipativo) di onde non lineari con profilo stazionario è strettamente legata alla dispersione. In un mezzo non dispersivo l'inclusione della non linearità viola inevitabilmente la stazionarietà dell'onda; la velocità di propagazione dei diversi punti del profilo dipende dal valore dell'ampiezza in questi punti, il che implica alterazione del profilo. Così, nell'idrodinamica di un liquido comprimibile perfetto gli effetti non lineari implicano un aumento graduale della curvatura del fronte d'onda anteriore (si veda VI, § 94). Quanto alla dispersione, essa, da parte sua, conduce a uno smussamento graduale del profilo, e le due influenze si possono compensare mutuamente implicando la stazionarietà del profilo d'onda.

In questo paragrafo studieremo questi fenomeni in forma generale, per una categoria sufficientemente larga di casi di propagazione di

onde in un mezzo debolmente dispersivo non dissipativo, tenendo conto anche di una non linearità debole.

Sia u_0 la velocità di propagazione dell'onda nell'approssimazione lineare trascurando la dispersione. In questa approssimazione, in un'onda unidimensionale che si propaga in una direzione lungo l'asse x , tutte le grandezze dipendono da x e t soltanto nella combinazione $\xi = x - u_0 t$. In forma differenziale questa proprietà si esprime mediante l'equazione

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

dove b esprime una delle grandezze oscillanti nell'onda.

Alla velocità costante u_0 corrisponde la legge di dispersione delle onde $\omega = u_0 k$. In un mezzo dispersivo questa legge non è altro che il primo termine dello sviluppo della funzione $\omega(k)$ in potenze di k piccolo. Con l'inclusione del termine successivo abbiamo ¹⁾

$$\omega = u_0 k - \beta k^3, \quad (39,1)$$

dove β è una costante che, in teoria, può essere sia positiva che negativa.

L'equazione differenziale che descrive nell'approssimazione lineare la propagazione dell'onda (in una direzione) nel mezzo con questa dispersione ha la forma

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} = 0;$$

infatti, per un'onda in cui $b \propto \exp(-i\omega t + ikx)$ si ottiene da qui la (39,1).

Infine, l'inclusione della non linearità conduce alla comparsa nell'equazione di termini in b di ordine superiore. Questi termini devono soddisfare comunque la condizione di annullamento per b costante (indipendente da x), ciò che corrisponde semplicemente a un mezzo omogeneo. Limitandoci al termine con la derivata di ordine inferiore (k piccoli!) scriviamo l'equazione di propagazione di un'onda non lineare debolmente nella forma

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} + \alpha b \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad (39,2)$$

¹⁾ Il fatto che la funzione $\omega(k)$ è sviluppabile in potenze dispari di k deriva già da considerazioni sulla realtà. Il sistema iniziale di equazioni fisiche del moto del mezzo contiene soltanto grandezze e parametri reali. L'unità immaginaria i compare soltanto per sostituzione in queste equazioni di una soluzione proporzionale a $\exp(-i\omega t + ikx)$. Perciò la legge della dispersione, che compare in seguito a questa sostituzione, definisce $i\omega$ sotto forma di funzione di ik a coefficienti reali; lo sviluppo di questa funzione può contenere solo le potenze dispari di ik . Nel caso generale di mezzo dispersivo la funzione $\omega(k)$ è complessa ($\omega = \omega' + i\omega''$), e allora l'affermazione si riferisce allo sviluppo della parte reale della frequenza, $\omega'(k)$. Lo sviluppo della funzione $\omega''(k)$, invece, per le stesse ragioni non conterrà altro che potenze pari di k .

dove α è un parametro costante (che, in via di principio, può essere anch'esso sia positivo che negativo)¹⁾.

Per semplificare la scrittura di questa equazione, introduciamo al posto di x una nuova variabile ξ e, al posto di b , una nuova funzione incognita a , definite come segue:

$$\xi = x - u_0 t, \quad a = \alpha b. \quad (39,3)$$

Allora otteniamo

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3} = 0. \quad (39,4)$$

Questa forma si chiama equazione di *Korteweg-de Vries*²⁾. Per fissare le idee, supporremo dapprima che la costante β sia positiva.

Cercheremo soluzioni che descrivono onde con profilo stazionario. In queste soluzioni la funzione $a(t, \xi)$ dipende unicamente dalla differenza $\xi - v_0 t$ con v_0 costante

$$a = a(\xi - v_0 t); \quad (39,5)$$

in questo caso la velocità di propagazione dell'onda è

$$u = u_0 + v_0. \quad (39,6)$$

Sostituendo la (39,5) nella (39,4) e indicando con un apice la derivazione rispetto a ξ , otteniamo l'equazione

$$\beta a''' + aa' - v_0 a' = 0. \quad (39,7)$$

Notiamo che essa è invariante rispetto alla sostituzione

$$a \rightarrow a + V, \quad v_0 \rightarrow v_0 + V \quad (39,8)$$

con qualsiasi costante V .

Il primo integrale dell'equazione (39,7) vale

$$\beta a'' + \frac{1}{2} a^2 - v_0 a = \frac{c_1}{2}.$$

Moltiplicando questa uguaglianza per $2a'$ e integrando ancora una volta otteniamo

$$\beta a'^2 = -\frac{a^3}{3} + v_0 a^2 + c_1 a + c_2. \quad (39,9)$$

Al posto delle tre costanti v_0 , c_1 e c_2 è opportuno introdurre altre costanti, ossia le tre radici del trinomio cubico a secondo membro

¹⁾ Sottolineiamo, tuttavia, a scanso di equivoci, che questa forma di non linearità debole non è affatto universale. Così, la non linearità debole per la propagazione delle onde nel plasma, proveniente dall'ultimo termine nella distribuzione elettronica (36,11) (usata nel problema del § 38) corrisponderebbe al termine $\sim \sqrt{b} \partial b / \partial x$ in un'equazione del tipo (39,2).

²⁾ Questa equazione è stata dedotta da *D.J. Korteweg* e *G. de Vries* (1895) per le onde su una superficie d'acqua poco profonda.

della (39,9). Indicando queste radici con a_1, a_2, a_3 , scriviamo

$$\beta a'^2 = -\frac{1}{3} (a - a_1) (a - a_2) (a - a_3). \quad (39,10)$$

La costante v_0 è legata alle nuove costanti mediante l'uguaglianza

$$v_0 = \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3). \quad (39,11)$$

Cercheremo soluzioni dell'equazione (39,10) tali che la grandezza $|a(\xi)|$ sia limitata; l'aumento indefinito di $|a|$ contraddirebbe l'ipotesi della non linearità debole. È facile vedere che questa condizione non è soddisfatta se tra le radici a_1, a_2, a_3 ve ne sono di complesse; supponiamo che a_1 e a_2 siano complesse (e che $a_2 = a_1^*$). Infatti, in questo caso il secondo membro dell'equazione (39,10) assume la forma $|a - a_1|^2 (a_3 - a)/3$ e a tende senza alcun ostacolo a $-\infty$.

Quindi, le costanti a_1, a_2, a_3 devono essere reali; disponiamole nell'ordine $a_1 > a_2 > a_3$. Poiché l'espressione a secondo membro dell'equazione (39,10) deve essere positiva, la funzione $a(\xi)$ può variare solo nell'intervallo $a_1 \geq a \geq a_2$. Senza perdere di generalità, si può porre $a_3 = 0$; ciò si può sempre ottenere con una trasformazione del tipo (39,8). Dopo questa convenzione riscriviamo l'equazione (39,10) come segue:

$$\beta a'^2 = \frac{1}{3} (a_1 - a) (a - a_2) a. \quad (39,12)$$

La soluzione di questa equazione è di carattere diverso per $a_2 = 0$ e per $a_2 \neq 0$. Nel primo caso ($a_2 = 0, a_1 > 0$) l'integrazione dell'equazione dà

$$a(\xi) = a_1 \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{a_1}{3\beta}} \right); \quad (39,13)$$

l'origine della variabile ξ coincide con il punto di massimo della funzione (qui e più avanti, per semplificare le notazioni, scriviamo il profilo d'onda come funzione di $\xi = x$ a un dato istante $t = 0$). Questa soluzione descrive l'onda solitaria (solitone); per $\xi \rightarrow \pm\infty$ la funzione $a(\xi)$ si annulla con le sue derivate. La costante a_1 dà l'ampiezza del solitone e la sua larghezza decresce all'aumentare dell'ampiezza come $a_1^{-1/2}$. Secondo la (39,11) abbiamo $v_0 = a_1/3$ in modo che la velocità del solitone è

$$u = u_0 + a_1/3. \quad (39,14)$$

Questa velocità $u > u_0$ e cresce all'aumentare dell'ampiezza.

Ricordiamo di nuovo che la non linearità dei processi descritti dall'equazione di Korteweg-de Vries è supposta debole. La condizione di questa debolezza ha un significato naturale; così, se la variazione della densità del mezzo svolge il ruolo della grandezza a , questa

variazione deve essere piccola rispetto alla densità imperturbata. Al tempo stesso il « grado di non linearità » di questi processi è caratterizzato ancora da un altro parametro adimensionale, $L (a_1/\beta)^{1/2}$, dove L è la lunghezza caratteristica, a_1 l'ampiezza della perturbazione. Questo parametro determina il ruolo relativo degli effetti non lineari e dispersivi e può essere sia piccolo (prevalenza dell'effetto di dispersione) che grande (prevalenza dell'effetto di non linearità). Per un solitone di larghezza $L \sim (\beta/a_1)^{1/2}$ questo parametro è dell'ordine 1.

Passiamo al caso $a_2 \neq 0$; allora la soluzione dell'equazione (39,12) descrive un'onda infinitamente estesa e periodica nello spazio. L'integrazione dell'equazione dà

$$\xi = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{3\beta} da}{[a(a_1-a)(a-a_2)]^{1/2}} = \left(\frac{12\beta}{a_1} \right)^{1/2} F(s, \varphi), \quad (39,15)$$

dove $F(s, \varphi)$ è l'integrale ellittico di prima specie:

$$F(s, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-s^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}, \quad (39,16)$$

dove ¹⁾

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{a_1-a}{a_1-a_2}}, \quad s = \sqrt{1-\frac{a_2}{a_1}}; \quad (39,17)$$

l'origine della variabile ξ coincide con uno dei massimi della funzione $a(\xi)$.

Invertendo la formula (39,15) mediante l'introduzione della funzione ellittica di Jacobi, otteniamo

$$a = a_1 \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a_1}{12\beta}} \xi, s \right). \quad (39,18)$$

Questa funzione è periodica e il suo periodo (lunghezza d'onda) rispetto alla coordinata x vale

$$\lambda = 4 \sqrt{\frac{3\beta}{a_1}} F\left(\frac{\pi}{2}, s\right) = 4 \sqrt{\frac{3\beta}{a_1}} K(s), \quad (39,19)$$

dove $K(s)$ è un integrale ellittico completo di prima specie. Il valore medio su un periodo della funzione (39,18) è

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda a(\xi) d\xi = a_1 \frac{E(s)}{K(s)}, \quad (39,20)$$

¹⁾ Il parametro dell'integrale ellittico è denotato con la lettera s (al posto della notazione abituale k) per evitare la confusione con il vettore d'onda.

dove $E(s)$ è un integrale ellittico completo di seconda specie. È naturale considerare un'onda periodica, in cui il valore medio della grandezza oscillante è nullo. È possibile sempre ottenere ciò mediante la trasformazione (39,8), sottraendo la grandezza (39,20) dalla funzione (39,18). Allora la velocità di propagazione dell'onda è

$$u = u_0 + \left[\frac{a_1 + a_2}{3} - a_1 \frac{E(s)}{K(s)} \right]. \quad (39,21)$$

A piccole ampiezze delle oscillazioni $a_1 - a_2$ corrispondono valori del parametro $s \ll 1$. Ricorrendo all'espressione approssimata

$$\operatorname{dn}(z, s) \approx 1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} \cos 2z, \quad s \ll 1,$$

troviamo che la soluzione (39,18) si trasforma in questo caso, come ci si doveva aspettare, nell'onda armonica

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos kx, \quad k = \sqrt{\frac{a_1}{3\beta}}.$$

Inoltre, la velocità (39,21) diventa $u = u_0 - a_1/3 = u_0 - \beta k^2$ in accordo con la (39,1).

Al caso limite inverso di grandi ampiezze (nel modello di onde considerato) corrispondono valori $a_2 \rightarrow 0$, mentre il parametro $s \rightarrow 1$. Tenendo conto della formula limite

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s^2}, \quad s^2 \rightarrow 1,$$

troviamo che in questo limite la lunghezza d'onda aumenta secondo la legge logaritmica

$$\lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{a_1}} \ln \frac{16a_1}{a_2}. \quad (39,22)$$

In altre parole, i ventri successivi dell'onda si allontanano l'uno dall'altro a grandi distanze. Il profilo dell'onda in prossimità di ciascun ventre si ottiene dalla (39,18) mediante l'espressione limite della funzione $\operatorname{dn} z$ per $s = 1$, valida per z finiti: $\operatorname{dn} z = 1/\operatorname{ch} z$. Come risultato riotteniamo la formula (39,13). Quindi, nel limite $s \rightarrow 1$ un'onda periodica si divide in una successione di solitoni lontani.

Finora abbiamo supposto che $\beta > 0$. Il caso in cui la costante $\beta < 0$ non richiede un esame particolare, il cambiamento di segno di β nell'equazione (39,4), equivale alla sostituzione $\xi \rightarrow -\xi$, $a \rightarrow -a$. Poiché per questa sostituzione l'argomento $\xi - v_0 t$ nella (39,5) diventa $-\xi - v_0 t$, la velocità di propagazione dell'onda vale ora $u = u_0 - v_0$. Così, i risultati ottenuti sopra applicati al solitone cambiano nel senso che la funzione $a(\xi)$ diventa negativa e la sua velocità $u < u_0$.

L'equazione di Korteweg-de Vries gode di proprietà specifiche che consentono di stabilire per essa tutta una serie di teoremi generali. Essi sono basati sul legame formale che esiste tra l'equazione di Korteweg-de Vries e il problema degli autovalori di un'equazione del tipo dell'equazione di Schrödinger (*C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, 1967*).

Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left[\frac{1}{6\beta} a(t, \xi) + \varepsilon \right] \psi = 0 \quad (39,23)$$

e supponiamo di nuovo, per fissare le idee, che $\beta > 0$. L'equazione (39,23) ha la forma dell'equazione di Schrödinger in cui la funzione $-a(t, \xi)$ svolge il ruolo di energia potenziale dipendente da t come parametro. Sia la funzione $a(t, \xi)$ positiva in una regione ξ e tenda a zero per $\xi \rightarrow \pm\infty$. Allora l'equazione (39,23) avrà autovalori ε corrispondenti al « moto finito nella buca di potenziale $-a(t, \xi)$ »; siccome la funzione a dipende da t , questi autovalori, in generale, dipendono anch'essi da t .

Mostriamo che gli autovalori ε non dipendono da t se la funzione $a(t, \xi)$ verifica l'equazione di Korteweg-de Vries (39,4).

Esprimendo a dalla (39,23) nella forma

$$a = -6\beta \left(\frac{\psi''}{\psi} + \varepsilon \right)$$

e ponendo nella (39,4), otteniamo dopo un calcolo diretto

$$\psi^2 \frac{d\varepsilon}{dt} = (\psi' A - \psi A')', \quad (39,24)$$

dove

$$A(t, \xi) = 6\beta \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{3}{\psi} \psi' \psi'' + \psi''' - \frac{\varepsilon}{6} \psi' \right); \quad (39,25)$$

più importante è che il secondo membro della (39,24) sia espresso sotto forma di derivata rispetto a ξ dell'espressione che si annulla per $\xi \rightarrow \pm\infty$ (ricordiamo che le autofunzioni dello spettro discreto dell'equazione (39,23) scompaiono all'infinito). Perciò l'integrazione dell'uguaglianza (39,24) rispetto a tutte le ξ da $-\infty$ a $+\infty$ dà

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 d\xi = 0$$

e, essendo finito l'integrale di normalizzazione della funzione ψ che qui figura, ne segue che $d\varepsilon/dt = 0$.

Mostriamo ora che l'equazione (39,23) ha un solo autovalore discreto nel caso di « potenziale » stazionario $a(\xi)$ del tipo (39,13), corrispondente a un solo solitone. Con questo « potenziale » l'equa-

zione (39,23) ha la forma

$$\psi'' + \left(\frac{U_0}{ch^2 \alpha \xi} + \varepsilon \right) \psi = 0, \quad (39,26)$$

dove

$$U_0 = a_1/6\beta; \quad \alpha = (a_1/12\beta)^{1/2}. \quad (39,27)$$

Gli autovalori discreti dell'equazione (39,26) sono dati dalla formula

$$\varepsilon_n = -\alpha^2 (s-n)^2, \quad s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4U_0}{\alpha^2}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dove deve essere $n < s$ (si veda III, § 23, problema 4). Con i valori dei parametri presi dalla (39,27) $s = 1$, in modo che si ha il solo autovalore

$$\varepsilon = -a_1/12\beta. \quad (39,28)$$

Se, invece, il « potenziale » $a(t, \xi)$ rappresenta un insieme di solitoni separati da grandi distanze (in modo che non esiste « interazione » reciproca), lo spettro degli autovalori dell'equazione (39,23) sarà composto dai « livelli » (39,28) in ciascuna delle buche di potenziale e ognuno di essi sarà definito dall'ampiezza a_1 del solitone corrispondente.

Poiché la velocità di propagazione del solitone cresce all'aumentare della sua ampiezza, il solitone di ampiezza maggiore raggiungerà sempre, alla fine, quello di ampiezza minore. L'insieme arbitrario iniziale di solitoni distanti, in seguito agli « urti » reciproci, si trasformerà infine in un insieme di solitoni disposti in ordine crescente di ampiezza (ricordiamo che tutte le perturbazioni descritte dall'equazione di Korteweg-de Vries si propagano in una direzione). I risultati ottenuti sopra permettono di trarre immediatamente una conclusione interessante: gli insiemi di solitoni iniziale e finale sono uguali per numero totale e per ampiezze dei solitoni, differendo solo per l'ordine della disposizione. Ciò deriva direttamente dal fatto che ognuno dei solitoni isolati corrisponde a uno degli autovalori e questi ultimi sono indipendenti dal tempo.

In generale, ogni perturbazione positiva iniziale ($a > 0$), che occupa una regione dello spazio finita, nel corso della sua evoluzione, in accordo con l'equazione di Korteweg-de Vries, si scinde alla fine in un insieme di solitoni isolati, le cui ampiezze non dipendono più dal tempo. Queste ampiezze e il numero di solitoni si possono trovare, in teoria, definendo lo spettro degli autovalori discreti dell'equazione (39,23) con la distribuzione iniziale $a(0, \xi)$ come « potenziale ». Se, invece, la perturbazione iniziale contiene anche tratti con $a < 0$, allora nel corso della sua evoluzione compare anche un pacchetto d'onde che si smussa gradualmente senza scindersi in solitoni.

A scanso di equivoci bisogna, tuttavia, precisare che cosa si intende con perturbazione iniziale nell'equazione di Korteweg-

de Vries. Ogni perturbazione reale che compare a un certo istante in un mezzo, nel corso della sua evoluzione (descritta dall'equazione d'onda completa del secondo ordine rispetto al tempo), si scinde in generale in due perturbazioni che si propagano nelle due direzioni lungo l'asse x . Con perturbazione « iniziale » per l'equazione di Korteweg-de Vries si deve intendere una di queste perturbazioni dopo la scissione.

PROBLEMA

Determinare i coefficienti α e β nell'equazione (39,2) per le onde ionico-acustiche in un plasma con $T_i \ll T_e$.

Soluzione. Il coefficiente di dispersione β si ottiene dalla (33,4) in base allo sviluppo nella grandezza piccola ka_e

$$\beta = a_e^2 u_0,$$

dove $u_0 = (zT_e/M)^{1/2}$.

Per il coefficiente di non linearità α si può trascurare completamente la dispersione, considerando cioè il caso limite $k \rightarrow 0$. In questo limite comunque si può supporre il plasma quasi-neutro e descriverlo corrispondentemente mediante le equazioni idrodinamiche per un gas isotermico perfetto (38,3) e (38,7). Ponendo $N_i = N_0 + \delta N$, scriviamo queste equazioni con precisione fino ai termini del secondo ordine nelle grandezze piccole δN e v . Inoltre nei termini del secondo ordine si può porre $v = u_0 \delta N / N_0$, come si verifica nell'approssimazione lineare per un'onda che si propaga nella direzione positiva dell'asse x (u_0 è la velocità delle onde nell'approssimazione lineare). Allora le equazioni assumono la forma

$$\frac{\partial \delta N}{\partial t} + N_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (v \delta N) = - \frac{2u_0}{N_0} \delta N \frac{\partial \delta N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{N_0} \frac{\partial \delta N}{\partial x} = \frac{u_0^2}{N_0^2} \delta N \frac{\partial \delta N}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Derivando la prima equazione rispetto a t , la seconda rispetto a x ed escludendo $\partial^2 v / \partial t \partial x$, troviamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta N = - \frac{2u_0}{N_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta N \frac{\partial \delta N}{\partial x} \right).$$

Con la stessa approssimazione sostituiamo con $-u_0 \partial / \partial x$ la derivata $\partial / \partial t$ a secondo membro dell'equazione e nella differenza $\partial / \partial t - u_0 \partial / \partial x$ a primo membro. Infine, eliminando in ambedue i membri le derivate $\partial / \partial x$ e confrontando l'equazione così ottenuta con la (39,2), troviamo

$$\alpha = u_0 / N_0.$$

§ 40. Costante dielettrica di un plasma degenerare senza urti

Nel calcolare ai §§ 29 e 31 la costante dielettrica del plasma senza urti abbiamo trascurato completamente tutti gli effetti quantistici. I risultati così ottenuti sono limitati, soprattutto, rispetto alla temperatura dalla condizione di mancanza di degenerazione; per gli elettroni questa condizione significa che

$$T \gg \varepsilon_F \sim \hbar^2 N_e^{2/3} / m, \quad (40,1)$$

dove $\varepsilon_F = p_F^2/2m$, essendo p_F la quantità di moto limite della distribuzione di Fermi per $T=0$, legata alla densità del numero di elettroni dall'uguaglianza $p_F^3/3\pi^2\hbar^3 = N_e$.

Inoltre, la possibilità stessa di applicare a un plasma in un campo esterno l'equazione classica di Boltzmann è legata a certe condizioni imposte al vettore d'onda \mathbf{k} e alla frequenza del campo ω . Le distanze caratteristiche di variazione del campo ($\sim 1/k$) devono essere grandi rispetto alla lunghezza d'onda di de Broglie per gli elettroni (\hbar/\bar{p}), mentre l'indeterminazione della quantità di moto ($\sim \hbar k$), dovuta a questa disomogeneità, deve essere piccola rispetto alla larghezza ($\sim T/\bar{v}$) della regione di smussamento della distribuzione termica degli elettroni. Per un plasma non degenerare si ha $\bar{p} \sim \sim T/\bar{v} \sim (mT)^{1/2}$ in modo che queste due condizioni coincidono. Per un plasma degenerare $\bar{p} \sim p_F$, $v \sim v_F = p_F/m$, ma poiché $T \ll \varepsilon_F$, allora $T/\bar{v} \ll \bar{p}$. In tal modo, è sufficiente che in ambedue i casi si abbia

$$\hbar k v \ll T. \quad (40,2)$$

Infine, la frequenza deve soddisfare la condizione

$$\hbar \omega \ll \varepsilon_F, \quad (40,3)$$

vale a dire il quanto energetico del campo deve essere piccolo rispetto all'energia media dell'elettrone (questa condizione, fra l'altro, di solito è inessenziale).

Consideriamo ora le proprietà dielettriche del plasma rinunciando alle condizioni (40,1-3) per la sua componente elettronica; la componente ionica, invece, può restare non degenerare. Calcoleremo la parte elettronica della costante dielettrica. A questo fine supporremo, come prima, soddisfatta la condizione che garantisce la possibilità di trascurare l'interazione tra le particelle del plasma

$$e^2 N_e^{1/3} \ll \bar{\varepsilon}; \quad (40,4)$$

per $\bar{\varepsilon} \sim \varepsilon_F$ questa condizione assume la forma $N_e^{1/3} \gg me^2/\hbar^2$, ovvero $e^2/\hbar v_F \ll 1$ (si veda V, § 80; IX, § 85).

La rinuncia alla condizione (40,2) richiede sin dall'inizio che sia applicata un'equazione quantomeccanica per la matrice densità. Poiché l'interazione tra gli elettroni va trascurata, si può scrivere un'equazione chiusa per la matrice densità di una particella $\rho_{\sigma_1\sigma_2}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (σ_1, σ_2 sono gli indici di spin). Supporremo la distribuzione elettronica indipendente dallo spin; in altre parole, la dipendenza della matrice densità dagli indici di spin si esprime nella forma del fattore $\delta_{\sigma_1\sigma_2}$, che ometteremo. La matrice densità $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ indipendente dallo spin verifica l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\hat{H}_1 - \hat{H}_2^*) \rho, \quad (40,5)$$

dove \hat{H} è l'operatore di Hamilton dell'elettrone in un campo esterno e gli indici 1 e 2 denotano le variabili (\mathbf{r}_1 o \mathbf{r}_2) sulle quali agisce l'operatore (si veda III, § 14). Questa equazione sostituisce il teorema classico di Liouville ($df/dt = 0$) per la funzione di distribuzione classica di una particella.

Calcoleremo (come al § 29) la costante dielettrica longitudinale. Conformemente a ciò consideriamo un campo elettrico con il potenziale scalare $\varphi(t, \mathbf{r})$, in modo che l'operatore di Hamilton dell'elettrone è

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - e\varphi(t, \mathbf{r}). \quad (40,6)$$

Supponendo debole il campo, scriviamo

$$\rho = \rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (40,7)$$

dove ρ_0 è la matrice densità del gas nello stato stazionario imperturbato e omogeneo (ma non necessariamente in equilibrio); in virtù della sua omogeneità, ρ_0 dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. La matrice densità $\rho_0(\mathbf{R})$ è legata alla funzione di distribuzione (imperturbata) degli impulsi degli elettroni $n_0(\mathbf{p})$ dalla formula

$$n_0(\mathbf{p}) = \mathcal{N}_e \int \rho_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar} d^3x, \quad (40,8)$$

dove \mathcal{N}_e è il numero totale di elettroni (si veda IX, (7,20)). Qui $n(\mathbf{p})$ è definito come il numero di riempimento degli stati elettronici quantistici con determinati valori della quantità di moto e della proiezione dello spin. Il numero di stati riferiti a un elemento d^3p dello spazio dei vettori quantità di moto e avente due valori della proiezione dello spin è $2d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Perciò $n(\mathbf{p})$ è legata alla funzione di distribuzione $f(\mathbf{p})$ usata prima dalla relazione

$$f(\mathbf{p}) = \frac{2n(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40,9)$$

Ponendo la (40,7) nella (40,8) e omettendo gli infinitesimi del secondo ordine, otteniamo l'equazione lineare seguente, che esprime la piccola correzione alla matrice densità:

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = -e[\varphi(t, \mathbf{r}_1) - \varphi(t, \mathbf{r}_2)] \rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (40,10)$$

Supponiamo che ¹⁾

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (40,11)$$

¹⁾ L'operatore di Hamilton (40,6) deve essere hermitiano e perciò la funzione φ in esso (e, quindi, nell'equazione (40,10)) è reale. Dopo aver scritto l'equazione (40,10), e data la sua linearità, la si può risolvere separatamente per ciascuna delle componenti monocromatiche complesse del campo.

Allora la dipendenza della soluzione dell'equazione (40,10) dalla somma $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ (e dal tempo) si può separare ponendo

$$\delta\rho = \exp \left[i\mathbf{k} \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - i\omega t \right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (40,12)$$

Ponendo questa espressione nella (40,10) otteniamo l'equazione per $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R})$:

$$\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla + i\frac{\mathbf{k}}{2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - i\frac{\mathbf{k}}{2} \right)^2 \right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \\ = -e\varphi_{\omega\mathbf{k}}(e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}/2} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}/2}) \rho_0(\mathbf{R}).$$

Ora si può passare in questa equazione allo sviluppo di Fourier in \mathbf{R} . Moltiplicandone i due membri per $\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar)$ e integrando rispetto a d^3x otteniamo (tenendo conto della (40,8))

$$\left[\hbar\omega - \varepsilon \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) + \varepsilon \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) \right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \\ = -\frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\mathcal{N}_e} \left[n_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) - n_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) \right]$$

(dove $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$), ossia

$$g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\hbar\mathcal{N}_e} \frac{n_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - n_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (40,13)$$

Il valore della matrice densità per $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}$ definisce la densità del numero di particelle nel sistema: $N = 2\mathcal{N}_p(t, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ (si veda IX, (7,19)). Pertanto la variazione della densità elettronica sotto l'influsso del campo è

$$\delta N_e = 2\mathcal{N}_e \delta\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R} = 0),$$

ossia, esprimendo $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R} = 0)$ in funzione delle componenti di Fourier,

$$\delta N_e = 2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \int g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40,14)$$

La variazione corrispondente della densità delle cariche è $-e\delta N_e$.

La costante dielettrica si calcola ora come abbiamo fatto al § 29: partendo dal legame della densità di carica con il vettore polarizzazione dielettrica ($-e\delta N_e = -\text{div } \mathbf{P} = -i\mathbf{k}\mathbf{P}$) scriviamo

$$e\delta N_e = i \frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi} \mathbf{E}\mathbf{k} = k^2 \frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi} \varphi_{\omega\mathbf{k}}.$$

Troviamo così la seguente formula per la parte elettronica della costante dielettrica longitudinale del plasma con funzione di distribuzione degli elettroni $n(\mathbf{p})$ (nella quale omettiamo ora l'indice 0):

$$\varepsilon_l(\omega, k) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \int \frac{n'(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - n(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i0} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (40,15)$$

(Ju. L. Klimontovič, V. P. Silin, 1952); l'aggrimento del polo nell'integrale è determinato, come al solito, con la regola di Landau.

Nel caso quasi-classico se sono soddisfatte le condizioni (40,2-3), si possono sviluppare le funzioni $n(p \pm \hbar k/2)$ in potenze di k . Allora

$$n\left(p + \frac{\hbar k}{2}\right) - n\left(p - \frac{\hbar k}{2}\right) \approx \hbar k \frac{\partial n(p)}{\partial p}$$

e la formula (40,15) si trasforma (tenendo conto del legame (40,9)) nella vecchia formula (29,9). Sottolineiamo, tuttavia, che la distribuzione $n(p)$ in questa formula si può riferire a un plasma degenere.

Applichiamo la formula (40,15) a un plasma elettronico completamente degenere per $T = 0$ quando $n(p) = 1$ per $p < p_F$ e $n(p) = 0$ per $p > p_F$. Sostituendo in ambedue i membri della (40,15) la variabile d'integrazione $p \pm \hbar k/2 \rightarrow p$, otteniamo

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \int_{p < p_F} \left\{ \frac{1}{\omega_+ - kv + i0} - \frac{1}{\omega_- - kv + i0} \right\} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

dove $\omega_{\pm} = \omega \pm \hbar k^2/2m$. Un'integrazione elementare, anche se abbastanza pesante, dà

$$\varepsilon_l(\omega, k) - 1 = \frac{3\Omega_e^2}{2k^2v_F^3} \{1 - g(\omega_+) + g(\omega_-)\}, \quad (40,16)$$

$$g(\omega) = \frac{m(\omega^2 - k^2v_F^2)}{2\hbar k^3v_F} \ln \frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F},$$

inoltre, il logaritmo deve essere inteso come $\ln |u| - i\pi$ se il suo argomento $u < 0$; la « frequenza di plasma » Ω_e è definita, come prima, nel seguente modo: $\Omega_e = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$.

Nel limite quasi-classico per $\hbar k \ll p_F$, $\hbar \omega \ll \varepsilon_F$ ¹⁾ la formula (40,16) conduce alla seguente semplice espressione non contenente \hbar :

$$\begin{aligned} \varepsilon_l - 1 = & \frac{3\Omega_e^2}{k^2v_F^3} \left[1 - \frac{\omega}{2kv_F} \ln \frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F} \right] + \\ & + \begin{cases} 0 & \text{per } |\omega| > kv_F, \\ i3\pi\Omega_e^2\omega/2(kv_F)^3 & \text{per } |\omega| < kv_F. \end{cases} \end{aligned} \quad (40,17)$$

Un interesse particolare presenta il caso statico. Per $\omega = 0$ l'espressione (40,16), quale funzione di k , ha una singolarità nel punto in cui $\hbar k$ coincide con il diametro della sfera di Fermi:

$$\hbar k = 2p_F; \quad (40,18)$$

¹⁾ Per $T = 0$ queste condizioni sono sufficienti. Infatti, il valore limite di ε_l per $\hbar kv_F/\varepsilon_F \rightarrow 0$ e $T \rightarrow 0$ non dipende dall'ordine in cui si passa al limite. Perciò la relazione tra $\hbar kv_F$ e T è inessenziale.

in questo punto l'argomento di uno dei logaritmi si annulla. Nel suo intorno

$$\varepsilon_l(0, k) - 1 = \frac{e^2}{2\pi\hbar\varepsilon_F} \left[1 - \xi \ln \frac{1}{|\xi|} \right], \quad (40,19)$$

$$\xi = (\hbar k - 2p_F)/2p_F, \quad |\xi| \ll 1.$$

Mostriamo che l'esistenza di questa singolarità (detta singolarità di Kohn) conduce a una variazione del carattere della schermatura del campo delle cariche nel plasma, che diventa non esponenziale ¹⁾.

Scriviamo l'espressione (40,19) nella forma

$$\varepsilon_l(0, k) = \beta - \alpha \xi \ln \frac{1}{|\xi|}, \quad (40,20)$$

dove $\alpha = e^2/2\pi\hbar v_F$ e la costante β può contenere anche un contributo senza singolarità, proveniente dalla componente ionica non degenera del plasma.

La componente di Fourier del campo, creato da una piccola carica puntiforme e_1 a riposo nel plasma, si esprime in funzione della costante dielettrica mediante la formula

$$\varphi_k = \frac{4\pi e_1}{k^2 \varepsilon_l(0, k)} \quad (40,21)$$

(si veda il problema 1 del § 34). Per il potenziale $\varphi(r)$, quale funzione della distanza dalla carica e_1 , abbiamo

$$\varphi(r) = \int \varphi_k e^{ikr} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2 r} \operatorname{Im} \int_0^\infty \varphi_k e^{ikr} k dk. \quad (40,22)$$

Per $k \rightarrow 0$ la funzione $\varphi(k)$ tende a un limite costante e non ha singolarità. Perciò il comportamento asintotico dell'integrale nella (40,22) per $r \rightarrow \infty$ è determinato dalla singolarità di questa funzione per $\hbar k = 2p_F$. Nel suo intorno

$$\varphi_k = \frac{e_1 \pi \hbar^2}{\beta p_F^2} \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} \xi \ln \frac{1}{|\xi|} \right].$$

Il contributo di questa regione al valore asintotico dell'integrale è

$$\varphi(r) \approx \frac{2e_1 \alpha}{\pi \beta^2 r} \operatorname{Im} (e^{2ip_F r/\hbar} J), \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \ln \frac{1}{|\xi|} e^{2ip_F r \xi/\hbar} d\xi;$$

per la rapida convergenza (si veda più avanti) l'integrale rispetto a ξ si può estendere da $-\infty$ a $+\infty$.

Per calcolare l'integrale J dividiamolo in due parti: da $-\infty$ a 0 e da 0 a ∞ e in ciascuna di esse ruotiamo il cammino d'integrazione nel piano della variabile complessa ξ , in modo che esso coincida con il semiasse immaginario superiore. Ponendo in seguito $\xi = iy$,

¹⁾ Le conseguenze fisiche della singolarità che compare con la condizione (40,18) sono state indicate da W. Kohn (1959).

otteniamo

$$J = \int_0^{\infty} e^{-2p_F r y / \hbar} \left[\ln \frac{1}{-iy} - \ln \frac{1}{iy} \right] y dy.$$

La differenza tra parentesi quadre si riduce a $i\pi$ in modo che $J = i\pi (\hbar/2p_F)^2$. Infine troviamo

$$\varphi(r) \approx \frac{e_1 \alpha \hbar^2}{2\beta^2 p_F^2} \frac{\cos(2p_F r / \hbar)}{r^3}. \quad (40,23)$$

Quindi, il potenziale del campo schermato lontano dalla carica oscilla con ampiezza decrescente come una potenza. Questo risultato, ottenuto per un plasma degenerare per $T = 0$, resta valido per temperature piccole, ma finite a distanze $r \ll \hbar v_F / T$.

P R O B L E M A

Determinare lo spettro delle oscillazioni elettroniche di un plasma degenerare per $T = 0$ nella regione quasi-classica dei valori di k .

Soluzione. La dipendenza $\omega(k)$ è data dall'equazione $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$ con ε_l definito dalla (40,17). Per k piccoli ($kv_F \ll \Omega_e$) si ha $kv_F/\omega \ll 1$; sviluppando

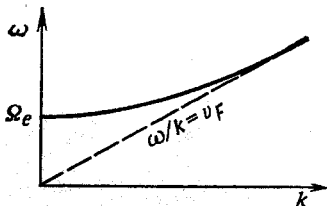


Fig. 12

infatti $\varepsilon_l(\omega, k)$ in potenze di questo rapporto, otteniamo

$$\omega = \Omega_e \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{kv_F}{\Omega_e} \right)^2 \right] \quad (1)$$

(A. A. Vlasov, 1938)¹⁾. Questa parte dello spettro corrisponde alle oscillazioni del plasma ordinarie (si veda la (32,5)).

Per k grandi ($kv_F \gg \Omega_e$), ma come prima $\hbar k \ll p_F$ si ha $\omega \approx kv_F$. Risolvendo l'equazione $\varepsilon_l = 0$ con il metodo delle approssimazioni successive otteniamo

$$\omega = kv_F \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{2k^2 v_F^2}{3\Omega_e^2} - 2 \right) \right] \quad (2)$$

(I. I. Goldman, 1947). Questa parte dello spettro è analoga al suono nullo nel gas di Fermi privo di carica (si veda IX, (4,16)).

L'andamento dello spettro è rappresentato schematicamente nella fig. 12. Notiamo che ovunque $\omega/k > v_F$, e poiché per $T = 0$ non esistono particelle con velocità $v > v_F$, lo smorzamento di Landau è rigorosamente nullo.

¹⁾ Notiamo che la condizione di quasi-classicità della frequenza Ω_e in un plasma degenerare ($\hbar\Omega_e \ll \varepsilon_F$) coincide con la condizione (40,4) di plasma perfetto.

URTI IN UN PLASMA

§ 41. Integrale degli urti di Landau

Lo studio delle proprietà del plasma, che tenga conto degli urti tra le particelle, inizia dalla deduzione dell'equazione cinetica per la funzione di distribuzione degli elettroni e degli ioni.

La specificità di questo caso è legata alla lentezza con cui decadono le forze di interazione coulombiana tra le particelle cariche. Con l'applicazione letterale dell'integrale degli urti di Boltzmann questa circostanza conduce alla comparsa di divergenze negli integrali a grandi distanze tra le particelle collidenti. Ciò significa che sono essenziali gli urti lontani. Ma a grandi distanze le particelle non deviano che con una piccola variazione delle quantità di moto. Questa circostanza consente di dare all'integrale degli urti una forma identica a quella che esso ha nell'equazione di Fokker-Planck. A differenza di quest'ultimo, tuttavia, l'integrale non è più lineare rispetto alle funzioni di distribuzione cercate. Ma la piccolezza relativa delle variazioni della quantità di moto in seguito agli urti significa che il processo descritto dall'integrale degli urti si può considerare come diffusione nello spazio dei vettori quantità di moto. Ne segue che l'integrale si può rappresentare nella forma

$$St f = -\operatorname{div}_p s \equiv -\frac{\partial s_\alpha}{\partial p_\alpha},$$

dove s è la densità del flusso di particelle nello spazio dei vettori quantità di moto; il problema consiste nell'esprimere questo flusso mediante la funzione di distribuzione.

Scriviamo nella forma

$$wf(p) f'(p') d^3q d^3p'$$

il numero d'urti (in un secondo) cui è soggetta una particella di quantità di moto p con particelle di quantità di moto p' nell'intervallo d^3p' , dove p e p' si trasformano rispettivamente in $p + q$ e $p' - q$; qui si tiene già conto della conservazione della quantità di moto in seguito a urti. Per brevità, non scriviamo gli argomenti t, r nelle funzioni di distribuzione. Le particelle p e p' possono appartenere a una medesima o a diverse specie di particelle nel plasma (elettroni, ioni). Supporremo la funzione w espressa mediante le semisomme delle quantità di moto di ciascuna particella prima

e dopo urti e mediante la quantità di moto trasmessa q :

$$w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; q\right);$$

è ovvio che questa funzione dipende dalle specie di particelle collidenti. In virtù del principio dell'equilibrio dettagliato (2,8) la funzione w è simmetrica rispetto alla permutazione delle particelle iniziali e finali:

$$w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; q\right) = w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; -q\right). \quad (41,1)$$

La funzione w contiene un fattore funzionale δ che esprime la conservazione dell'energia in seguito a urti (la conservazione della quantità di moto è già inclusa).

Consideriamo un'area unitaria sita in un punto p dello spazio dei vettori quantità di moto (delle particelle di una data specie), perpendicolare all'asse p_α . Per definizione, la componente s_α della densità del flusso rappresenta il sovrappiù del numero di particelle (di una data specie) che attraversano nell'unità di tempo questa area da sinistra a destra rispetto al numero di particelle che l'attraversano da destra a sinistra. Lo spostamento nello spazio dei vettori quantità di moto è il risultato degli urti. Se per l'urto a una particella si trasmette la componente α della quantità di moto q_α ($q_\alpha > 0$), allora in seguito a questi urti l'area sarà attraversata da sinistra a destra dalle particelle, in cui questa componente prima dell'urto giaceva nei limiti da $p_\alpha - q_\alpha$ a p_α . Perciò il numero totale di particelle che attraversano l'area da sinistra a destra è

$$\sum_{q_\alpha > 0} \int d^3q \int d^3p' \int_{p_\alpha - q_\alpha}^{p_\alpha} w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; q\right) f(p) f'(p') dp_\alpha.$$

La sommatoria è estesa a tutte le specie di particelle cui si riferiscono le grandezze segnate con l'apice (comprese, ovviamente, le particelle di una data specie cui appartengono le grandezze senza apice). Analogamente, il numero di particelle che attraversano la stessa area da destra a sinistra si può rappresentare nella forma

$$\sum_{q_\alpha \geq 0} \int d^3q \int_{p_\alpha - q_\alpha}^{p_\alpha} d^3p' w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; -q\right) \times \\ \times f(p + q) f'(p' - q) dp_\alpha.$$

In virtù della (41,1) le funzioni w in entrambi gli integrali sono uguali. Perciò la differenza di questi integrali contiene nell'espressione integranda la differenza

$$f(p) f'(p') - f(p + q) f'(p' - q).$$

Ricorriamo ora alla piccolezza della quantità di moto q trasmessa (e precisamente, alla piccolezza dei valori q , essenziali negli integrali, rispetto a p e p'). Sviluppando la differenza suindicata in potenze di q , otteniamo a meno di termini del primo ordine

$$\left[-\frac{\partial f(p)}{\partial p_\beta} f'(p') + f(p) \frac{\partial f'(p')}{\partial p'_{\beta 1}} \right] q_\beta.$$

Dopo questa operazione possiamo sostituire, con la stessa approssimazione, nelle espressioni integrande

$$w\left(p + \frac{q}{2}, p' - \frac{q}{2}; q\right) \approx w(p, p'; q).$$

Quanto all'integrazione rispetto a dp_α , estesa al piccolo intervallo tra $p_\alpha - q_\alpha$ e p_α , la si può sostituire semplicemente con il prodotto per il valore di questo intervallo q_α . Come risultato otteniamo

$$s_\alpha = \sum_{q_\alpha > 0} \int d^3q \int w(p, p'; q) \times \\ \times \left[f(p) \frac{\partial f'(p')}{\partial p'_\beta} - f'(p') \frac{\partial f(p)}{\partial p_\beta} \right] q_\alpha q_\beta d^3p'. \quad (41,2)$$

In virtù della formula (41,1), $w(p, p'; q)$ è una funzione pari di q , pertanto è pari tutta l'espressione integranda nella (41,2). Ciò permette di sostituire l'integrale esteso al semipiano $q_\alpha > 0$ con la metà dell'integrale esteso a tutto lo spazio q .

Riscrivendo l'espressione (41,2), introduciamo in essa al posto della funzione w la sezione d'urti secondo la formula

$$d^3q = |v - v'| d\sigma.$$

Come è stato già precisato per la scrittura dell'integrale degli urti nella forma (3,9), dopo questa operazione si può supporre che il numero di integrazioni indipendenti sia già diminuito con l'inclusione della legge di conservazione dell'energia. In tal modo, la densità del flusso della quantità di moto nello spazio dei vettori quantità di moto per le particelle di ogni specie assume la forma

$$s_\alpha = \sum \int \left[f(p) \frac{\partial f'(p')}{\partial p'_\beta} - f'(p') \frac{\partial f(p)}{\partial p_\beta} \right] B_{\alpha\beta} d^3p', \quad (41,3)$$

dove

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta |v - v'| d\sigma. \quad (41,4)$$

Restano da calcolare le grandezze $B_{\alpha\beta}$ per gli urti tra le particelle, interagenti secondo la legge di Coulomb.

Per una deviazione di un piccolo angolo la variazione della quantità di moto q delle particelle collidenti è perpendicolare alla

$|ee'|/\hbar\bar{v}_{\text{rel}} \gg 1$ (si veda III, § 127). Abbiamo così

$$L = \ln \frac{a\mu\bar{v}_{\text{rel}}^2}{|ee'|} \quad \text{per} \quad \frac{|ee'|}{\hbar\bar{v}_{\text{rel}}} \gg 1. \quad (41,10)$$

Nel caso limite inverso, in cui $|ee'|/\hbar\bar{v}_{\text{rel}} \ll 1$, la diffusione deve essere considerata in modo quantomeccanico, cioè nell'approssimazione di Born. La sezione di diffusione in questo caso si esprime in funzione della componente di Fourier del potenziale di diffusione con il vettore d'onda q/\hbar . Il contributo a questa componente proveniente dalla « nube » schermante di cariche (di dimensioni $\sim a$) diventa piccolo per $qa/\hbar \gg 1$; nel dato caso ciò rappresenta proprio la condizione che la diffusione sia puramente coulombiana. Perciò l'angolo χ_{min} si ottiene dalla condizione

$$q_{\text{min}}a/\hbar \sim \mu v\chi_{\text{min}}a/\hbar \sim 1.$$

In tal modo, in questo caso abbiamo

$$L = \ln \frac{\mu a \bar{v}_{\text{rel}}}{\hbar} \quad \text{per} \quad \frac{|ee'|}{\hbar\bar{v}_{\text{rel}}} \ll 1. \quad (41,11)$$

Per $|ee'| \sim \hbar\bar{v}_{\text{rel}}$ entrambe le espressioni (41,10) e (41,11), naturalmente, coincidono.

Sottolineiamo che la piccolezza di un angolo χ_{min} intesa in tutto l'esposto è garantita in effetti dalla condizione di rarefazione del plasma (27,1) e da quella della sua non degenerazione (27,4). Così, nel caso classico

$$\chi_{\text{min}} \sim \frac{e^2}{dT} \sim \left(\frac{e^2 N^{1/3}}{T} \right) \ll 1$$

in virtù della (27,1) (facendo le stime non facciamo distinzione tra e e e'). Nel caso di Born

$$\chi_{\text{min}} \sim \frac{\hbar}{a/(mT)^{1/2}} \sim \left(\frac{e^2 N^{1/3}}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{mT} \right)^{1/2} \ll 1$$

in virtù della (27,1) e (27,4).

Scriviamo infine l'espressione per le densità dei flussi nello spazio dei vettori quantità di moto sostituendo la (41,8) nella (41,3):

$$\begin{aligned} s_{\alpha} = \sum 2\pi (ee')^2 L \int & \left(f \frac{\partial f'}{\partial p'_{\beta}} - f' \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}} \right) \times \\ & \times \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 \delta_{\alpha\beta} - (v_{\alpha} - v'_{\alpha})(v_{\beta} - v'_{\beta})}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} d^3 p'. \end{aligned} \quad (41,12)$$

Le equazioni cinetiche corrispondenti sono

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\text{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} \quad (41,13)$$

L'integrale L diverge logaritmicamente. La divergenza nel limite inferiore è dovuta a una causa fisica, ossia alla lentezza con cui decrescono le forze coulombiane, il che implica una probabilità più grande di diffusione di angoli piccoli. In realtà, tuttavia, in un plasma elettricamente neutro il campo coulombiano della particella a distanze sufficientemente grandi viene schermato da altre cariche; indichiamo con χ_{\min} l'ordine di grandezza degli angoli minimi, per cui la diffusione si può supporre ancora coulombiana. Quanto alla divergenza nel limite superiore, essa è legata semplicemente al fatto che tutte le formule sono state scritte supponendo piccoli gli angoli e perciò perdono la loro applicabilità per $\chi \sim 1$. Tenendo conto che il logaritmo di un argomento grande è debolmente sensibile a piccole variazioni di quest'ultimo, si possono prendere i limiti d'integrazione in base alle stime dei loro ordini di grandezza, scrivendo cioè

$$L = \ln (1/\chi_{\min}). \quad (41,9)$$

Questa grandezza si chiama *logaritmo coulombiano*. Sottolineiamo immediatamente che questo metodo della sua definizione limita tutto lo studio, come si dice, a una *precisione logaritmica*: vengono trascurate le grandezze piccole non soltanto rispetto al valore grande $1/\chi_{\min}$, ma anche rispetto al suo logaritmo.

La stima effettiva di χ_{\min} dipende dalla necessità di una descrizione classica o quantomeccanica della diffusione di particelle (l'espressione (41,8) è di per sé valida in ambedue i casi, poiché la diffusione coulombiana pura è descritta mediante la formula di Rutherford sia nella meccanica classica che in quella quantistica ¹⁾).

La schermatura del campo coulombiano di una particella nel plasma avviene a distanze dell'ordine di grandezza del raggio di Debye a . Nel caso classico χ_{\min} è definito come angolo di diffusione per un cammino a distanza d'impatto $\sim a$. La variazione corrispondente della quantità di moto è $q \sim |ee'|/a\bar{v}_{\text{rel}}$ (il prodotto della forza $\sim |ee'|/a^2$ per il tempo del cammino libero $\sim a/\bar{v}_{\text{rel}}$ ²⁾). Dividendola per l'impulso $\sim \mu\bar{v}_{\text{rel}}$, otteniamo $\chi_{\min} \sim |ee'|/a\mu\bar{v}_{\text{rel}}^2$. La condizione di classicità della diffusione è data dalla disuguaglianza

¹⁾ Nel caso quantistico per la diffusione di particelle identiche (elettroni) si deve tener conto dell'effetto di scambio. Questo effetto, tuttavia, non cambia la forma limite della sezione in piccoli angoli (41,6).

²⁾ Qui e in seguito in situazioni analoghe \bar{v}_{rel} indica il valore medio della velocità relativa di due particelle, $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$. Se le particelle sono della stessa specie, allora \bar{v}_{rel} coincide con il valore medio \bar{v} . Se le particelle sono di specie distinte, \bar{v}_{rel} coincide con il più grande dei valori \bar{v} e \bar{v}' .

loro velocità relativa $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Perciò il tensore $B_{\alpha\beta}$ è anch'esso trasversale rispetto al vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$:

$$B_{\alpha\beta} (v_\beta - v'_\beta) = 0. \quad (41,5)$$

Notiamo immediatamente che con ciò è garantito automaticamente l'annullamento dei flussi (41,3) per la distribuzione d'equilibrio di tutte le particelle. L'espressione integranda nella (41,3) con f e f' distribuzioni maxwelliane (con la stessa temperatura T) diventa

$$\frac{ff'}{T} (v'_\beta - v_\beta) B_{\alpha\beta} = 0.$$

Il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è, al tempo stesso, l'unico vettore dal quale può dipendere il tensore $B_{\alpha\beta}$. Essendo trasversale rispetto al vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$, questo tensore deve avere la forma

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2} \right],$$

dove lo scalare

$$B = B_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \int q^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\sigma.$$

Sia χ l'angolo di deviazione della velocità relativa (angolo di deviazione nel sistema del centro d'inerzia delle due particelle). Per piccoli valori di questo angolo il valore della variazione delle quantità di moto è $q \approx \mu |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \chi$, dove μ è la massa ridotta delle particelle. Perciò

$$B = \frac{1}{2} \mu^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3 \int \chi^2 d\sigma = \mu^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3 \sigma_t,$$

dove

$$\sigma_t = \int (1 - \cos \chi) d\sigma \approx \frac{1}{2} \int \chi^2 d\sigma$$

è la sezione di trasporto. La sezione differenziale di diffusione di angoli piccoli in un campo coulombiano è data dalla formula di Rutherford

$$d\sigma \approx \frac{4(ee')^2 d\sigma}{\mu^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4 \chi^4} \approx \frac{8\pi (ee')^2}{\mu^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4} \frac{d\chi}{\chi^3} \quad (41,6)$$

(e, e' sono le cariche delle particelle collidenti). Di qui la sezione di trasporto risulta

$$\sigma_t = \frac{4\pi (ee')^2}{\mu^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4} L, \quad L = \int \frac{d\chi}{\chi}. \quad (41,7)$$

Quindi, per le grandezze $B_{\alpha\beta}$ abbiamo

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2\pi (ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} L \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2} \right]. \quad (41,8)$$

(e è la carica delle particelle cui si riferisce la funzione f , cioè per gli elettroni bisogna scrivere $-e$ e per gli ioni ze). L'integrale degli urti nell'approssimazione logaritmica per un gas con interazione coulombiana tra le particelle è stato stabilito da *L. D. Landau* (1936).

L'applicabilità dell'integrale degli urti di Landau è legata a certe condizioni. Le lunghezze caratteristiche $1/k$, alle quali la funzione di distribuzione varia significativamente, devono essere grandi rispetto al raggio di schermatura a e gli intervalli di tempo $1/\omega$ grandi rispetto ad a/\bar{v}_{rel} ; tuttavia, nell'approssimazione logaritmica di fatto è sufficiente che queste condizioni siano soddisfatte in forma debole, cioè che

$$ka < 1, \quad \omega < \bar{v}_{rel}/a \quad (41,14)$$

con il segno $<$ al posto di \ll .

Infine a scanso di equivoci notiamo quanto segue. A causa della lentezza con cui decrescono le forze di interazione coulombiane, urti significativi degli ioni nel plasma avvengono a distanze grandi rispetto alle distanze medie tra le particelle. Ciò significa che ogni ione si urta di fatto non con una particella, ma contemporaneamente con molte particelle. Fra l'altro l'integrale degli urti di Boltzmann (su cui è basata la deduzione suindicata dell'integrale degli urti di Landau) presuppone l'indipendenza degli urti a coppie delle particelle. In realtà, tuttavia, è sufficiente che il risultato di un urto multiplo di una particella sia considerato come la somma dei risultati dei suoi urti indipendenti con ciascuna delle altre particelle separatamente. È ovvio che nel caso generale non è così. Ma nei casi degli urti a grandi distanze, in cui avviene solo una deviazione debole di una particella data dalla sua traiettoria rettilinea, la sua deviazione risultante in prima approssimazione è di fatto la somma delle deviazioni indipendenti nel campo di ciascuna delle altre particelle separatamente. È essenziale anche che, dopo aver calcolato la media rispetto alle posizioni dei centri di diffusione, i quadrati medi degli angoli di deviazione da ciascuno di essi diventino grandezze additive.

PROBLEMA

È stato mostrato al § 34 che, dopo che le perturbazioni della densità elettronica con vettore d'onda k si sono smorzate a causa dello smorzamento di Landau, le perturbazioni della funzione di distribuzione continuano ad oscillare secondo la legge e^{-ikvt} (34,16). Trovare la legge di smorzamento di queste oscillazioni a causa degli urti coulombiani per tempi $t \gg 1/k\bar{v}$.

Soluzione. Cerchiamo la funzione di distribuzione nella forma

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = a(t, v) e^{-ikvt + ikr}, \quad (1)$$

dove δf è la perturbazione della distribuzione d'equilibrio f_0 e a una funzione della velocità variabile lentamente (soggetta a variazioni notevoli soltanto

negli intervalli $\sim \bar{v} \gg 1/kt$. Sostituendo la (1) nella (41,12) si deve conservare nell'espressione integranda solo il termine

$$-f_0(\mathbf{p}') \frac{\partial \delta f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{i}{m} k t \delta f(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}');$$

gli altri termini danno un piccolo contributo o per lo smorzamento dell'integrale grazie alla presenza del fattore rapidamente oscillante $\exp(-ik\mathbf{v}'t)$, o per mancanza in essi del fattore $kt \gg 1/\bar{v}$. Per quest'ultima ragione nel calcolare $\text{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s}$ si deve derivare solo il fattore esponenziale. L'equazione cinetica dà infine

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_{\alpha} k_{\beta} b_{\alpha\beta} t^2 a,$$

dove come ordine di grandezza i coefficienti $b_{\alpha\beta} \sim \bar{v}^2 \mathbf{v}$ (\mathbf{v} è la frequenza degli urti). Di qui abbiamo

$$a(t, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{v}) \exp \left\{ -\frac{1}{3} k_{\alpha} k_{\beta} b_{\alpha\beta} t^3 \right\}, \quad (2)$$

perciò il tempo di smorzamento delle oscillazioni è

$$\tau_{\text{sm}} \sim v^{-1/3} (k\bar{v})^{-2/3}.$$

Poiché tutta la teoria dello smorzamento di Landau ha senso solo per la condizione $k\bar{v} \gg v$, allora $\tau_{\text{sm}} \ll 1/v$. Il risultato (2) è valido solo a condizione che l'esponente nella formula (2) sia piccolo rispetto all'esponente kvt nella (1); a tal fine deve essere $t \ll (vk\bar{v})^{-1/2}$. Durante questo tempo le oscillazioni si smorzano di $\exp(-\sqrt{k\bar{v}/v})$ volte.

§ 42. Trasmissione dell'energia tra elettroni e ioni

La grande differenza tra le masse degli elettroni m e degli ioni M rende difficile uno scambio reciproco dell'energia: per l'urto tra una particella pesante e una leggera l'energia di ciascuna di esse non varia. Perciò l'equilibrio tra gli elettroni a sé stanti e tra gli ioni a sé stanti si stabilisce molto più rapidamente che non l'equilibrio tra elettroni e ioni. Come risultato si crea facilmente una situazione in cui le componenti elettronica e ionica del plasma hanno ciascuna una propria distribuzione maxwelliana con temperature distinte T_e e T_i (di solito T_e supera T_i).

La differenza tra le temperature elettronica e ionica implica una trasmissione d'energia tra le due componenti del plasma; determiniamo questa trasmissione (*L. D. Landau, 1936*).

Denoteremo per il momento le grandezze che si riferiscono a ioni e elettroni con lettere con e senza apice, rispettivamente. La variazione dell'energia ionica (in un secondo in 1 cm^3 del plasma) è data dall'integrale

$$\frac{dE}{dt} = \int \varepsilon \text{St} f d^3p = - \int \varepsilon \text{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} d^3p,$$

ossia, integrando per parti,

$$\frac{dE}{dt} = \int \mathbf{s} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d^3p = \int \mathbf{s} \mathbf{v} d^3p \quad (42,1)$$

(l'integrale esteso a una superficie infinitamente lontana nello spazio dei vettori quantità di moto, come al solito, si annulla).

Nelle somme (41,3), che definiscono i flussi di elettroni e ioni nello spazio dei vettori quantità di moto, restano i soli termini corrispondenti agli urti elettrone-ione; i termini elettrone-elettrone e ione-ione si annullano per le distribuzioni maxwelliane. Sostituendo in questi termini restanti le distribuzioni maxwelliane con temperature T' e T , otteniamo il flusso di ioni:

$$s_{\alpha} = \int f f' \left(\frac{v_{\beta}}{T} - \frac{v'_{\beta}}{T'} \right) B_{\alpha\beta} d^3 p'.$$

Ma in virtù della (41,5) abbiamo $B_{\alpha\beta} v_{\beta} = B_{\alpha\beta} v'_{\beta}$; effettuando questa sostituzione e ponendo il flusso s nella (42,1), troviamo

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f f' v_{\alpha} v_{\beta} B_{\alpha\beta} d^3 p d^3 p'. \quad (42,2)$$

Essendo piccola la massa degli elettroni, le loro velocità in media sono grandi rispetto alle velocità degli ioni. Perciò in $B_{\alpha\beta}$ si può porre $v'_{\alpha} - v_{\alpha} \approx v'_{\alpha}$. Dopo questa operazione le grandezze $B_{\alpha\beta}$ non dipenderanno più da v_{α} e nella (42,2) si può integrare rispetto a $d^3 p$:

$$\int f v_{\alpha} v_{\beta} d^3 p = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} N \bar{v}^2 = \delta_{\alpha\beta} N \frac{T}{M}.$$

Quindi,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{NT}{M} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f' B d^3 p'. \quad (42,3)$$

Infine, sostituendovi in accordo con la (41,8) $B = 4\pi e^4 z^2 L / v'$ (ze è la carica ionica) e osservando che per la distribuzione maxwelliana

$$\int f' \frac{d^3 p'}{v'} = N' \sqrt{\frac{2m}{\pi T'}},$$

otteniamo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4NN'z^2e^4\sqrt{2\pi m}L}{MT'^{3/2}} (T' - T). \quad (42,4)$$

Questa espressione col segno cambiato fornisce la diminuzione dell'energia nella componente elettronica del plasma, $-dE'/dt$. Esprimendo l'energia degli elettroni nell'unità di volume in funzione della loro temperatura secondo $E' = 3N'T'/2$ e tornando alla notazione delle grandezze elettroniche e ioniche con gli indici e ed i , scriviamo finalmente la seguente espressione per la velocità di variazione della temperatura elettronica:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}^e}, \quad \tau_{ei}^e = \frac{T_e^{3/2} M}{8N_i z^2 e^4 L_e (2\pi m)^{1/2}}. \quad (42,5)$$

Il logaritmo coulombiano che qui figura vale

$$L_e = \begin{cases} \ln(aT_e/ze^2) & \text{per } ze^2/\hbar v_{Te} \gg 1, \\ \ln(\sqrt{mT_e}a/\hbar) & \text{per } ze^2/\hbar v_{Te} \ll 1. \end{cases} \quad (42,6)$$

La grandezza τ_{ei}^e rappresenta il tempo di rilassamento in cui si stabilisce l'equilibrio elettrone-ione.

§ 43. Lunghezza del cammino delle particelle nel plasma

Come abbiamo visto nella conclusione data al § 41, la sezione di trasporto σ_t (41,7) funge da caratteristica degli urti nell'equazione cinetica. Questa è la ragione per cui detta sezione deve figurare anche nella definizione della lunghezza del cammino libero.

Per urti elettrone-elettrone (ee) e elettrone-ione (ei) la massa ridotta è $\mu \sim m$; poiché le velocità degli elettroni superano di gran lunga quelle degli ioni, allora

$$\mu(v_e - v_i)^2 \sim mv_{Te}^2 \sim T_e.$$

Si ottiene perciò la seguente stima per la lunghezza del cammino degli elettroni:

$$l_e \sim T_e^2/4\pi e^4 N L_e \quad (43,1)$$

con L_e dalla (42,6). Non scriviamo i fattori z nelle stime supponendo che $z_i \sim 1$. La durata del cammino libero degli elettroni τ_e (o il suo inverso, ossia la frequenza degli urti ν_e) vale

$$\tau_e \sim \frac{1}{\nu_e} \sim \frac{l_e}{v_{Te}} \sim \frac{T_e^{3/2} m^{1/2}}{4\pi e^4 N L_e}. \quad (43,2)$$

Notiamo che

$$\frac{l_e}{a_e} \sim \frac{1}{L_e} \left(\frac{T_e}{N^{1/3} e^2} \right)^{3/2}$$

e in virtù della condizione di rarefazione del plasma (27,1) $l_e \gg a_e$. Corrispondentemente a ciò la frequenza degli urti è piccola rispetto alla frequenza di plasma degli elettroni

$$\nu_e \ll \nu_{Te}/a_e = \Omega_e. \quad (43,3)$$

Analogamente, la lunghezza del cammino degli ioni rispetto agli urti ione-ione (ii) è

$$l_i \sim T_i^2/4\pi e^4 N L_i, \quad L_i = \ln(aT_i/e^2), \quad (43,4)$$

dove L_i è il logaritmo coulombiano con le grandezze ioniche al posto di quelle elettroniche. La durata corrispondente del cammino è

$$\tau_{ii} \sim \frac{1}{\nu_{ii}} \sim \frac{T_i^{3/2} M^{1/2}}{4\pi e^4 N L_i}. \quad (43,5)$$

La grandezza τ_e definisce, come ordine di grandezza, il tempo di rilassamento in cui si stabilisce l'equilibrio termico locale della componente elettronica del plasma, e τ_{ii} è lo stesso tempo per la componente ionica. Sebbene le frequenze ν_{ee} e ν_{ei} degli urti ee ed ei siano dello stesso ordine di grandezza, τ_e non rappresenta affatto il tempo di rilassamento per l'equilibrio tra elettroni e ioni; esso caratterizza soltanto la velocità di trasmissione della quantità di moto dagli elettroni agli ioni e non la velocità di scambio d'energia tra queste particelle. Il tempo di rilassamento per l'equilibrio tra elettroni e ioni è dato dalla grandezza τ_{ei}^e definita al paragrafo precedente. Dal confronto di tutti questi tempi risulta che

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^e \sim 1 : (M/m)^{1/2} : (M/m). \quad (43,6)$$

Facciamo ora la stima dei coefficienti cinetici di un plasma mediante la lunghezza del cammino libero.

Per una stima della conduttività elettrica σ ricorriamo alla nota formula « cinetica » elementare. Le particelle (portatrici della corrente) di carica e e massa m nel loro cammino libero durante un tempo τ acquistano sotto l'influsso del campo elettrico E la velocità « ordinata » $V \sim \tau e E / m$. La densità di corrente elettrica creata da questo moto è $j \sim e N V$. Di conseguenza, la conduttività (il coefficiente di proporzionalità tra j e E) vale

$$\sigma \sim e^2 N \tau / m \sim e^2 N l / m v_T, \quad (43,7)$$

dove con l , m e v_T si devono intendere grandezze che si riferiscono a particelle più leggere, ossia agli elettroni. Facendo la stima mediante questa formula abbiamo

$$\sigma \sim T_e^{3/2} / e^2 m^{1/2} L_e. \quad (43,8)$$

Il coefficiente di conducibilità termica va stimato analogamente mediante la formula cinetica (7,10); qui sono gli elettroni a giocare il ruolo principale. Abbiamo $\kappa \sim N_e l_e v_T c_e$ (dove $c_e \sim 1$ è il calore specifico elettronico), da cui

$$\kappa \sim T_e^{5/2} / e^4 m^{1/2} L_e. \quad (43,9)$$

Contrariamente alla conduttività termica ed elettrica, la viscosità del plasma è legata, soprattutto, al moto ionico poiché proprio nella componente ionica del plasma è concentrata la sua quantità di moto. Inoltre, essa nel caso ionico varia poco per urti con elettroni; questa è la ragione per cui è sufficiente considerare solo gli urti ii . Secondo la (8,11) il coefficiente di viscosità viene stimato come $\eta \sim N_i M l_i v_{Ti}$, da cui

$$| \eta \sim M^{1/2} T_i^{5/2} / e^4 L_i. \quad (43,10)$$

Il calcolo dei coefficienti nelle espressioni (43,8-10) richiede di risolvere un'equazione cinetica linearizzata con l'integrale degli

urti di Landau, il che è possibile soltanto con metodi numerici approssimati. Così, per un plasma d'idrogeno ($z = 1$) i coefficienti nelle espressioni per σ , κ , η valgono 0,6; 0,9; 0,4, rispettivamente.

§ 44. Plasma di Lorentz

Per il calcolo del contributo elettronico ai coefficienti cinetici di un plasma è necessario, in generale, tener conto sia degli urti ei che degli urti ee . Se, tuttavia, la carica degli ioni è sufficientemente grande, il ruolo degli urti ei può essere prevalente. Infatti, la sezione degli urti ee è proporzionale a $(e^2)^2$ e la frequenza di questi urti ν_{ee} anche alla densità elettronica N_e ; analogamente, la frequenza degli urti ei è proporzionale a $(ze^2)^2 N_i = e^4 z_i^2 N_e$, in modo che $z \gg 1$ si avrà anche $\nu_{ei} \gg \nu_{ee}$. Il plasma, in cui si possono trascurare gli urti ee rispetto a quelli ei , si chiama plasma di Lorentz. Benché questo caso sia poco realistico, esso presenta interesse sia sul piano metodologico che per le possibili applicazioni ad altri oggetti ¹⁾.

Essendo le velocità degli ioni piccole rispetto a quelle degli elettroni, esse si possono trascurare in prima approssimazione, supponendo gli ioni fissi e la loro distribuzione assegnata. Nel problema del comportamento di un plasma immerso in un campo elettrico esterno esiste una direzione prefissata: la direzione del campo E . Se la funzione di distribuzione degli elettroni differisce poco dalla funzione d'equilibrio, $f = f_0(p) + \delta f$, la piccola correzione δf è lineare nel campo, cioè ha la forma $\delta f = p E g(p)$. In queste condizioni l'integrale degli urti elettrone-ione assume la stessa forma che è stata data nel § 11 all'integrale degli urti per il problema della diffusione di una mistura di gas leggero in uno pesante,

$$\text{St } f = -\nu_{ei}(v) \delta f, \quad (44,1)$$

dove è stata introdotta la *frequenza efficace* di urti dipendente dalla velocità

$$\nu_{ei}(v) = N_i \nu \sigma_i^{(ei)}, \quad (44,2)$$

e $\sigma_i^{(ei)}$ è la sezione di trasporto della diffusione degli elettroni sugli ioni. Prendendo quest'ultima dalla (41,7) e sostituendo $zN_i = N_e$, otteniamo

$$\nu_{ei}(v) = \frac{4\pi z e^4 N_e L}{m^2 v^3}. \quad (44,3)$$

Più avanti in questo paragrafo scriveremo semplicemente $\nu(v)$, omettendo gli indici ei .

Calcoliamo la costante dielettrica del plasma di Lorentz in un campo elettrico variabile ($\sim e^{-i\omega t}$) spazialmente omogeneo (il vet-

¹⁾ Per esempio, a un gas debolmente ionizzato in cui al posto degli urti ei si deve parlare di urti tra elettroni e atomi neutri.

tore d'onda $k = 0$). La correzione δf alla distribuzione d'equilibrio dipenderà dal tempo secondo la stessa legge e l'equazione cinetica per essa ha la forma

$$-i\omega\delta f - eE \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + \nu(v)\delta f = 0. \quad (44,4)$$

Osservando inoltre che $\partial f_0 / \partial \mathbf{p} = -\mathbf{v} f_0 / T$, di qui ricaviamo

$$\delta f = -\frac{e}{T} E \mathbf{v} \frac{f_0}{v(v) - i\omega}. \quad (44,5)$$

La costante dielettrica è definita dalla relazione (29,4), $-i\omega \mathbf{P} = \mathbf{j}$, ossia

$$-i\omega \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = -e \int \mathbf{v} \delta f d^3 p. \quad (44,6)$$

Sostituendovi la (44,5) e calcolando la media rispetto alle direzioni \mathbf{v} (secondo $\langle v_\alpha v_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} v^2/3$), otteniamo

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{3\omega T} \int \frac{v^2 f_0 d^3 p}{\omega + i\nu(v)}. \quad (44,7)$$

Nel caso limite $\omega \gg \nu$ ¹⁾ questa formula dà

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2} + i \frac{4\pi e^2 N_e}{3\omega^3 T} \langle v^2 \nu(v) \rangle, \quad (44,8)$$

dove il valore medio si calcola per una distribuzione maxwelliana degli elettroni. Dopo aver calcolato questa media per $\nu(v)$ dalla (44,3) otteniamo

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + i \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ze^4 L N_e}{T^{3/2} m^{1/2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega^3} \quad (\omega \gg \nu). \quad (44,9)$$

Ricordiamo, tuttavia, che la regione di validità di questa formula è limitata anche superiormente dalla condizione generale (41,14) di applicabilità dell'approssimazione logaritmica nell'integrale degli urti, $\omega \ll \nu_{Te}/a_e = \Omega_e$, vale a dire che la frequenza deve essere piccola rispetto alla frequenza di plasma degli elettroni²⁾.

La formula (44,9) ha un significato particolare in quanto sussiste per ogni z (non soltanto grandi). Infatti, per $\omega \gg \nu$ il ruolo degli urti si riduce a piccole correzioni per cui gli urti ei ed ee si possono includere indipendentemente. Ma in assenza di ioni il campo elettrico omogeneo non implicherebbe altro che la traslazione di tutto il sistema di elettroni come un tutt'uno e in questo sistema gli urti non possono generare dissipazione (espressa dalla parte imma-

¹⁾ Con ν (senza indicare l'argomento) si intende il valore $\nu(v)$ per $v = v_T$. In questo caso $\nu = 4\pi ze^4 N_e L / m^{1/2} T_e^{3/2}$.

²⁾ Il calcolo di ε'' per $\omega \gg \Omega_e$ è effettuato al § 48.

ginaria della costante dielettrica ε''); quest'ultima è condizionata quindi solo dagli urti *ei* inclusi nella (44,9).

Nel caso limite inverso, in cui $\omega \ll \nu$, la costante dielettrica ha la forma

$$\varepsilon = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad \sigma = \frac{e^2 N_e}{3T} \left\langle \frac{v^2}{\nu(v)} \right\rangle. \quad (44,10)$$

La grandezza σ che figura in questa espressione limite rappresenta la conduttività statica del plasma (si veda VIII, § 77). Calcolandola mediante $\nu(v)$ dalla (44,3) abbiamo

$$\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{T^{3/2}}{ze^2 L_m^{1/2}}. \quad (44,11)$$

Questo risultato si potrebbe ottenere, ovviamente, anche con il calcolo diretto della densità di corrente elettrica

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f d^3p$$

con δf dalla (44,5) (per $\omega = 0$).

Calcoliamo anche gli altri coefficienti cinetici del plasma di Lorentz, legati al suo comportamento sotto l'influsso di un campo elettrico costante ($\omega = 0$) e di un gradiente di temperatura. Ricordiamo preliminarmente la definizione di questi coefficienti (si veda VIII, § 26).

Le condizioni di equilibrio termico richiedono, come noto, non soltanto la costanza della temperatura, ma anche la costanza nel mezzo della somma $\mu + U$, dove μ è il potenziale chimico delle particelle e U la loro energia nel campo esterno. Nel caso considerato si tratta dell'equilibrio rispetto agli elettroni, cosicché con μ si deve intendere il loro potenziale chimico, mentre $U = -e\varphi$, dove φ è il potenziale del campo elettrico. Ciò premesso, la corrente elettrica \mathbf{j} e il flusso dissipativo di energia \mathbf{q}' si annullano contemporaneamente soltanto per le condizioni $T = \text{costante}$ e $\mu - e\varphi = \text{costante}$, cioè per $\nabla T = 0$, $\nabla\mu + e\mathbf{E} = 0$. Le espressioni per \mathbf{j} e \mathbf{q}' si scrivono nella forma delle seguenti relazioni che soddisfano detta condizione:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{e} \nabla\mu = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \alpha \nabla T, \quad (44,12)$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) \mathbf{j} = \kappa T \mathbf{j} - \kappa \nabla T. \quad (44,13)$$

Qui σ è la conduttività elettrica del mezzo, κ il coefficiente di conducibilità termica e α il coefficiente termoelettrico; la relazione tra i coefficienti per ∇T nella (44,12) e \mathbf{j} nella (44,13) deriva come conseguenza del principio di Onsager. La grandezza $(\varphi - \mu/e) \mathbf{j}$,

sottratta dal flusso totale di energia, rappresenta la densità del flusso di energia per convezione ¹⁾.

Per il calcolo dei coefficienti cinetici partiamo dall'equazione cinetica

$$-eE \frac{\partial f_0}{\partial p} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial r} = -\mathbf{v}(v) \delta f. \quad (44,14)$$

Sostituendovi la distribuzione d'equilibrio nella forma ²⁾

$$f_0 = \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon}{T} \right), \quad (44,15)$$

otteniamo

$$\delta f = -\frac{f_0}{T \mathbf{v}(v)} (eE + \nabla \mu) \mathbf{v} + f_0 \frac{\mu - \varepsilon}{T^2 \mathbf{v}(v)} \mathbf{v} \nabla T. \quad (44,16)$$

Il coefficiente termoelettrico si calcola in base al coefficiente nell'uguaglianza $\mathbf{j} = -\alpha \sigma \nabla T$ per $E + \nabla \mu / e = 0$. Scriviamo

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f d^3 p = -\frac{e}{T^2} \int f_0 \frac{\mu - \varepsilon}{\mathbf{v}(v)} \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla T) d^3 p$$

e dopo aver calcolato il valore medio nelle direzioni \mathbf{v} troviamo

$$\alpha = \frac{N e e}{3 \sigma T^2} \left\langle \frac{v^2 (\mu - \varepsilon)}{\mathbf{v}(v)} \right\rangle = \frac{1}{e T} \left\{ \mu - \frac{\langle v^2 \varepsilon / \mathbf{v}(v) \rangle}{\langle v^2 / \mathbf{v}(v) \rangle} \right\}. \quad (44,17)$$

Il calcolo con $\mathbf{v}(v)$ dalla (44,3) dà ³⁾

$$\alpha = \frac{1}{e} \left(\frac{\mu}{T} - 4 \right). \quad (44,18)$$

Per il calcolo del coefficiente di conducibilità termica osserviamo che per $\mathbf{j} = 0$ deve essere $E + \nabla \mu / e = \alpha \nabla T$. Ponendo questo valore (con α dalla (44,18)) nella (44,16) abbiamo

$$\delta f = \frac{f}{T \mathbf{v}(v)} \left(4 - \frac{\varepsilon}{T} \right) \mathbf{v} \nabla T.$$

¹⁾ Per scrivere le relazioni (44,12-13) in VIII, § 26, abbiamo cambiato la notazione: con φ e E abbiamo inteso $\varphi - \mu/e$ ed $E + \nabla \mu/e$. Questa definizione, ammissibile per un approccio fenomenologico, è inopportuna nella teoria cinetica, dove con $-eE$ si deve intendere la forza agente sull'elettrone.

²⁾ È difficile che la notazione della costante dielettrica e dell'energia degli elettroni $m v^2/2$ con la stessa lettera ε possa causare equivoci.

³⁾ Nella statistica classica il potenziale chimico contiene un termine della forma ζT con la costante indefinita ζ (corrispondente alla costante additiva indefinita nell'entropia). Allo stesso modo compare la costante indefinita ζ/e in α . Questa indeterminazione non incide, tuttavia, su alcun effetto osservabile; i termini indefiniti $(\zeta/e) \nabla T$ si eliminano in ambedue i membri dell'uguaglianza (44,12). Se f_0 è scritta sotto forma della (44,15), con ciò è già prefissata la scelta della costante ζ : $\mu = T \ln [N_e (2\pi m T)^{-3/2}]$.

Con questa funzione calcoliamo il flusso di energia

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{v} \varepsilon \delta f \, d^3 p$$

e otteniamo

$$\kappa = \frac{N_e}{3T^2} \left\langle \frac{v^2 \varepsilon (4T - \varepsilon)}{v(v)} \right\rangle \quad (44,19)$$

e, infine,

$$\kappa = \frac{16 \sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{T^{5/2}}{ze^4 L m^{1/2}}. \quad (44,20)$$

PROBLEMA

Trovare la parte dovuta agli urti dello smorzamento delle onde di plasma elettroniche.

Soluzione. Se la parte immaginaria della costante dielettrica è piccola, i contributi ad essa, dovuti allo smorzamento di Landau e agli urti, vanno sommati. Tenendo conto dell'ultimo contributo, ε è definito dalla formula (44,9); uguagliando ε a zero troviamo $\omega = \Omega_e - i\gamma$, dove il coefficiente di smorzamento vale

$$\gamma = \frac{v_{ei}}{3 \sqrt{2\pi}} = \frac{2 \sqrt{2\pi}}{3} \frac{ze^4 L N_e}{m^{1/2} T_e^{3/2}}.$$

La relazione

$$\frac{\gamma}{\Omega_e} = \frac{\sqrt{2} z L}{3} \left(\frac{e^2 N_e^{1/3}}{T_e} \right)^{3/2} \ll 1$$

si ottiene in virtù della condizione di rarefazione del plasma; con ciò si giustifica l'applicazione della (44,9).

§ 45. Elettroni in fuga

La diminuzione rapida della sezione coulombiana all'aumentare della velocità delle particelle collidenti fa sì, come vedremo, che già in un campo elettrico debole a piacere la funzione di distribuzione degli elettroni sufficientemente veloci nel plasma sia fortemente distorta.

Muovendosi con velocità termica v un elettrone durante il suo cammino libero nel campo elettrico E acquista la velocità ordinata

$$V \sim \frac{eEl}{mv} \sim \frac{eE}{mv N_e \sigma_t(v)} \sim \frac{v^3 m E}{4\pi e^3 L N_e}$$

(la sezione σ_t è definita dalla (41,7)). Già per $v \sim v_c$, dove

$$v_c = \left(\frac{4\pi N_e e^3 L}{mE} \right)^{1/2}, \quad (45,1)$$

si ha $V \sim v$, e per $v > v_c$ la lunghezza e la durata del cammino libero sono definite dalla velocità V . La quantità di moto acquistata

dall'elettrone durante il cammino sarà in questo caso

$$\frac{eEl}{V} \sim \frac{eE}{VN_e\sigma_t(V)} \sim \frac{V^3 m^2 E}{4\pi e^3 L N_e} \sim mV \left(\frac{V}{v_c} \right)^2.$$

Quanto alla quantità di moto ceduta dall'elettrone per urto alla fine del cammino libero, essa vale $\sim mV$. Si vede di qui che gli elettroni con velocità sufficientemente grandi avranno un'accelerazione illimitata; questi elettroni si dicono « *in fuga* ». Per la condizione $v_c \gg (T_e/m)^{1/2}$ questo fenomeno sarà osservato soltanto nella « coda » della distribuzione maxwelliana; a tal fine il campo elettrico deve soddisfare la condizione

$$E \ll E_c = 4\pi e^3 L N_e / T_e. \quad (45,2)$$

In queste condizioni si può risolvere il problema degli elettroni in fuga come un problema stazionario. La massa principale degli elettroni, distribuiti secondo Maxwell, svolge il ruolo di un grande recipiente da cui « fluisce » un piccolo flusso stazionario verso le grandi energie ¹⁾.

Già dall'origine degli elettroni in fuga, come risultato della loro accelerazione da parte del campo elettrico, è evidente che essi si muovono essenzialmente sotto piccoli angoli θ nella direzione del campo. Se ci prefiggiamo lo scopo di calcolare solo i valori del flusso degli elettroni in fuga, non occorre più la completa definizione della funzione di distribuzione; è sufficiente calcolare la media della distribuzione \bar{f} delle energie rispetto agli angoli.

L'equazione cinetica per la distribuzione delle quantità di moto degli elettroni nel campo elettrico ha la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} - eE \frac{\partial f}{\partial p} + \text{div}_p s = 0, \quad (45,3)$$

dove s è la densità del flusso d'urto nello spazio dei vettori quantità di moto. In coordinate sferiche p, θ, φ (con l'asse polare lungo la forza applicata $-eE$) abbiamo nello spazio dei vettori quantità di moto

$$\begin{aligned} -eE \frac{\partial f}{\partial p} &= eE \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \\ &= eE \left(\frac{\cos \theta}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 f - \frac{1}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \cdot f \right). \end{aligned}$$

La divergenza del flusso è

$$\text{div}_p s = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 s_p + \frac{1}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot s_\theta.$$

¹⁾ Il fenomeno degli elettroni in fuga è stato scoperto da H. Dreicer (1958) e la teoria quantitativa qui esposta appartiene a A.V. Gurevič (1960).

Calcoliamo la media dell'equazione (45,3) rispetto agli angoli, cioè moltiplichiamola per $2\pi \sin \theta d\theta/4\pi$ e integriamo. Tutti i termini con le derivate $\partial/\partial\theta$ scompaiono in questo caso; il fattore $\cos \theta$, invece, si può sostituire con l'unità in prima approssimazione. Come risultato per il valore medio della funzione \bar{f} otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{eE}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \bar{f} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \bar{s}_p = 0. \quad (45,4)$$

In essa resta solo la componente radiale della densità del flusso nello spazio dei vettori quantità di moto. Questa componente è legata alla trasmissione per urti dell'energia; il contributo degli urti *ei* ad essa è, evidentemente, piccolo rispetto al contributo proveniente dagli urti *ee*.

Poiché gli elettroni in fuga costituiscono una parte molto piccola di tutti gli elettroni, nel calcolare il flusso s_p bisogna tener conto dei loro urti con la massa principale di elettroni maxwelliani (e non degli urti reciproci); le velocità di questi ultimi sono piccole rispetto alle velocità degli elettroni in fuga. In queste condizioni non c'è bisogno di calcolare di nuovo il flusso s_p . Per esso si può scrivere l'espressione

$$s_p = -T_e v_{ee}(v) m \left[\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p}{mT_e} f \right] \quad (45,5)$$

per analogia diretta con la formula (22,5) dedotta prima; qui $v_{ee}(v) = 4\pi e^4 N_e L/m^2 v^3$ è la frequenza degli urti coulombiani tra elettroni veloci e lenti (si veda la (44,3))¹⁾. Poiché l'espressione (45,5) si riferisce agli elettroni con velocità $v \sim v_c$, allora anche per il logaritmo coulombiano poniamo

$$L = \ln (mv_c^2 a/e^2). \quad (45,6)$$

La grandezza

$$\bar{S}_p = \bar{s}_p + eE\bar{f} \quad (45,7)$$

rappresenta, come risulta con evidenza dalla forma dell'equazione (45,4), la densità totale (per urti e per azione del campo) del flusso radiale nello spazio dei vettori quantità di moto. In accordo con quanto detto sopra, la distribuzione degli elettroni in fuga si può cercare come stazionaria, trascurando cioè la derivata rispetto al tempo nell'equazione cinetica (45,4). Allora

$$4\pi p^2 \bar{S}_p = \text{costante} \equiv n_{\text{tug}}. \quad (45,8)$$

¹⁾ Nel dedurre la formula (22,5) siamo partiti unicamente dal fatto che siano piccole l'energia trasmessa per urto e la velocità della particella bersaglio rispetto a quella dell'elettrone incidente. Per passare al caso in esame è sufficiente sostituire nella (22,5) M con m e con l intendere la lunghezza del cammino libero rispetto agli urti *ee*.

Questa uguaglianza (con \bar{s}_p dalla (45,5)) rappresenta l'equazione differenziale che definisce la funzione di distribuzione \bar{f} . Quanto alla costante n_{fuga} , essa dà la grandezza cercata, ossia il numero totale di elettroni in fuga (nell'unità di tempo per unità di volume).

Introduciamo la variabile adimensionale u e la costante adimensionale b secondo la definizione

$$u = p/p_c, \quad b = E/E_c, \quad p_c = (mT_e/b)^{1/2}. \quad (45,9)$$

Allora l'equazione (45,8) diventa

$$-\frac{b}{u} \frac{d\bar{f}}{du} - (1-u^2) \bar{f} = C \quad (45,10)$$

(la costante C differisce da n_{fuga} per un fattore costante). Poiché si è supposto che il campo $E \ll E_c$, allora il parametro $b \ll 1$; questa grandezza nel problema in esame svolge il ruolo di piccolo parametro che caratterizza il grado di approssimazione¹⁾.

La soluzione dell'equazione (45,10) è

$$\bar{f} = F - CF \int_0^u \frac{u}{F} du, \quad (45,11)$$

dove

$$F = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{1}{2b} \left(\frac{u^4}{2} - u^2 \right) \right\} \quad (45,12)$$

è la soluzione dell'equazione omogenea. Il fattore di normalizzazione è definito dalla condizione che per $u \rightarrow 0$ la funzione \bar{f} si trasforma nella distribuzione maxwelliana

$$f_0 = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left(-\frac{u^2}{2b} \right).$$

Per $u \rightarrow \infty$ la funzione F cresce infinitamente, mentre $\bar{f}(u)$ deve restare finita. Ne deduciamo la condizione $\bar{f}/F \rightarrow 0$ per $u \rightarrow \infty$ mediante la quale si ottiene la costante C ²⁾:

$$C = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2b} \left(\frac{u^4}{2} - u^2 \right) \right\} u du \right]^{-1}. \quad (45,13)$$

L'integrale si calcola con il metodo del punto di sella sviluppando l'esponente in prossimità del punto di massimo, $u = 1$. Si

¹⁾ In particolare, dall'analisi della parte angolare dell'equazione cinetica risulta che le direzioni dei moti degli elettroni in fuga giacciono nella regione degli angoli $\theta \sim b^{1/4}$.

²⁾ La formulazione delle condizioni al contorno è analoga qui alla formulazione del § 24.

ottiene così la seguente legge di dipendenza del numero di elettroni in fuga dall'intensità del campo E :

$$n_{\text{fug}} \sim N_e v_{ee} (v_{Te}) \exp \left(-\frac{E_c}{4E} \right). \quad (45,14)$$

Il fattore davanti all'esponente è scritto qui solo in forma dimensionale; un calcolo più preciso fuoriesce dall'approssimazione considerata e richiede sin dall'inizio che l'equazione cinetica sia risolta con una precisione più elevata.

§ 46. Integrale degli urti convergente

L'equazione cinetica con l'integrale degli urti di Landau consente di risolvere i problemi fisici del plasma soltanto con una precisione logaritmica, perché il grande argomento del logaritmo coulombiano non è definito completamente. Questa indeterminazione è dovuta alla divergenza degli integrali per grandi e piccoli angoli di diffusione. Come è stato già detto, la divergenza per grandi angoli non ha un carattere di principio, in quanto compare soltanto in seguito alla realizzazione dello sviluppo in potenze della quantità di moto trasmessa q . Nell'integrale degli urti di Boltzmann questa divergenza non esiste. Quanto alla divergenza per piccoli angoli, essa compare poiché si è trascurata l'azione schermante del plasma sulla diffusione reciproca delle sue particelle. Per calcolare l'integrale degli urti con una precisazione più elevata di quella logaritmica è necessario che sin dall'inizio la schermatura sia inclusa (e non soltanto nella definizione della regione d'integrazione nel logaritmo coulombiano).

È stato già detto al § 41 che le condizioni di applicabilità dell'integrale degli urti con un'interazione schermata tra le particelle cariche richiedono che la funzione di distribuzione vari poco durante un periodo di tempo $\sim a/\bar{v}_{\text{rel}}$ anche a distanze $\sim a$. Le stesse condizioni consentono di considerare la schermatura delle cariche in modo macroscopico, come risultato della polarizzazione dielettrica del plasma.

Studieremo il problema posto in due casi limite: 1) quando agli urti tra le particelle è applicabile l'approssimazione quantomeccanica di Born e 2) quando il processo degli urti è quasi-classico.

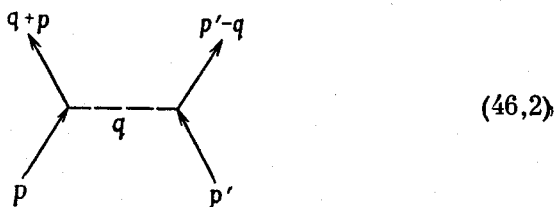
Caso di Born

Iniziamo dal primo caso che si verifica con la condizione

$$|ee'|/\hbar \bar{v}_{\text{rel}} \ll 1. \quad (46,1)$$

L'influenza esercitata dal mezzo dielettrico sulla diffusione delle particelle è formulata in modo molto più chiaro nel linguaggio della

tecnica dei diagrammi. Nell'approssimazione di Born la diffusione di due particelle è descritta (nel caso relativistico) dai diagrammi ¹⁾



dove alla retta tratteggiata corrisponde la funzione $4\pi/q^2$, ossia la componente di Fourier del potenziale coulombiano della carica unitaria (q è la quantità di moto che si trasmette per diffusione). La presenza di un mezzo incide soltanto sulla sostituzione di questa funzione con la componente del potenziale nel mezzo $4\pi/q_\alpha q_\beta \epsilon_{\alpha\beta}$, dove $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, q/\hbar)$ è il tensore della costante dielettrica del mezzo e, inoltre, $\hbar\omega$ coincide con l'energia trasmessa (si veda IX, § 85). Ciò premesso, anche nell'ampiezza di diffusione comparirà il fattore supplementare $q^2/q_\alpha q_\beta \epsilon_{\alpha\beta}$ e nella sezione il quadrato del suo modulo. Quindi,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Ruth}} \frac{q^4}{|\epsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta|^2}. \quad (46,3)$$

Per semplicità, supporremo in seguito isotropo il plasma. Per un tale plasma il tensore $\epsilon_{\alpha\beta}$ si riduce a due scalari (ϵ_l e ϵ_t) e, inoltre, nel prodotto

$$\epsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \epsilon_l q^2$$

figura soltanto uno di essi; ometteremo l'indice l intendendo con ϵ la costante dielettrica longitudinale.

In tal modo la sezione di diffusione assume la forma

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{|\epsilon(\omega, q/\hbar)|^2}, \quad (46,4)$$

dove $d\sigma_{\text{Ruth}}$ è la sezione ordinaria di Rutherford per la diffusione nel vuoto ²⁾. Notiamo anche che l'energia trasmessa per urti è legata alla trasmissione della quantità di moto dall'uguaglianza

$$\hbar\omega = qV, \quad (46,5)$$

¹⁾ Così come nel § 41, le lettere con e senza apice si riferiscono a due particelle collidenti (di medesima o diversa specie).

²⁾ Per la diffusione di particelle identiche (per angoli non piccoli) con $d\sigma_{\text{Ruth}}$ si deve intendere la sezione di diffusione coulombiana con inclusione di effetti di scambio (si veda III, § 137).

dove V è la velocità del centro d'inerzia delle particelle collidenti ¹⁾. Il valore del vettore q , invece, è legato all'angolo di diffusione χ nel sistema inerziale dalla formula ordinaria

$$q = 2\mu |v - v'| \sin \frac{\chi}{2}, \quad (46,6)$$

dove $\mu = mm'/(m + m')$.

L'integrale degli urti, che include automaticamente e correttamente gli angoli di diffusione grandi e piccoli ed è esente da divergenza, si ottiene mediante la sostituzione della (46,4) nell'integrale di Boltzmann ordinario

$$\text{St } f = \sum \int \{f(p+q) f'(p'-q) - f(p) f'(p')\} \frac{|v-v'| d\sigma_{\text{Ruth}}}{|\varepsilon(\omega, q/\hbar)|^2} d^3p' \quad (46,7)$$

(cfr. la (13,9)); la sommatoria è estesa a tutte le specie di particelle cui si riferiscono le grandezze con l'apice.

L'equazione cinetica con l'integrale degli urti (46,7) è molto complicata, non soltanto per l'impossibilità di sviluppare l'espressione integranda in potenze di q , ma anche perché la stessa costante dielettrica del plasma è definita attraverso le funzioni di distribuzioni cercate. Una semplificazione notevole si ottiene solo nel caso di una deviazione debole dall'equilibrio, in cui sia possibile la linearizzazione dell'equazione cinetica. Allora la costante dielettrica va calcolata assieme con le funzioni di distribuzione d'equilibrio e, quindi, diventa indipendente dalle funzioni di correzione cercate.

Caso quasi-classico

Passiamo al caso limite inverso in cui

$$|ee'|/\hbar v_{\text{rel}} \gg 1 \quad (46,8)$$

e sia applicabile l'approssimazione quasi-classica alla diffusione delle particelle. In questo caso è impossibile includere in modo unico l'influenza del mezzo sulla diffusione, per angoli di diffusione grandi e piccoli (come è stato possibile nel caso di Born). Perciò dobbiamo considerare separatamente queste due regioni e in seguito « cucire » i risultati per gli angoli intermedi.

Il campo di una carica e che si muove con velocità v in un mezzo dielettrico è definito mediante l'equazione

$$\text{div } D = 4\pi e\delta(r - vt).$$

¹⁾ È facile verificarlo esprimendo le velocità delle particelle v e v' in funzione di V e della velocità di moto relativo $v - v'$ e tenendo conto che V e $|v - v'|$ per diffusione non variano.

Di qui ricaviamo per il potenziale del campo nelle componenti di Fourier ¹⁾

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}. \quad (46,9)$$

Per piccoli angoli di diffusione la variazione delle quantità di moto della particella è data (si veda I, § 20) dalla formula classica

$$\mathbf{q} = - \int \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} dt, \quad (46,10)$$

dove U è l'energia di interazione di due particelle e l'integrazione è estesa alla traiettoria rettilinea $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}'t$ ($\boldsymbol{\rho}$ è il vettore della distanza d'impatto) ²⁾. Esprimendo l'energia $U = e'\varphi$ sotto forma dell'integrale di Fourier

$$U = 4\pi e e' \int \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}}{k^2 \varepsilon(\omega, k)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (46,11)$$

(dove $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$) e sostituendo nella (46,10) otteniamo

$$\mathbf{q} = -4\pi e e' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}}{k^2 \varepsilon(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')t} dt \right\}.$$

L'integrale interno dà $2\pi\delta(k_{\parallel})/|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$, dove k_{\parallel} è la proiezione del vettore \mathbf{k} sulla direzione $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Eliminando in seguito la funzione δ con l'integrazione rispetto a dk_{\parallel} , troviamo

$$\mathbf{q} = - \frac{4\pi e e'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \int \frac{\mathbf{k}_{\perp} e^{i\mathbf{k}_{\perp}\boldsymbol{\rho}}}{k_{\perp}^2 \varepsilon(\omega, k_{\perp})} \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2}, \quad (46,12)$$

dove \mathbf{k}_{\perp} (così come $\boldsymbol{\rho}$) è un vettore bidimensionale nel piano perpendicolare a $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Inoltre anche la frequenza

$$\omega = \mathbf{k}_{\perp}\mathbf{v} = \mathbf{k}_{\perp}\mathbf{V}. \quad (46,13)$$

Più avanti in questo paragrafo ometteremo l'indice \perp , intendendo ovunque con \mathbf{k} il vettore bidimensionale suindicato.

Calcoliamo ora mediante la formula (46,12) le grandezze

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_{\alpha} q_{\beta} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (46,14)$$

¹⁾ La deduzione della formula (46,9) parte dall'ipotesi che il legame tra \mathbf{D} e \mathbf{E} sia lineare e il campo sufficientemente piccolo. Questa condizione si verifica in ogni caso (in un gas debolmente non perfetto) a distanze $r \gg a$, dalle quali esattamente proviene la divergenza dell'integrale, per l'eliminazione della quale vogliamo ricorrere alla formula (46,9). A queste distanze corrispondono valori $k \ll 1/a$ per cui la costante dielettrica differisce notevolmente da 1.

²⁾ È indifferente come si calcola il valore di \mathbf{q} : quale variazione della quantità di moto di ciascuna delle particelle collidenti o quale variazione delle quantità di moto del loro moto relativo.

che figurano nell'integrale degli urti sviluppato in potenze di q piccolo (la sezione $d\sigma$ della (41,4) è scritta qui sotto forma dell'area d'impatto $d^2\rho$). Scrivendo il prodotto dei due integrali (46,12) in forma di un integrale doppio (rispetto a d^2k d^2k'), integriamo rispetto a $d^2\rho$ secondo la formula

$$\int e^{i\rho(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} d^2\rho = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

In seguito, l'integrazione rispetto a d^2k' elimina semplicemente la funzione δ e resta

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2e^2e'^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|} \int \frac{k_\alpha k_\beta d^2k}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{kV}, k)|^2} \quad (46,15)$$

(qui abbiamo tenuto conto che, in accordo con la (28,9), $\varepsilon(-\omega, k) = \varepsilon^*(\omega, k)$). Questi integrali convergono già per k piccoli (poiché $|\varepsilon|^{-2} \rightarrow 0$ per $\omega, k \rightarrow 0$)¹⁾.

Nella (46,15) figura la costante dielettrica per la frequenza non nulla $\omega = \mathbf{kV}$; tenendo conto di questa circostanza, talvolta si dice che questa formula include l'effetto di *schermatura dinamica*.

Notiamo la dipendenza dell'espressione integranda nella (46,15) dalla direzione \mathbf{V} , attraverso l'argomento \mathbf{kV} della funzione ε . Questa dipendenza scompare calcolando l'integrale in approssimazione logaritmica, quando l'integrazione si limita alla regione da $k \sim 1/a$ a $k \sim \mu\bar{v}^2/|ee'|$. Il ruolo principale nell'integrale appartiene ai valori k , lontani da entrambi questi limiti; in questa regione di valori abbiamo $|\varepsilon|^2 = 1$ e l'integrale diventa $\int k_\alpha k_\beta d^2k/k^4$. Calcolando la media dell'espressione integranda su tutte le direzioni di \mathbf{k} nel piano perpendicolare a $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$, riotteniamo la vecchia espressione (41,8) con $L = \int dk/k$.

Per eliminare la divergenza nei casi in cui sia grande la trasmissione della quantità di moto, è necessario, come è stato già detto, « cucire » l'integrale degli urti sviluppato in potenze di q con l'integrale non sviluppato (J. Hubbard, 1961; O. Aono, 1962).

Consideriamo la differenza

$$St_{cl} f - St_B f, \quad (46,16)$$

dove St_{cl} è l'integrale degli urti convergente cercato e St_B quello dato dall'espressione (46,7) che nel caso di Born rappresenta l'integrale degli urti corretto, ma che qui svolge un ruolo ausiliario.

¹⁾ L'eliminazione della divergenza nell'integrale degli urti di Landau, dovuta alla schermatura del campo coulombiano, appartiene a R. Balescu, 1960; A. Lenard, 1960. L'espressione (46,7) completamente convergente è stata scritta da A. A. Ruchadze e V. P. Silin (1961).

Dividiamo in due regioni tutto l'intervallo di variazione dell'angolo di diffusione

$$\text{I) } \chi < \chi_1, \quad \text{II) } \chi > \chi_1,$$

dove χ_1 è tale che

$$|ee'|/\mu a \bar{v}_{\text{rel}}^2 \ll \chi_1 \ll 1. \quad (46,17)$$

Per una diffusione classica di piccoli angoli in un campo coulombiano, l'angolo di diffusione χ è legato alla distanza d'impatto ρ dalla relazione

$$\rho = 2 |ee'|/\mu (v - v')^2 \chi.$$

Perciò al valore $\chi = \chi_1$ corrisponde (con la condizione (46,17)) il valore $\rho = \rho_1 \ll a$, in modo che a questa distanza la schermatura diventa inessenziale e si può considerare la diffusione effettivamente come coulombiana pura. Lo stesso si riferisce anche a tutta la regione $\rho < \rho_1$ (cioè $\chi > \chi_1$). La sezione di diffusione in questa regione sarà quindi quella di Rutherford e il contributo corrispondente all'integrale degli urti vale

$$\text{St}_{\text{cl}}^{\text{II}} f = \sum_{\chi > \chi_1} \int [f(p+q) f'(p'-q) - f(p) f'(p')] |v - v'| d\sigma_{\text{Ruth}} d^3 p'.$$

Ma è esattamente lo stesso il contributo della regione $\chi > \chi_1$ all'integrale (46,7): in questa regione $q > q_1$ e, inoltre, in virtù della condizione (46,8)

$$\frac{q_1}{\hbar} \sim \frac{\mu \bar{v}_{\text{rel}} \chi_1}{\hbar} \gg \frac{|ee'|}{\hbar v_{\text{rel}} a} \gg \frac{1}{a},$$

e perciò nella (46,7) si può porre $|\varepsilon|^2 = 1$. In tal modo, il contributo alla differenza (46,16) proviene unicamente dalla regione $\chi < \chi_1$ ($\rho > \rho_1$) che dobbiamo ora considerare.

In tutta questa regione la trasmissione della quantità di moto è piccola, in modo che si può sviluppare l'integrale degli urti in potenze di q . Le grandezze $B_{\alpha\beta}$ che figurano nell'integrale sviluppato St_{cl} si calcolano come gli integrali (46,14) con q preso dalla (46,12). Il contributo che proviene dalla regione $\rho > \rho_1$ vale in questi integrali

$$(B_{\alpha\beta})_{\text{cl}}^{\text{I}} = \frac{(ee')^2}{2\pi^2 |v - v'|} F_{\alpha\beta},$$

$$F_{\alpha\beta} = \int_{\rho_1}^{\infty} d^2 \rho \left(\int_0^{\infty} \frac{ik_{\alpha} e^{ik\rho}}{k^2 \varepsilon} d^2 k \int_0^{\infty} \frac{ik_{\beta} e^{ik\rho}}{k^2 \varepsilon} d^2 k \right), \quad (46,18)$$

dove come limiti negli integrali doppi (rispetto a $d^2\rho$ e d^2k) sono indicati convenzionalmente i limiti rispetto a ρ e k . Riscriviamo in modo identico le grandezze $F_{\alpha\beta}$ nella forma

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\beta} = & \int_0^\infty d^2\rho \left(\int_0^{q_1/\hbar} \dots d^2k \right)_\alpha \left(\int_0^{q_1/\hbar} \dots d^2k \right)_\beta - \\
 & - \int_0^{\rho_1} d^2\rho \left(\int_0^{q_1/\hbar} \dots d^2k \right)_\alpha \left(\int_0^{q_1/\hbar} \dots d^2k \right)_\beta + \\
 & + \int_{\rho_1}^\infty d^2\rho \left(\int_0^\infty \dots d^2k \right)_\alpha \left(\int_{q_1/\hbar}^\infty \dots d^2k \right)_\beta + \\
 & + \int_{\rho_1}^\infty d^2\rho \left(\int_{q_1/\hbar}^\infty \dots d^2k \right)_\alpha \left(\int_0^{q_1/\hbar} \dots d^2k \right)_\beta. \quad (46,19)
 \end{aligned}$$

Il primo termine nella (46,19), essendo stato trasformato come per la deduzione della (46,15), fornisce alla (46,18) il contributo

$$\frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \int_0^{q_1/\hbar} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 |\epsilon|^2} d^2k.$$

Questa espressione coincide precisamente con quella che si otterrebbe sviluppando l'integrale (46,7) esteso alla regione $\chi < \chi_1$ ¹⁾; di conseguenza, essa non dà un contributo alla differenza in esame (46,16).

Per la trasformazione degli altri termini nella (46,19) osserviamo che nelle loro espressioni integrande si può porre $\epsilon = 1$; in questo caso gli integrali restano convergenti e i loro valori sono definiti dalla regione $k \sim q_1/\hbar$ in cui $ka \gg 1$ e perciò $|\epsilon| \approx 1$. È importante anche che in virtù della condizione (46,8) il parametro

$$q_1 \rho_1 / \hbar = 2 |ee'| / \hbar v_{\text{rel}} \gg 1; \quad (46,20)$$

perciò bisogna conservare solo i termini che restano finiti per $q_1 \rho_1 / \hbar \rightarrow \infty$. In questo limite il terzo e il quarto termine nella (46,19) si

¹⁾ La sezione di diffusione di Rutherford per piccoli angoli, espressa in funzione di q , ha la forma

$$d\sigma_{\text{Ruth}} = \frac{4(ee')^2}{q^4 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} d^2q$$

(si è tenuto conto che $q \approx \mu |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \chi$, $do \approx d^2q / \mu^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2$).

annullano. Quindi, non resta altro che

$$(B_{\alpha\beta})_{cl}^I - (B_{\alpha\beta})_B^I = \\ = -\frac{(ee')^2}{2\pi^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \int_0^{\rho_1} d^2\rho \left(\int_0^{q_1/\hbar} ik_\alpha e^{ik\rho} \frac{d^2k}{k^2} \int_0^{q_1/\hbar} ik_\beta e^{ik\rho} \frac{d^2k}{k^2} \right), \quad (46,21)$$

dove gli indici « cl » e « B » indicano che i valori $B_{\alpha\beta}$ si riferiscono rispettivamente agli sviluppi degli integrali St_{cl} e St_B .

Ciascuno dei due integrali in d^2k è diretto lungo il vettore ρ ; dopo aver integrato lungo queste direzioni (nel piano perpendicolare a $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$) otteniamo per la differenza (46,21) un'espressione della forma (44,8) di segno opposto con

$$L = \int_0^{\rho_1} \rho d\rho \left[\frac{i}{2\pi} \int_0^{q_1/\hbar} \int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{ik\rho \cos \varphi} d\varphi dk \right]^2.$$

Usando la nota rappresentazione integrale della funzione di Bessel e l'uguaglianza $J'_0(x) = -J_1(x)$, riscriviamo questo integrale nella forma

$$L = \int_0^{\rho_1} \rho d\rho \left[\int_0^{q_1/\hbar} J_1(k\rho) dk \right]^2 = \int_0^{\rho_1 q_1/\hbar} [J_0(x) - 1]^2 \frac{dx}{x},$$

ossia dopo un'integrazione per parti

$$L = \ln \frac{q_1 \rho_1}{\hbar} + 2 \int_0^\infty J_1(x) [J_0(x) - 1] \ln x dx.$$

Qui abbiamo tenuto conto che il parametro $\rho_1 q_1/\hbar$ (non contenente più la grandezza ausiliaria χ_1) è grande; ciò premesso, il limite superiore nell'integrale restante è stato sostituito con l'infinito e nel primo termine si è posto $J_0(q_1 \rho_1/\hbar) \approx 0$. Mediante i valori

$$\int_0^\infty J_1(x) \ln x dx = -C + \ln 2,$$

$$\int_0^\infty J_0(x) J_1(x) \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln 2 - C)$$

(dove $C = 0,577\dots$ è la costante di Eulero; $\gamma = e^C = 1,78\dots$) e tenendo conto della (46,20) troviamo infine

$$L = \ln \frac{\gamma |ee'|}{\hbar |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}. \quad (46,22)$$

Dall'esito dei calcoli effettuati possiamo concludere che nel caso quasi-classico l'integrale degli urti privo di divergenze può essere rappresentato nella forma

$$St_{\text{el}}f = St_{\text{B}}f - St_{\text{L}}f, \quad (46,23)$$

dove St_{B} è dato dalla formula (46,7) e St_{L} è l'integrale degli urti di Landau con logaritmo coulombiano (46,22). Sottolineiamo che $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ in quest'ultimo è una grandezza variabile precisa e non il valore medio \bar{v}_{rel} .

In forza delle semplificazioni fatte nella deduzione, questo risultato è valido, ovviamente, soltanto con « precisione logaritmica migliorata »: l'equazione cinetica con l'integrale degli urti (46,23) permette di migliorare la precisione dei calcoli solo nel senso della definizione del coefficiente esatto nell'argomento del grande logaritmo (con questa precisione, ovviamente, da tutte le risposte scomparire \hbar , che funge nella (46,23) da parametro ausiliario).

PROBLEMI

1. Nel caso di Born calcolare con precisione logaritmica migliorata la parte immaginaria della costante dielettrica per un plasma con una carica ($z = 1$) e in equilibrio ($T_i = T_e$) per frequenze $\omega \gg v_{ei}$.

Soluzione. Calcolando ε'' per la condizione $\omega \gg v$ si devono includere solo gli urti *ei* (come è stato già precisato nel dedurre la (44,8)). Poiché l'integrale degli urti (46,7) differisce dall'integrale di Boltzmann ordinario solo per il fattore $|\varepsilon|^{-2}$ davanti a $d\sigma_{\text{Ruth}}$, il valore cercato ε'' si può calcolare mediante la stessa formula (44,8)

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi e^2 N_i N_e}{3T\omega^3} \langle v_i^2 \langle \sigma_i \rangle_i \rangle_e, \quad (1)$$

dove $\langle \dots \rangle_e$ o $\langle \dots \rangle_i$ indicano la media della velocità degli elettroni \mathbf{v}_e o degli ioni \mathbf{v}_i rispetto alla distribuzione d'equilibrio. A differenza dei calcoli realizzati al § 44, ora σ_i è definito come

$$\sigma_i = \int (1 - \cos \chi) \left| \varepsilon \left(\frac{q\mathbf{v}_i}{\hbar}, \frac{q}{\hbar} \right) \right|^{-2} d\sigma_{\text{Ruth}}, \quad (2)$$

ed è necessario calcolare il valore medio di σ_i rispetto alle velocità degli ioni (che, ovviamente, qui non si possono trascurare); nell'argomento $\omega = qV/\hbar$ della funzione ε la velocità del centro d'inerzia dell'elettrone e dello ione è sostituita approssimativamente dalla velocità dello ione. La sezione di Rutherford si scrive nella forma

$$d\sigma_{\text{Ruth}} = \frac{(ze^2)^2 m^2}{4p_e^4} \frac{2\pi \sin \chi d\chi}{\sin^4(\chi/2)} = \frac{8\pi (ze^2)^2 m^2}{p_e^2 q^3} dq, \quad (3)$$

dove

$$q = 2p_e \sin \frac{\chi}{2}, \quad 1 - \cos \chi = \frac{q^2}{2p_e^2}, \quad 0 \leq q \leq 2p_e$$

($p_e = mv_e$ è la quantità di moto dell'elettrone).

La funzione $\varepsilon(\omega, q/\hbar) - 1$ è definita mediante la formula (31,11) e consta delle parti elettronica e ionica. Poiché il suo argomento nella (2) è $\hbar\omega =$

$= qv_i \ll qv_e$, si può calcolare la parte elettronica per $\omega = 0$; allora

$$\varepsilon \left(\frac{qv_i}{\hbar}, \frac{q}{\hbar} \right) - 1 = \frac{\hbar^2}{q^2 a_e^2} \left\{ 2 + F \left(\frac{v_{iq}}{\sqrt{2} v_{Ti}} \right) \right\} \quad (4)$$

v_{iq} è la proiezione di v_i su q ; si è tenuto conto che per $z = 1$ si ha $a_i = a_e$.

Ponendo le (3) e (4) nella (2) ed eseguendo delle trasformazioni evidenti delle variabili, otteniamo

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{2 \sqrt{\pi} e^4}{p_e^4} \int_0^{\frac{4 p_e^2 a_e^2}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-\zeta^2} d\zeta}{[\zeta + 2 + F'(\xi)]^2 + [F''(\xi)]^2}$$

($F = F' + iF''$). L'integrazione rispetto a $d\zeta$ è elementare e sostituendo i limiti si deve tener conto che $\hbar^2/p_e^2 a_e^2 \ll 1$ ed omettere tutti i termini $\sim \hbar^2/p_e^2 a_e^2$ e di ordine superiore. Come risultato otteniamo

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{4\pi e^4}{m^2 v_e^4} \left[\ln \frac{2mv_e a_e}{\hbar} + A \right], \quad (5)$$

dove

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \left\{ \frac{2+F'}{F''} \left[\arctg \frac{2+F'}{F''} - \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{2} \ln [(2+F')^2 + F''^2] \right\} d\xi$$

(si è tenuto conto che $F'(\xi)$ è una funzione pari e $F''(\xi)$ dispari di ξ); il calcolo numerico dà $A = -0,69$.

La media nell'espressione (1) si calcola mediante le formule

$$\langle v^{-1} \rangle = \left(\frac{2m}{\pi T} \right)^{1/2}, \quad \left\langle \frac{\ln v}{v} \right\rangle = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \left[\ln \frac{2T}{m} - C \right]$$

(C è la costante di Eulero). Troviamo infine

$$\varepsilon'' = \frac{4 \sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^4 N_e}{T^{3/2} m^{1/2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega^3} L_B, \quad L_B = \ln \frac{\alpha_B (mT)^{1/2} a_e}{\hbar},$$

$$\ln \alpha_B = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{C}{2} + A = \ln 1,06 \quad (6)$$

(V. I. Perel, G. M. Eliasberg, 1961).

2. Risolvere il problema 1 nel caso quasi-classico.

Soluzione. Secondo la (46,23), le espressioni per σ_i nel caso quasi-classico si ottengono sottraendo $\ln(\gamma e^2/\hbar v)$ dal logaritmo nella (5):

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{2\pi e^4}{m^2 v_e^4} \left[\ln \frac{2mv_e^2 a_e}{\gamma e^2} + A \right]. \quad (7)$$

Per ε'' si ottiene la formula (6) con il logaritmo

$$L_{cl} = \ln \frac{T a_e \alpha_{cl}}{e^2}, \quad \ln \alpha_{cl} = 2 \ln 2 - 2C + A = \ln 0,63 \quad (8)$$

al posto di L_B .

3. Determinare con precisione logaritmica migliorata la velocità di trasmissione dell'energia dagli elettroni agli ioni in un plasma con una carica ($z = 1$),

supponendo piccola la differenza tra le temperature degli elettroni e degli ioni ($\delta T = T_e - T_i \ll T_e$)¹⁾.

Soluzione. Essendo piccolo il rapporto m/M (e per di più piccola la trasmissione dell'energia in ogni atto), è chiaro a priori che l'equazione per la funzione di distribuzione degli elettroni si riduce a un'equazione del tipo di Fokker-Planck e ha la forma (si veda il § 21)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{p_e^2} \frac{\partial}{\partial p_e} \left\{ p_e^2 B(p_e) \left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e} + \frac{v_e}{T_i} f_e \right] \right\}.$$

Moltiplichiamo questa equazione per $p_e^2/2m$ e integriamo rispetto a $4\pi p_e^2 dp_e$. Dopo un'integrazione per parti otteniamo la seguente espressione per la velocità di trasmissione dell'energia degli elettroni:

$$\frac{dE_e}{dt} = - \int B v_e \left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e} + \frac{v_e}{T_i} f_e \right] d^3 p_e.$$

Supponendo che la funzione di distribuzione degli elettroni sia maxwelliana e la differenza delle temperature piccola, troviamo

$$\frac{dE_e}{dt} = \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \int B v_e^2 f_e d^3 p_e \approx - \frac{\delta T}{T^2} N_e \langle B v_e^2 \rangle_e. \quad (9)$$

Il coefficiente B , così come nella (21,11), si esprime mediante la media quadratica della variazione della quantità di moto di un elettrone per urto con uno ione:

$$B = \frac{\sum (\Delta p_e)^2}{2\delta t} = \frac{1}{2} N_i v_e \int \langle (\Delta p_e)^2 \rangle_i d\sigma. \quad (10)$$

La grandezza Δp_e , invece, si ricava dall'uguaglianza (46,5):

$$\Delta p_e \approx - \frac{\mathbf{V} \mathbf{q}}{v_e} \approx - \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{q}}{v_e} \equiv \frac{v_{iq} \mathbf{q}}{v_e}.$$

Ponendola nella (10) e in seguito nella (9) e utilizzando il legame tra q e l'angolo di diffusione χ del problema 1, troviamo

$$\frac{dE_e}{dt} = - \frac{\delta T}{T^2} N m^2 \langle v_e^2 \langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i \rangle_e \quad (N_i = N_e \equiv N). \quad (11)$$

La formula (11) è completamente analoga alla formula (1) del problema 1 e perciò i calcoli ulteriori sono praticamente identici. Nel caso di Born abbiamo

$$\langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i = \frac{4\pi e^4 T}{m^2 M v_e^4} \left[\ln \frac{2m v_e a_e}{\hbar} + A_1 \right],$$

dove A_1 è un integrale che differisce da quello A del problema 1 per il fattore supplementare $2\xi^2$ sotto il segno di integrale (il calcolo numerico dà $A_1 = -0,52$). La media rispetto alle velocità degli elettroni si calcola come nel problema 1. Abbiamo infine

$$\frac{dE_e}{dt} = - \frac{4 \sqrt{2\pi m} N^2 e^2}{M T^{3/2}} L_B \delta T, \quad L_B = \ln(\beta_B (mT)^{1/2} a_e / \hbar), \quad (12)$$

dove

$$\ln \beta_B = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{C}{2} + A_1 = \ln 1,26.$$

¹⁾ Questo problema è stato trattato da R. R. Ramazašvili, A. A. Ruchadze e V. P. Silin (1962).

Analogamente, nel caso quasi-classico otteniamo una formula del tipo (12) con la sostituzione di L_B con

$$L_{c1} = \ln(Ta_e \beta_{c1}/e^2), \quad \ln \beta_{c1} = 2 \ln 2 - 2C + A_1 = \ln 0,75. \quad (13)$$

Le formule (12)-(13) precisano i risultati del § 42 e determinano (per il caso di una piccola differenza di temperature) il fattore numerico sotto il segno di logaritmo nella (42,6).

§ 47. Interazione attraverso onde di plasma

In alcuni casi l'inclusione della schermatura dinamica dell'interazione coulombiana delle particelle nel plasma conduce non soltanto alla precisione dell'argomento del logaritmo coulombiano, ma anche ad effetti qualitativamente nuovi. Per il loro studio rappresentiamo l'integrale degli urti nella forma che calcola esattamente il contributo della diffusione per piccoli angoli e tiene conto con precisione solo logaritmica del contributo proveniente dalla diffusione per grandi angoli.

Nel caso quasi-classico i grandi angoli di diffusione ($\chi \sim 1$) provengono da distanze d'impatto piccole:

$$\rho \lesssim |ee'| / |\bar{\mu} v_{rel}^2|.$$

L'integrale degli urti cercato ha la forma dell'integrale di Landau contenente le grandezze $B_{\alpha\beta}$ dalla (46,15):

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \int \frac{k_\alpha k_\beta d^2k}{k^3 |e(\mathbf{kV}, \mathbf{k})|^2}, \quad (47,1)$$

dove si integra sulla regione fino a

$$k_{\max} \sim |\bar{\mu} v_{rel}^2| / |ee'|. \quad (47,2)$$

Nel caso inverso di Born la forma cercata dell'integrale degli urti si ottiene sviluppando l'espressione integranda nella (46,7) in potenze di q . Come risultato riotteniamo l'integrale di Landau con le grandezze $B_{\alpha\beta}$ date dalla stessa formula (47,1) con la sola differenza che ora

$$k_{\max} \sim \bar{\mu} v_{rel}^2 / \hbar \quad (47,3)$$

(il valore $k = q/\hbar$ si ha per trasmissione della quantità di moto $q \sim \bar{\mu} v_{rel}$). Ricordiamo di nuovo che il significato fisico del taglio su grandi valori k è identico nel caso classico e in quello di Born, cioè il taglio si effettua sugli angoli di diffusione $\chi \sim 1$; il legame diverso tra k e χ in questi casi conduce, tuttavia, ad espressioni distinte per k_{\max} .

L'integrale degli urti di Landau con le grandezze $B_{\alpha\beta}$ prese dalla (47,1) si chiama *integrale di Balescu-Lenard*¹⁾. Riscriviamo la

¹⁾ La deduzione formale di questo integrale verrà data alla fine del § 51.

formula (47,1) nella forma seguente più comoda per le considerazioni ulteriori:

$$B_{\alpha\beta} = 2(ee')^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{k \leq k_{\max}} \delta(\omega - kv) \delta(\omega - kv') \frac{k_{\alpha} k_{\beta} d^3k d\omega}{k^4 |\varepsilon(\omega, k)|^2}, \quad (47,4)$$

dove ora l'integrazione è estesa ai vettori \mathbf{k} tridimensionali (invece che bidimensionali). Le due funzioni δ nell'espressione integranda garantiscono l'uguaglianza $\mathbf{kv} = \mathbf{kv}'$, cioè la trasversalità di \mathbf{k} rispetto a $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. L'integrazione rispetto a $d\omega$, invece, sostituisce l'argomento ω nella funzione $\varepsilon(\omega, k)$ con il valore richiesto $\omega = \mathbf{kv} = \mathbf{kv}' = kv$.

Sottolineiamo che il fattore $|\varepsilon(\omega, k)|^{-2}$ nell'espressione integranda della (47,4) diventa infinito per gli stessi valori $\omega = \mathbf{kv}$ e \mathbf{k} per cui $\varepsilon(\omega, k) = 0$, cioè per i valori corrispondenti alla legge di dispersione delle onde di plasma longitudinali. Questi valori \mathbf{k} possono fornire un grande contributo all'integrale degli urti. Fisicamente si può descrivere questo contributo come risultato dell'integrazione tra le particelle realizzata mediante l'emissione e l'assorbimento da parte loro delle onde di plasma. L'effetto, tuttavia, sarà notevole solo nel caso in cui il plasma abbia un numero di particelle sufficientemente grande, con velocità comparabili con la velocità di fase delle onde, $v_{\text{fase}} = \omega/k$, o maggiori (soltanto per queste particelle può essere soddisfatta la relazione richiesta $\omega = \mathbf{kv}$).

Consideriamo un plasma in cui elettroni e ioni hanno le loro temperature T_e e T_i . Per $T_e \approx T_i$ nel plasma si possono propagare (senza smorzamento considerevole) solo le onde di plasma elettroniche, la cui velocità di fase $v_{\text{fase}} \gg v_{Te}$; il numero di elettroni capaci di « scambiarsi » onde in questo caso è, quindi, esponenzialmente piccolo.

Se, invece, $T_e \gg T_i$, nel plasma si possono propagare anche le onde ionico-acustiche, la cui velocità di fase verifica le disuguaglianze

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \quad (47,5)$$

Queste onde possono fornire un contributo notevole all'integrale degli urti tra elettroni (V. P. Silin, 1962).

Separiamo dalle grandezze elettrone-elettrone $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ la parte legata a questo effetto e indichiamola con $B_{\alpha\beta}^{(pi)}$. Essa proviene dalla regione d'integrazione nella (47,4) giacente nell'intorno della radice dell'equazione $\varepsilon(\omega, k) = 0$, corrispondente alla legge di dispersione delle onde ionico-acustiche. Questa radice $\omega(k)$ è di per sé complessa, con una piccola parte immaginaria (coefficiente di smorzamento delle onde); quando ω assume valori reali nella regione d'integrazione la parte reale della funzione $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ passa

per lo zero mentre la parte immaginaria resta piccola. Partendo dalla formula (30,9), rappresentiamo il fattore $|\varepsilon|^{-2}$ nell'espressione integranda della (47,4) nella forma

$$\frac{1}{|\varepsilon|^2} = \frac{2}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = \frac{\pi}{|\varepsilon''|} \delta(\varepsilon').$$

Per l'integrale degli urti elettrone-elettrone le velocità \mathbf{v} e \mathbf{v}' nella (47,4) si riferiscono agli elettroni, e in virtù della disuguaglianza $\omega \ll kv_{Te}$ negli argomenti di ambedue le funzioni δ si possono omettere i termini ω . In tal modo la parte $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ considerata diventa

$$B_{\alpha\beta}^{(pl)} = 2\pi e^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}') \delta(\varepsilon') \frac{k_\alpha k_\beta d^3k d\omega}{k^4 |\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})|}, \quad (47,6)$$

dove l'integrazione rispetto a d^3k è estesa (per ω dato) alla regione (47,5).

Trasformiamo l'integrale rispetto a d^3k nelle nuove variabili

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{n}, \quad k_1 = \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad k_2 = \mathbf{k}\mathbf{v}',$$

dove \mathbf{n} è il versore della direzione $[\mathbf{v}\mathbf{v}']$. Calcolando direttamente lo jacobiano della trasformazione troviamo che d^3k va sostituito con

$$\frac{d\mathbf{x} dk_1 dk_2}{|\mathbf{v}\mathbf{v}'|}.$$

L'integrazione in $dk_1 dk_2$ elimina le funzioni δ (in virtù delle quali $k_1 = k_2 = 0$) e si ottiene quindi $\mathbf{k} = \mathbf{x}\mathbf{n}$. La variabile \mathbf{x} assume sia valori positivi che negativi; convenendo di integrare solo rispetto ai valori positivi scriviamo

$$B_{\alpha\beta}^{(pl)} = \frac{2\pi e^4 n_\alpha n_\beta}{|\mathbf{v}\mathbf{v}'|} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\delta[\varepsilon'(\omega, \mathbf{x})]}{\mathbf{x}^2 |\varepsilon''(\omega, \mathbf{x})|} d\omega d\mathbf{x}. \quad (47,7)$$

La costante dielettrica di un plasma a doppia temperatura nella regione delle onde ionico-acustiche (47,5) è data dalle formule ¹⁾

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 a_s^2}, \\ \varepsilon'' &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k^3} \left\{ \frac{\Omega_e^2}{v_{Te}^2} + \frac{\Omega_i^2}{v_{Ti}^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (47,8)$$

Il contributo principale all'integrale in $d\mathbf{x}$ nella (47,7) proviene (come verrà confermato dai calcoli successivi) dalla regione $a_s \mathbf{x} \gg 1$; perciò si può trascurare l'ultimo termine in $\varepsilon'(\omega, \mathbf{x})$. Osservando

¹⁾ Si veda la formula (33,3). Nella (47,8) in ε'' è incluso anche il contributo ionico. Benché questo contributo sia esponenzialmente piccolo nella regione (47,5), esso definisce la regione d'integrazione nell'integrale (47,9) più avanti.

che

$$\delta \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \right) = \frac{\Omega_i}{2} [\delta(\omega - \Omega_i) + \delta(\omega + \Omega_i)]$$

e integrando nella (47,7) rispetto a $d\omega$, troviamo

$$B_{\alpha\beta}^{(pl)} = n_\alpha n_\beta \frac{4\pi e^4 \Omega_i}{|[\mathbf{v}\mathbf{v}']|} \int \frac{d\kappa}{\kappa^2 \varepsilon''(\Omega_i, \kappa)},$$

oppure, sostituendo l'espressione per ε'' e introducendo la variabile $\xi = \kappa^2 a_i^2$,

$$B_{\alpha\beta}^{(pl)} = n_\alpha n_\beta \frac{2 \sqrt{2\pi} e^4 v_T e a_e^2}{|[\mathbf{v}\mathbf{v}']| a_i^2} \int \frac{d\xi}{1 + \exp(-1/2\xi + L_1/2)}, \quad (47,9)$$

dove

$$L_1 = \ln \frac{\Omega_i^4 v_T^6}{\Omega_e^4 v_{Ti}^6} = \ln \frac{z^2 M T_e^2}{m T_i^3}. \quad (47,10)$$

In virtù delle condizioni (47,5) l'integrazione nella (47,9) va estesa alla regione $(\Omega_i a_i / \Omega_e a_e)^2 \ll \xi \ll 1$. Poiché l'integrale è convergente per ξ piccoli si può porre uguale a zero il limite inferiore.

Per $L_1 \rightarrow \infty$ l'integrale nella (47,9) tende a zero; supponendo L_1 sufficientemente grande, calcoliamo questo valore nell'approssimazione logaritmica, limitandoci cioè al primo termine dello sviluppo in $1/L_1$. Il contributo fondamentale all'integrale proviene dalla regione in cui si può trascurare il termine esponenziale al denominatore. A questo fine deve essere $-1/2\xi + L_1/2 > 1$, cioè si deve calcolare l'integrale nei limiti da 0 a $1/(L_1 - 1) \approx 1/L_1$, il che dà semplicemente $1/L_1$. In tal modo otteniamo infine

$$B_{\alpha\beta}^{(pl)} = n_\alpha n_\beta \frac{2 \sqrt{2\pi} e^4 v_T e T_e}{|[\mathbf{v}\mathbf{v}']| T_i L_1}. \quad (47,11)$$

Il valore completo delle grandezze $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ nell'integrale degli urti elettrone-elettrone si ottiene sommando la (47,11) all'espressione coulombiana ordinaria (41,8), dove nell'argomento del logaritmo coulombiano L il raggio di Debye vale

$$a = (a_e^{-2} + a_i^{-2})^{-1/2} \approx a_i.$$

Il contributo delle onde di plasma (47,11) diventa prevalente per

$$z T_e / T_i L L_1 \gg 1. \quad (47,12)$$

¹⁾ Nella regione fondamentale per l'integrale $\xi \sim 1/L_1$, cioè $\kappa \sim 1/a_i L_1^{1/2}$. In questo caso

$$\kappa a_e \sim a_e / a_i L_1^{1/2} \sim (T_e / T_i L_1)^{1/2} \gg 1$$

in accordo con l'ipotesi suindicata.

§ 48. Assorbimento nel plasma nel limite delle alte frequenze

La regione di frequenze in cui è valida la formula (44,9) per la parte immaginaria della costante dielettrica del plasma è limitata dalle disuguaglianze $\Omega_e \gg \omega \gg v_{ei}$; la prima disuguaglianza rappresenta la condizione generale di applicabilità dell'integrale degli urti con interazione coulombiana schermata. Consideriamo ora il caso limite inverso rispetto all'ultima condizione, in cui

$$\omega \gg \Omega_e. \quad (48,1)$$

È da notare immediatamente che in questo caso la parte reale ϵ' della costante dielettrica è vicina a priori a 1 e la parte immaginaria ϵ'' è piccola.

La dissipazione dell'energia del campo variabile esterno è dovuta agli urti ei , la cui durata è dell'ordine del periodo del campo o inferiore. Ciò vuol dire che per $\omega \gg \Omega_e$ saranno importanti gli urti che si verificano a distanze $\sim v_{Te}/\omega \ll v_{Te}/\Omega_e = a_e$. A queste distanze il campo coulombiano degli ioni non è più schermato e, di conseguenza, gli urti acquistano il carattere di urto tra due particelle (e non tra più particelle, quali sono di fatto gli urti con interazione schermata). In queste condizioni gli atti microscopici di assorbimento dell'energia diventano processi inversi alla radiazione di ritardo negli urti a coppie di particelle cariche. Questa circostanza consente di esprimere ϵ'' mediante il principio dell'equilibrio dettagliato in funzione della sezione della radiazione di ritardo (V. L. Ginzburg, 1949).

La dissipazione Q dell'energia del campo elettromagnetico nell'unità di volume del mezzo per unità di tempo si esprime in funzione di ϵ'' mediante la formula (30,4). Per legare questa grandezza alla sezione della radiazione di ritardo, supponiamo che il campo sia creato da un'onda piana monocromatica, in cui la densità dell'energia vale

$$\mathcal{E} = \frac{\overline{E^2} + \overline{H^2}}{8\pi} = \frac{|E|^2}{8\pi}$$

(nell'ultima espressione si è supposto che E sia espresso in forma complessa; si veda la nota a pag. 157); essendo prossima a 1 la costante dielettrica, poniamo qui $\epsilon = 1$. In seguito si può scrivere la formula (30,4) come segue:

$$Q = \omega \epsilon'' \mathcal{E}. \quad (48,2)$$

D'altra parte, la dissipazione è uguale alla differenza tra l'energia Q_{ass} assorbita negli urti tra elettroni e ioni e l'energia irradiata in seguito a questi urti. Inoltre si tiene conto proprio dell'energia Q_{for} della radiazione forzata (e non spontanea) che implica la comparsa di fotoni coerenti con il campo iniziale e in questo senso da esso indistinguibili.

Scriviamo la sezione dell'emissione spontanea di un fotone, cioè della radiazione di ritardo ordinaria, nella forma

$$d\sigma_{sp} = \frac{w(\mathbf{p}', \mathbf{p})}{v} \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3p'. \quad (48,3)$$

Qui \mathbf{k} è il vettore d'onda del fotone, \mathbf{p} e \mathbf{p}' sono le quantità di moto dell'elettrone iniziale e finale. Il prodotto $N_i v d\sigma_{sp}$ (dove N_i è la densità ionica) è la probabilità di emissione di un fotone da parte di un elettrone nell'unità di tempo; la funzione $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ dipende anche dalla polarizzazione del fotone emesso. Integrando nelle direzioni \mathbf{p}' e \mathbf{k} e sommando sulle polarizzazioni del fotone, otteniamo la sezione differenziale (rispetto alle frequenze) della radiazione di ritardo $d\sigma_\omega$; la funzione δ nella (48,3) si elimina integrando rispetto a $\varepsilon' = p'^2/2m$. In tal modo,

$$d\sigma_\omega = \frac{4m^2 v'}{\pi v c^3} \bar{w} \omega^2 d\omega,$$

dove $\bar{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ è il valore medio della funzione $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ calcolato nelle direzioni \mathbf{p} e \mathbf{p}' ; questo valore non dipende più dalla polarizzazione del fotone e perciò la sommatoria rispetto ad esse si riduce alla moltiplicazione per 2. Introducendo la « radiazione efficace » κ_ω secondo la definizione

$$\hbar\omega d\sigma_\omega = \kappa_\omega d\omega,$$

esprimiamo di qui \bar{w} nella forma

$$\bar{w} = \frac{\pi v c^3}{4m^2 v' \hbar \omega^3} \kappa_\omega. \quad (48,4)$$

La sezione della radiazione forzata differisce dalla (48,3) solo per il fattore N_{ke} , ossia per il numero di fotoni nello stato quantistico con il vettore d'onda \mathbf{k} e la direzione della polarizzazione e lungo \mathbf{E} (si veda IV, § 44). Perciò l'energia totale della radiazione forzata è

$$Q_{for} = N_i \sum_e \int N_{ke} \hbar\omega w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3p d^3p',$$

dove $f(\mathbf{p})$ è la funzione di distribuzione degli elettroni. Più avanti supporremo questa funzione maxwelliana dipendente solo dal modulo p . Calcolando la media lungo le direzioni \mathbf{p} e \mathbf{p}' e osservando che in virtù della monocromaticità del campo

$$\sum_e \int N_{ke} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega},$$

riscriviamo Q_{for} nella forma

$$Q_{for} = N_i \mathcal{E} \int \bar{w} f(p) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) d^3p d^3p'. \quad (48,5)$$

Si calcola analogamente l'energia assorbita per transizioni inverse con la variazione della quantità di moto $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ (diffusione anelastica dell'elettrone nel campo elettromagnetico). In questo caso, in accordo con il principio dell'equilibrio dettagliato, le funzioni di probabilità w , che definiscono le sezioni dei processi diretto e inverso, sono uguali. Perciò per Q_{ass} si ottiene un'espressione che differisce dalla (48,5) solo per la sostituzione della funzione di distribuzione $f(p)$ con $f(p')$. La dissipazione è $Q = Q_{\text{ass}} - Q_{\text{for}}$; confrontando questa espressione con la (48,2) otteniamo

$$\varepsilon'' = \frac{N_i}{\omega} \int \bar{w} [f(p') - f(p)] \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) d^3p d^3p'. \quad (48,6)$$

Limitiamoci alle frequenze per cui

$$\hbar\omega \ll T. \quad (48,7)$$

Allora la differenza $p' - p$ è piccola e si può porre

$$f(p') - f(p) = -\frac{df}{dp} \hbar\omega = -\frac{\hbar\omega}{T} f(p),$$

e negli altri fattori $p = p'$. Ponendo ciò nella (48,6) ed esprimendo \bar{w} in funzione di κ_ω secondo la (48,4), troviamo infine la seguente espressione per la parte immaginaria della costante dielettrica:

$$\varepsilon''(\omega) = N_i N_e \frac{\pi^2 c^3}{T \omega^3} \langle \nu \kappa_\omega \rangle, \quad (48,8)$$

dove le parentesi angolari indicano il valore medio secondo la distribuzione maxwelliana degli elettroni.

Applichiamo questa formula ai due casi limite: quasi-classico e di Born. Nel primo caso, cioè per

$$ze^2/\hbar v \gg 1, \quad (48,9)$$

limitiamo ancora la regione delle frequenze $\omega \gg \Omega_e$ a un intervallo più ristretto

$$mv_{Te}^3/ze^2 \gg \omega \gg \Omega_e \quad (48,10)$$

(a primo membro figura una grandezza inversa del tempo necessario all'elettrone per arrivare a una distanza dallo ione tale che l'angolo di diffusione diventi ~ 1); si vede facilmente che dalle condizioni (48,9-10) deriva automaticamente la (48,7). Nel caso quasi-classico la radiazione efficace alle frequenze (48,10) per l'urto di un elettrone con uno ione fisso è data dalla formula

$$\kappa_\omega = \frac{16z^2 e^6}{3v^2 c^3 m^2} \ln \frac{2mv^3}{\gamma \omega z e^2}, \quad (48,11)$$

dove $\gamma = e^C = 1,78 \dots$, C è la costante di Eulero (si veda II, (70,21)). Sostituendo questo valore nella (48,8) e calcolando la media

otteniamo ¹⁾

$$\varepsilon'' = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{T^{3/2} m^{1/2}}} \frac{ze^4 N_e}{\omega^3} \ln \frac{2^{5/2} T^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega z e^2 m^{1/2}}. \quad (48,12)$$

Nel caso di Born, cioè per $ze^2/\hbar v \ll 1$, la radiazione efficace alle frequenze $\hbar\omega \ll T$ è data dalla formula ²⁾

$$\kappa_\omega = \frac{16z^2 e^6}{3v^2 c^3 m^2} \ln \frac{2mv^2}{\hbar\omega}. \quad (48,13)$$

Il calcolo in base alla (48,8) conduce all'espressione

$$\varepsilon'' = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m^{1/2} T^{3/2}}} \frac{ze^4 N_e}{\omega^3} \ln \frac{4T}{\gamma \hbar\omega}, \quad (48,14)$$

che differisce dalla (44,9) solo per l'argomento del logaritmo.

§ 49. Teoria quasi-lineare dello smorzamento di Landau

La teoria delle oscillazioni del plasma esposta ai §§ 29-32 è basata sulla soluzione dell'equazione cinetica nell'approssimazione lineare della teoria delle perturbazioni. La condizione di applicabilità è che le correzioni alla distribuzione δf (29,2) siano piccole rispetto alla funzione imperturbata f_0 :

$$\left| \frac{eE}{k v - \omega} \right| \frac{\partial f_0}{\partial p} \ll f_0. \quad (49,1)$$

Per le oscillazioni del plasma che si smorzano debolmente con frequenza $\approx \Omega_e$ e vettore d'onda $k \ll \Omega_e/v_{Te}$ è necessario, quindi, che sia

$$\frac{eE}{\Omega_e} \frac{\partial f_0}{\partial p} \ll f_0.$$

Per un plasma maxwelliano si può scrivere questa condizione (dopo l'elevazione al quadrato di ambedue i suoi membri) come segue:

$$E^2/4\pi \ll N_e T_e. \quad (49,2)$$

In questa forma la condizione ha un significato fisico semplice: la densità dell'energia del campo ondulatorio deve essere notevolmente inferiore alla densità dell'energia cinetica degli elettroni nel plasma.

¹⁾ In questo caso si usa il valore dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -C.$$

²⁾ Si veda IV, (92,16). Passando da questa formula alla (48,14) si è tenuto anche conto che per $\hbar\omega \ll T = mv_{Te}^2$ l'elettrone perde per irraggiamento soltanto una piccola parte della sua energia.

La condizione (49,2) garantisce che sia piccola la correzione δf per la massa fondamentale di elettroni. Ma anche se essa è soddisfatta esiste un numero relativamente piccolo di particelle per le quali la condizione (49,4) può essere violata; tali sono le particelle che si muovono quasi in fase con l'onda ($\mathbf{k}\mathbf{v} \approx \omega$) e quindi partecipano allo smorzamento di Landau (particelle di *risonanza*); persino un campo debole può cambiarne notevolmente la funzione di distribuzione. Questa variazione sarà un effetto non lineare e perciò il suo carattere dipenderà sostanzialmente dalla composizione spettrale (rispetto a ω e a \mathbf{k}) del campo ondulatorio; il fatto è che soltanto nell'approssimazione lineare le diverse componenti di Fourier del campo sono indipendenti nella loro azione sulle particelle.

Considereremo qui le perturbazioni elettromagnetiche nel plasma come un insieme di onde di plasma, con vettori d'onda che assumono una serie continua di valori in un certo intervallo $\Delta \mathbf{k}$.

Se la perturbazione iniziale contiene un largo spettro di vettori d'onda $k \sim \Omega_e/v_{Te}$, lo smorzamento di Landau si estende a un grande numero di elettroni che si trovano (nel senso dell'azione del campo) nelle stesse condizioni. Come risultato la distorsione della funzione di distribuzione sarà relativamente piccola per tutte le velocità; la teoria lineare (per l'ipotesi (49,2)) sarà, di conseguenza, applicabile a tutto l'andamento dell'evoluzione della perturbazione.

Contrariamente, se la perturbazione contiene vettori d'onda solo nell'intervallo ristretto $\Delta \mathbf{k}$, intorno a un certo valore k_0 per il quale $k_0 \ll \Omega_e/v_{Te}$, allora l'intervallo di risonanza delle velocità degli elettroni

$$|\Delta v| \sim \Delta \frac{\Omega_e}{k} \sim \frac{v_0}{k_0} |\Delta k|, \quad v_0 = \frac{\Omega_e}{k_0} \frac{k_0}{k_0} \quad (49,3)$$

è anch'esso piccolo posto intorno al valore $v_0 \gg v_{Te}$. Quindi, allo smorzamento di Landau parteciperà un numero di elettroni relativamente piccolo e la loro funzione di distribuzione può perciò fortemente distorcersi.

Diamo la teoria quantitativa di questo fenomeno per il caso in cui la perturbazione sia un'onda quasi monocromatica, la cui ampiezza e fase sono modulate nello spazio secondo una legge statistica. Lo spettro dei valori \mathbf{k} della perturbazione iniziale è ristretto

$$|\Delta \mathbf{k}|/k_0 \ll 1, \quad (49,4)$$

ma al tempo stesso

$$\frac{|\Delta \mathbf{k}|}{k} \gg \frac{1}{v_0} \left(\frac{e |\varphi_0|}{m} \right)^{1/2}, \quad (49,5)$$

dove φ_0 è l'ordine di grandezza dell'ampiezza del potenziale del campo elettrico delle onde (il significato di questa condizione verrà precisato più avanti); notiamo che in virtù della (49,2) (dove $E \sim$

$\sim k\varphi_0$) l'espressione a secondo membro della disuguaglianza (49,5) è piccola: $e |\varphi_0| / mv_0^2 \ll 1$. Supporremo inoltre il campo omogeneo in media su tutto il volume del plasma; ciò vuol dire che il quadrato E^2 , il cui valore medio è calcolato in base alla distribuzione statistica delle fasi e intensità delle onde, non dipende dalle coordinate (questo valore medio è equivalente a quello calcolato su porzioni di spazio di dimensioni $\Delta x \gg 1/|\Delta \mathbf{k}|$).

Rappresentiamo il campo \mathbf{E} all'istante iniziale sotto forma dell'integrale di Fourier

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (49,6)$$

dove in virtù della condizione di realtà $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*$. L'ipotesi (49,4) sul carattere della perturbazione iniziale significa che l'integrazione nella (49,6) è estesa di fatto soltanto agli interni dei punti $\mathbf{k} = \pm \mathbf{k}_0$. Quanto alla condizione di omogeneità spaziale della perturbazione, è facile formularla scrivendo il tensore quadratico $E_\alpha E_\beta$ sotto forma dell'integrale doppio

$$E_\alpha E_\beta = \iint E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6}.$$

Dopo il calcolo della media in base alla distribuzione statistica, questa espressione deve essere indipendente da \mathbf{r} ¹⁾. A tal fine il valore medio $\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} \rangle$ deve contenere la funzione delta $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. Tenendo anche conto della longitudinalità delle onde di plasma, scriviamo

$$\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} \rangle = (2\pi)^3 \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (E^2)_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (49,7)$$

Questa relazione si deve considerare come definizione delle grandezze indicate qui simbolicamente con $(E^2)_{\mathbf{k}}$. È da notare che queste grandezze sono reali. L'espressione (49,7) è diversa da zero soltanto per $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ e simmetrica rispetto alle permutazioni di \mathbf{k} e \mathbf{k}' . Perciò $(E^2)_{\mathbf{k}} = (E^2)_{-\mathbf{k}}$ e il cambio di segno di \mathbf{k} è equivalente alla coniugazione complessa. Il quadrato medio $\langle E^2 \rangle$ si esprime in funzione di queste grandezze mediante la formula

$$\langle E^2 \rangle = \int (E^2)_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (49,8)$$

L'integrazione nella (49,6) e perciò anche nella (49,8) è estesa, come è stato già detto, agli interni dei punti \mathbf{k}_0 e $-\mathbf{k}_0$. È più comodo, tuttavia, escludere dalla considerazione il vettore $-\mathbf{k}_0$ rap-

¹⁾ Per le perturbazioni del tipo considerato gli integrali $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x$ sono di fatto divergenti, in quanto $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ non si annulla all'infinito. Questa circostanza, tuttavia, è inessenziale per le conclusioni formali che hanno a che fare a priori con i quadrati medi finiti.

presentando la (49,6) nella forma

$$\mathbf{E} = \int_{\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{c.c.}, \quad (49,9)$$

dove si integra già rispetto al solo intorno del punto $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ e c.c. indica un'espressione complessa coniugata. Corrispondentemente, la (49,8) si scrive come

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = 2 \int_{\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (49,10)$$

e la relazione (49,7) nella forma

$$\begin{aligned} \langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta}^* \rangle &= (2\pi)^3 (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (49,11)$$

L'evoluzione ulteriore della perturbazione (49,9) nel tempo sarà rappresentata dall'espressione

$$\mathbf{E} = \int_{\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{c.c.}, \quad (49,12)$$

dove $\omega(\mathbf{k}) \approx \Omega_e$ è la frequenza delle onde di plasma e i coefficienti $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$ variano lentamente a causa dello smorzamento di Landau. Rappresentiamo analogamente anche la funzione di distribuzione degli elettroni

$$f = f_0(t, \mathbf{p}) + \left\{ \int_{\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{c.c.} \right\}. \quad (49,13)$$

L'espressione tra parentesi graffe rappresenta la parte « caotica » della funzione di distribuzione, che oscilla rapidamente nello spazio e nel tempo; essa scompare con la media statistica delle onde. Quanto al termine $f_0(t, \mathbf{p})$, esso rappresenta la distribuzione media variabile lentamente ¹⁾.

Il nostro scopo è di ottenere un sistema di equazioni che definiscano l'evoluzione delle caratteristiche medie dello stato del plasma, ossia delle funzioni $(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}$ e $f_0(t, \mathbf{p})$. Affinché il detto sistema sia chiuso, queste caratteristiche devono includere tutti gli elettroni che partecipano agli effetti non lineari in esame. A tal fine l'intervallo delle velocità (49,3) corrispondente alla dispersione dei vettori d'onda $\Delta \mathbf{k}$ deve, a sua volta, in ogni caso coprire largamente l'ampiezza delle oscillazioni della velocità degli elettroni sotto l'influsso del campo di onde in risonanza con essi. È questa la condizione espressa dalla disuguaglianza (49,5); $(e | \varphi_0 | / m)^{1/2}$ è l'ordine di

¹⁾ Non confondere con la distribuzione d'equilibrio maxwelliana!

grandezza dell'ampiezza suindicata. Infatti, nel sistema di coordinate che si muove con la velocità di fase dell'onda, il campo di quest'ultima è statico ed è una successione di gobbe di potenziale di altezza $|\varphi_0|$. In questo sistema l'elettrone di risonanza compie oscillazioni tra due gobbe e, inoltre, la sua velocità varia nell'intervallo tra $\pm (2e |\varphi_0|/m)^{1/2}$.

Una delle equazioni che legano $(E^2)_k$ con f_0 esprime lo smorzamento di Landau di ciascuna delle componenti di Fourier del campo

$$\frac{d}{dt} (E^2)_k = -2\gamma_k (E^2)_k, \quad (49,14)$$

dove

$$\gamma_k = 2\pi^2 e^2 \Omega_e \int \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{k}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 p \quad (49,15)$$

è, in accordo con le (32,6) e (30,1), il coefficiente di ampiezza dello smorzamento delle onde; il fattore 2 a secondo membro dell'equazione (49,14) è legato al carattere quadratico della grandezza $(E^2)_k$.

Partendo dall'equazione cinetica del plasma senza urti otteniamo la seconda equazione

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (49,16)$$

Applichiamola dapprima nell'approssimazione lineare a una singola componente di Fourier della perturbazione. Nell'ultimo termine dell'equazione, già contenente la piccola grandezza $\mathbf{E}_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, poniamo $f \approx f_0$. Nel primo termine, invece, trascuriamo la dipendenza lenta di f_k da t . Otteniamo così per f_k l'espressione ordinaria

$$f_k = \frac{ie\mathbf{E}_k}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (49,17)$$

dove, come sempre, nelle integrazioni ulteriori con ω si deve intendere $\omega + i0$.

In seguito, sostituiamo nella (49,16) le espressioni complete di \mathbf{E} e f nelle forme (49,12) e (49,13) con f_k dato dalla (49,17) e calcoliamo il valore medio in base alla distribuzione statistica delle onde mediante la (49,11). Scompaiono tutti i termini lineari rispetto alla perturbazione, mentre i termini quadratici definiscono la derivata $\partial f_0 / \partial t$ nella forma

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = e^2 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} \int_{\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (E^2)_k \left[\frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} - \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} \right] \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Sostituendo, secondo la (29,8), la differenza tra parentesi quadre con $2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ otteniamo infine

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(D_{\alpha\beta}^{(n)} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} \right), \quad (49,18)$$

dove

$$D_{\alpha\beta}^{(n)}(p) = 2\pi e^2 \int_{k \approx k_0} (E^2)_k \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \delta(\omega - k v) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (49,19)$$

Le equazioni (49,14) e (49,18) costituiscono il sistema completo cercato. La teoria delle onde di plasma basata su queste equazioni si chiama *quasi-lineare*¹⁾.

L'equazione (49,18) ha la forma di un'equazione di diffusione nello spazio delle velocità, dove $D_{\alpha\beta}^{(n)}$ svolge il ruolo del tensore dei coefficienti di diffusione (l'indice (n) ricorda che questa « diffusione » è legata agli effetti di non linearità). Questi coefficienti, come funzioni della velocità degli elettroni, sono diversi da zero nell'intervallo Δv in prossimità di v_0 , legato alla dispersione Δk in accordo con la (49,3). Sarà questa la regione di velocità in cui avrà luogo la diffusione e, rispettivamente, comparirà la distorsione della funzione di distribuzione (che resta maxwelliana per tutta la massa restante di elettroni). Il carattere di questa distorsione è evidente dalle proprietà generali di tutti i processi di diffusione: la diffusione conduce a uno smussamento, cioè alla comparsa nel caso in esame di un ripiano di larghezza $\sim \Delta v$ nella « coda » della funzione $f_0(p)$ per $v \approx v_0 \gg v_{Te}$, come è rappresentato schematicamente nella fig. 13. È da notare che per questo carattere della distorsione cambia soprattutto la derivata $\partial f_0 / \partial p$, mentre il valore f_0 resta vicino a quello maxwelliano.

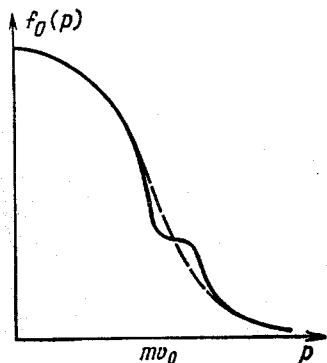


Fig. 13

Stimiamo il tempo di rilassamento di questo processo τ_n . Poiché si tratta di livellamento sull'intervallo $\Delta p = m\Delta v$, allora

$$\tau_n \sim m^2 (\Delta v)^2 / D^{(n)}. \quad (49,20)$$

Per stimare il coefficiente di diffusione, osserviamo che secondo la (49,10) $(E^2)_k (\Delta k / 2\pi)^3 \sim \langle E^2 \rangle$. La presenza della funzione δ nell'espressione integranda della (49,19) equivale, come ordine di grandezza, alla moltiplicazione dell'integrale per $1/v_0 \Delta k$. Quindi,

$$D^{(n)} \sim \frac{e^2 \langle E^2 \rangle}{v_0 \Delta k} \sim \frac{e^2 \langle E^2 \rangle}{k_0 \Delta v}. \quad (49,21)$$

¹⁾ La teoria è stata sviluppata da A. A. Vedenov, E. P. Velichov e R. Z. Sagdeev (1961). Le equazioni (49,14) e (49,18) sono state dedotte indipendentemente anche da Ju. A. Romanov e G. F. Filippov (1961), e da W. E. Drummond e D. Pines (1961).

Infine, esprimendo $\langle E^2 \rangle$ in funzione dell'ampiezza φ_0 delle oscillazioni del potenziale ($\sim k^2 |\varphi_0|^2$) e sostituendo la (49,21) nella (49,20), troviamo ¹⁾

$$\tau_n \sim \frac{(\Delta v)^3}{k_0 (e |\varphi_0| / m)^2}. \quad (49,22)$$

Nel ragionamento esposto si suppone, ovviamente, che il tempo τ_n sia piccolo rispetto al tempo dello smorzamento di Landau: $\tau_n \ll 1/\gamma$; in caso contrario le onde si smorzerebbero prima che si verificassero effetti non lineari. Al tempo stesso, l'applicabilità dell'equazione (49,14) presuppone un tempo $1/\gamma$ piccolo rispetto al tempo del cammino libero degli elettroni: $1/\gamma \ll 1/v_e$, dove v_e è la frequenza media degli urti. L'ultima condizione, tuttavia, non garantisce ancora che sia legittimo trascurare gli urti nel fenomeno considerato (cioè che sia legittimo usare qui l'equazione cinetica nella forma (49,16)). Per la concorrenza con gli effetti non lineari è importante non il tempo generale di rilassamento degli urti, bensì il tempo di rilassamento degli urti nell'intervallo delle velocità Δv ; indichiamolo con τ_{urt} .

Poiché si tratta del rilassamento nell'intervallo Δv posto in prossimità dei valori $v_0 \gg v_{Te}$ e in cui si trova soltanto una parte relativamente piccola di tutti gli elettroni, allora la situazione è analoga a quella che abbiamo visto nel problema degli elettroni in fuga. Il processo è una diffusione nello spazio dei vettori quantità di moto con il coefficiente di diffusione

$$D^{(urt)} = m^2 v_{ee}(v) v_{Te}^2 = \frac{4\pi e^4 L N_e T_e}{m v^3} \approx \frac{m^2 v_{ee}(v_{Te}) v_{Te}^5}{v^3} \quad (49,23)$$

(il coefficiente davanti a $\partial f / \partial p$ nella densità del flusso nello spazio dei vettori quantità di moto (45,5)).

Il tempo cercato del rilassamento d'urto nell'intervallo Δv differisce dalla (49,20) per la sostituzione di $D^{(n)}$ con $D^{(urt)}$:

$$\tau_{urt} \sim \frac{m^2 (\Delta v)^2}{D^{(urt)}} \sim \frac{(\Delta v)^2}{v_{Te}^2 v_{ee}(v_{Te})} \left(\frac{v_0}{v_{Te}} \right)^3. \quad (49,24)$$

Per

$$\tau_n \gg \tau_{urt} \quad (49,25)$$

(cioè per $D^{(n)} \ll D^{(urt)}$) gli effetti non lineari sono inessenziali: gli urti fanno in tempo a mantenere la distribuzione maxwelliana nell'intorno di v_0 malgrado la perturbazione proveniente da parte del campo d'onda. Corrispondentemente il coefficiente di smorza-

¹⁾ Per $\Delta v \sim (e |\varphi_0| / m)^{1/2}$, quando la teoria esposta è già, a rigore, inapplicabile (il segno \sim al posto del segno \gg nella (49,5)), questa stima dà $\tau_n \sim \sim k_0^{-1} (m/e |\varphi_0|)^{1/2}$. Ci si doveva aspettare questo risultato, quando la dispersione delle velocità di risonanza Δv coincide con l'ampiezza della velocità degli elettroni per le loro oscillazioni nel campo dell'onda: come ordine di grandezza τ_n coincide con il periodo di queste oscillazioni.

mento di Landau verrà dato dall'espressione ordinaria, corrispondente al valore maxwelliano della derivata $\partial f_0 / \partial p$ nell'intorno di v_0 . In tal modo, la disuguaglianza (49,25) è la condizione di applicabilità della teoria dello smorzamento di Landau rigorosamente lineare. Ricordiamo al tempo stesso che la teoria quasi-lineare in esame è valida per la condizione (49,2) di gran lunga più debole. La condizione (49,25) si può rappresentare nella forma

$$\frac{E^2}{4\pi} \ll N_e T_e \left[V \sqrt{4\pi} L \eta^{3/2} \left(\frac{v T_e}{v_0} \right)^3 \frac{\Delta v}{v_0} \right],$$

dove $\eta = e^2 N^{1/3} / T$ è il parametro di gassosità. Il fattore piccolo tra parentesi quadre dimostra la debolezza della condizione (49,2) rispetto alla (49,25).

Nel caso limite inverso, per $\tau_n \ll \tau_{urt}$ gli effetti non lineari implicano una forte diminuzione della derivata $\partial f_0 / \partial p$ nella regione suindicata, cioè grosso modo nel rapporto $D^{(urt)} / D^{(n)}$. Rispettivamente diminuisce il coefficiente di smorzamento di Landau.

§ 50. Equazione cinetica per un plasma relativistico

Se le velocità delle particelle (degli elettroni) nel plasma non sono piccole rispetto alla velocità della luce, l'equazione cinetica deve essere scritta tenendo conto degli effetti relativistici (S. T. Beljaev, G. I. Budker, 1956).

Mostriamo preliminarmente che la funzione di distribuzione $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ nello spazio delle fasi è una grandezza relativisticamente invariante. A tal fine osserviamo che la densità spaziale delle particelle e la densità del loro flusso, cioè gli integrali

$$N = \int f d^3 p, \quad \mathbf{i} = \int \mathbf{v} f d^3 p,$$

devono formare il quadrivettore $i^k = (cN, \mathbf{i})$ (si veda II, § 28)¹⁾. Tenendo conto che nella meccanica relativistica la velocità di una particella di quantità di moto \mathbf{p} ed energia ϵ è $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\epsilon$, si può scrivere questo quadrivettore nella forma

$$i^k = c^2 \int p^k f \frac{d^3 p}{\epsilon}, \quad (50,1)$$

dove $p^k = (\epsilon/c, \mathbf{p})$. Ma l'espressione $d^3 p / \epsilon$ è un quadriscale (si veda II, § 10). È chiaro perciò che dalla quadrivettorialità dell'integrale (50,1) segue che la funzione f è un quadriscale²⁾.

¹⁾ In questo paragrafo con le lettere k, l si denotano gli indici vettoriali quadridimensionali. Il prodotto scalare di due quadrivettori a e b si indica con $(ab) \equiv a_k b^k$.

²⁾ Quanto alla funzione di distribuzione delle sole quantità di moto, ossia all'integrale $f(t, \mathbf{p}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 x$, essa non è un quadriscale (proprio questa funzione è considerata in II, § 10).

Passando alla deduzione dell'equazione cinetica del plasma, osserviamo che i calcoli effettuati al § 41 restano validi anche nel caso relativistico fino all'espressione (41,3-4), per la densità del flusso nello spazio dei vettori quantità di moto. È necessario soltanto calcolare di nuovo le grandezze

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_{\alpha} q_{\beta} v_{\text{rel}} d\sigma. \quad (50,2)$$

La grandezza v_{rel} è, come prima, la velocità relativa di due particelle. Ricordiamo, tuttavia, che nella meccanica relativistica essa è definita come la velocità di una particella nel sistema a riposo dell'altra e, in generale, non si riduce alla differenza $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ (si veda II, § 12).

Precisiamo soprattutto il carattere di trasformazione di queste grandezze. Il prodotto

$$v_{\text{rel}} d\sigma \cdot f f' d^3p d^3p' d^3x dt$$

è il numero di atti di diffusione che si verificano nel volume d^3x durante il tempo dt tra due particelle con quantità di moto negli intervalli assegnati d^3p e d^3p' ; per definizione, questo numero è invariante. Riscrivendolo nella forma

$$\varepsilon \varepsilon' v_{\text{rel}} d\sigma \cdot f \cdot f' \cdot \frac{d^3p}{\varepsilon} \cdot \frac{d^3p'}{\varepsilon'} \cdot d^3x dt$$

e osservando che gli ultimi cinque fattori (separati da punti) sono invarianti, concludiamo che il primo fattore $\varepsilon \varepsilon' v_{\text{rel}} d\sigma$ è anch'esso invariante. Ne segue, a sua volta, che gli integrali

$$W^{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon' \int q^k q^l v_{\text{rel}} d\sigma \quad (50,3)$$

formano un quadritensore simmetrico. Le grandezze (50,2), invece, sono legate alle componenti spaziali di questo quadritensore come segue:

$$B_{\alpha\beta} = \frac{W^{\alpha\beta}}{\varepsilon \varepsilon'}. \quad (50,4)$$

Calcoliamo dapprima il quadritensore (50,3) nel sistema di riferimento in cui una delle particelle (la particella e , ad esempio) è a riposo. La sezione relativistica di diffusione di Rutherford delle particelle e' sulle particelle e a riposo (prima dell'urto), per piccoli angoli di diffusione χ , ha la forma ¹⁾

$$d\sigma = \frac{4(ee')^2 \varepsilon'^2}{p'^4 \chi^4} 2\pi \chi d\chi. \quad (50,5)$$

¹⁾ Questa espressione si riferisce alla diffusione degli elettroni sia su elettroni che su ioni. Nel primo caso essa si ottiene dalla (81,7) del volume IV, nel secondo dalla sezione di diffusione (80,7), IV, su un centro coulombiano fisso.

Lo stesso calcolo, fatto per la deduzione della (41,8), conduce alla seguente espressione per le componenti spaziali del tensore (50,3):

$$W^{\alpha\beta} = 2\pi (ee')^2 L (v'^2 \delta_{\alpha\beta} - v'_\alpha v'_\beta) mc^2 \frac{e'}{v'^3}. \quad (50,6)$$

Le altre componenti si devono supporre nulle:

$$W^{00} = W^{0\alpha} = 0. \quad (50,7)$$

Infatti, la variazione dell'energia delle particelle per urti (q^0) nel sistema di riferimento in esame è una grandezza del secondo ordine rispetto al piccolo angolo di diffusione; perciò $W^{0\alpha}$ e W^{00} sarebbero infinitesimi del terzo o del quarto ordine, mentre tutta la deduzione dell'integrale degli urti si effettua a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Dalle (50,6-7) abbiamo

$$W_h^k = -W_\alpha^\alpha = -4\pi (ee')^2 L mc^2 e' / v'.$$

Questo quadriscale si può scrivere in forma invariante, osservando che nel sistema a riposo della particella e abbiamo

$$(uu') = \frac{e'}{m'c^2}, \quad \frac{[(uu')^2 - 1]^{1/2}}{(uu')} = \frac{v'}{c},$$

dove $u^h = p^h/mc$, $u'^h = p'^h/m'c$ sono le quadrirelatività di ambedue le particelle. Perciò

$$W_h^k = -4\pi (ee')^2 L mm' c^4 \frac{(uu')^2}{c [(uu')^2 - 1]^{1/2}}. \quad (50,8)$$

Dalle (50,6-7) troviamo che

$$W^{hl} u_l = W^{hl} u'_l = 0, \quad (50,9)$$

e, essendo relativisticamente invariante la forma di queste uguaglianze, esse sono valide in qualsiasi sistema di riferimento.

L'espressione del quadritensore W^{hl} , valida in un sistema di riferimento arbitrario, deve essere, evidentemente, simmetrica rispetto alle due particelle. La forma generale di questo quadritensore, dipendente unicamente dai quadri vettori u^h e u'^h è

$$W^{hl} = \alpha g^{hl} + \beta (u^h u'^l + u'^h u^l) + \delta (u^h u'^l + u'^h u^l),$$

dove α , β , δ sono scalari. Definendo questi ultimi con le condizioni (50,8-9) otteniamo

$$W^{hl} = 2\pi (ee')^2 L \frac{mm' c^4 (uu')^2}{c [(uu')^2 - 1]^{3/2}} \{ - [(uu')^2 - 1] g^{hl} - (u^h u'^l + u'^h u^l) + (uu') (u^h u'^l + u'^h u^l) \}. \quad (50,10)$$

Infine, considerando la parte spaziale di questo quadritensore in un sistema di riferimento arbitrario, otteniamo le seguenti espres-

sioni definitive per le grandezze $B_{\alpha\beta}$ che figurano nell'integrale degli urti:

$$B_{\alpha\beta} = 2\pi (ee')^2 L \frac{\gamma\gamma' (1 - \mathbf{v}\mathbf{v}'/c^2)^3}{c [\gamma^2\gamma'^2 (1 - \mathbf{v}\mathbf{v}'/c^2)^2 - 1]^{3/2}} \times \\ \times \left\{ \left[\gamma^2\gamma'^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2} \right)^2 - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{\gamma^2}{c^2} v_\alpha v_\beta - \right. \\ \left. - \frac{\gamma'^2}{c^2} v'_\alpha v'_\beta + \frac{\gamma^2\gamma'^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2} \right) (v_\alpha v'_\beta + v'_\alpha v_\beta) \right\}, \quad (50,11)$$

dove

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad \gamma' = \frac{\varepsilon'}{m'c^2} = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

sono i coefficienti di Lorentz di entrambi le particelle. E da notare che malgrado la forma più complicata (rispetto al caso non relativistico) il tensore tridimensionale (50,11) verifica, come prima, le relazioni

$$B_{\alpha\beta} v_\beta = B_{\alpha\beta} v'_\beta. \quad (50,12)$$

Per la stima del logaritmo coulombiano osserviamo che nel caso relativistico ha luogo la situazione di Born, $ze^2/\hbar v \sim ze^2/\hbar c \ll 1$. Perciò per gli urti ee ed ei abbiamo

$$L \approx \ln(pa/\hbar) \approx \ln(T_e a/\hbar c). \quad (50,13)$$

Per gli urti ii si deve sostituire T_e con T_i (se gli ioni sono anch'essi relativistici) o ricorrere alle espressioni non relativistiche ordinarie.

L'equazione cinetica con l'integrale degli urti coulombiano ha senso finché la diffusione di Rutherford resta la causa principale della variazione della quantità di moto e dell'energia dell'elettrone. Un processo concorrente si rivela qui la radiazione di ritardo (e anche l'effetto Compton se nel plasma esiste un numero grande di fotoni). La sezione (di trasporto) della diffusione di Rutherford ha come ordine di grandezza

$$\sigma_{\text{Ruth}} \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 L \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{mc^2}{T_e} \right)^2 L. \quad (50,14)$$

La sezione dell'emissione di ritardo dei fotoni con energia $\hbar\omega \sim T_e$ è

$$\sigma_{\text{rit}} \sim \frac{z^2}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{T_e}{mc^2} \quad (50,15)$$

(si veda IV, (93,17)). Queste sezioni sono comparabili per

$$\frac{T_e}{mc^2} \sim \left(\frac{137L}{\ln(137L)} \right)^{1/2}.$$

PROBLEMI

1. Trovare la velocità di trasmissione dell'energia da elettroni con temperatura $T_e \gg mc^2$ a ioni con temperatura $T_i \ll Mc^2$.

Soluzione. Fino alla (42,3) restano validi tutti i calcoli eseguiti al § 42. Le grandezze $B_{\alpha\beta}^{(ei)}$, invece, le ricaviamo dalle (50,4), (50,6) ponendo $v' \approx c$:

$$B_{\alpha\alpha}^{(ei)} = 4\pi e^4 z^2 L/c.$$

Come risultato otteniamo

$$\frac{dE_i}{dt} = -\frac{dE_e}{dt} = \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{4\pi z^2 e^4 N_i N_e L}{Mc}.$$

Esprimendo l'energia degli elettroni ultrarelativistici in funzione della loro temperatura, secondo $E_e = 3T_e N$ (si veda il problema del § 44, V), otteniamo

$$\frac{dT_e}{dt} = -(T_e - T_i) \frac{4\pi z^2 e^4 N_i L}{3McT_e}.$$

2. Trovare la conduttività elettrica di un plasma relativistico di Lorentz.

Soluzione. Dopo aver trascurato gli urti ee e passando al limite per $M \rightarrow \infty$, l'andamento della soluzione nel caso relativistico coincide con la soluzione del problema non relativistico del § 44. Per la correzione alla funzione di distribuzione in un campo elettrico costante ($\omega = 0$) riotteniamo

$$\delta f = -\frac{eEv}{T_e v_{ei}(p)} f_0$$

(si veda la (44,5)) con la sola differenza che la frequenza degli urti è definita ora dalla sezione di diffusione di Rutherford

$$v_{ei}(p) = N_i v \sigma_i, \quad \sigma_i \approx \int \frac{\chi^2}{2} d\sigma = \frac{4\pi z^2 e^4 L}{v^2 p^2}.$$

Calcolando la corrente come l'integrale $-e \int v \delta f d^3p$, otteniamo la conduttività elettrica

$$\sigma = \frac{\langle v^3 p^2 \rangle}{12\pi z e^2 T_e L}.$$

Nel caso ultrarelativistico $v \approx c$, $\langle p^2 \rangle = 12 (T_e/c)^2$ in modo che

$$\sigma = c T_e / \pi z e^3 L.$$

§ 51. Fluttuazioni in un plasma

La teoria delle fluttuazioni in un plasma è costruita, in via di principio, come in un gas ordinario (§§ 19, 20). I correlatori temporali

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) \delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) \rangle, \quad \langle \delta \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \delta f_a(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) \rangle$$

(φ è il potenziale del campo elettrico; gli indici a, b distinguono il tipo di particelle), per esempio, verificano, per $t = t_1 - t_2 > 0$, lo stesso sistema di equazioni, ossia l'equazione cinetica e l'equazione di Poisson linearizzate, che la funzione di distribuzione \bar{f}_a

e il potenziale $\bar{\varphi}$. Per risolvere questo sistema bisogna conoscere i correlatori simultanei corrispondenti, che fungono da condizione iniziale. Ma a differenza del gas di particelle neutre in equilibrio, nel plasma esiste la correlazione simultanea tra le posizioni di particelle distinte, che è legata alla loro interazione coulombiana e che si estende a grande ($\sim a$) distanza. Nel caso d'equilibrio questa correlazione viene descritta dai correlatori di densità calcolati in V, § 79. Nei casi di non equilibrio, invece, la definizione dei correlatori simultanei è un problema difficile.

Tuttavia, questa difficoltà si può superare in forma generale nel caso di un plasma senza urti. Osserviamo che per un plasma senza urti il problema delle fluttuazioni nello stato stazionario di non equilibrio si formula in modo particolarmente naturale, poiché in questo plasma, qualora non esista un campo esterno, qualsiasi funzione di distribuzione $\bar{f}_a(\mathbf{p})$ dipendente unicamente dalla quantità di moto delle particelle è una soluzione stazionaria dell'equazione cinetica. Il correlatore delle fluttuazioni rispetto a tale distribuzione, così come nel caso d'equilibrio, dipenderà dalle coordinate di due punti e da due istanti di tempo soltanto come funzione delle differenze $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $t = t_1 - t_2$. L'assenza di urti nel plasma inoltre significa che vanno considerati istanti t piccoli rispetto a $1/\nu$, dove ν è la frequenza efficace degli urti. Il metodo che sarà esposto più avanti è applicabile proprio in queste condizioni; sin dall'inizio in esso si suppone l'assenza di urti. Esso è basato sul calcolo diretto del valore medio dei prodotti delle funzioni esatte di distribuzione $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ fluttuanti¹⁾.

Queste funzioni verificano le equazioni

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \nu \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (51,1)$$

dove φ è il potenziale esatto del campo elettrico, che soddisfa l'equazione

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_a e_a \int f_a d^3 p. \quad (51,2)$$

Le equazioni (51,1) esprimono l'analogo del teorema di Liouville. Sottolineiamo che in queste equazioni esatte non si trascurano ancora gli urti. Le funzioni esatte di distribuzione

$$f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)] \delta[\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(t)] \quad (51,3)$$

(la sommatoria è estesa a tutte le particelle del tipo a) contengono il moto descritto dalle particelle lungo le traiettorie $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t)$, che sono soluzioni esatte delle equazioni di moto del sistema di

¹⁾ Questo metodo appartiene a N. Rostoker (1961) e a Ju. L. Klimontovič, V. P. Silin (1962).

particelle interagenti. Le equazioni (51,1) si verificano facilmente, con la derivazione diretta delle espressioni (51,3), tenuto conto delle equazioni di moto delle particelle in un campo autocompatibile.

Le equazioni (51,1-2) sono di per sé abbastanza inutili; ricorrere alle funzioni di distribuzione nella forma (51,3) è lo stesso che seguire separatamente ogni particella. Se, invece, si calcola il loro valore medio su volumi fisicamente infinitesimi¹⁾, si ottengono le equazioni cinetiche ordinarie. Ponendo $f_a = \bar{f}_a + \delta f_a$, $\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi$ e calcolando la media delle equazioni (senza trascurare nulla) otteniamo

$$\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}} = e_a \left\langle \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle, \quad (51,4)$$

$$\Delta \bar{\varphi} = -4\pi \sum_a e_a \int \bar{f}_a d^3p. \quad (51,5)$$

Il secondo membro nella (51,4) è l'integrale degli urti²⁾.

Sottraendo le (51,4-5) dalle equazioni esatte (51,1-2) otteniamo le equazioni per le parti fluttuanti delle funzioni di distribuzione e del potenziale. Inoltre i termini quadratici in $\delta\varphi$ e δf_a nell'equazione cinetica descrivono l'influenza degli urti sulle fluttuazioni. Trascurando questi termini e considerando il caso spazialmente omogeneo, ponendo cioè

$$\bar{f}_a = \bar{f}_a(\mathbf{p}), \quad \bar{\varphi} = 0, \quad (51,6)$$

otteniamo le equazioni

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (51,7)$$

$$\Delta \delta\varphi = -4\pi \sum_a e_a \int \delta f_a d^3p. \quad (51,8)$$

Queste equazioni consentono di esprimere le funzioni $\delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, a un istante t arbitrario, mediante i loro valori all'istante iniziale $t = 0$; ciò permette di esprimere anche il correlatore

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) \delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) \rangle \quad (51,9)$$

mediante il suo valore per $t_1 = t_2 = 0$. Questo valore iniziale del correlatore (indichiamolo con $g_{ab}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$) è in misura notevole (si veda più avanti) una funzione arbitraria. Sottolineiamo

¹⁾ Ossia, il che è lo stesso, rispetto alle condizioni iniziali del problema meccanico esatto, corrispondenti allo stato macroscopico considerato.

²⁾ Torneremo su questa espressione alla fine di questo paragrafo; per il momento osserviamo che essa corrisponde al secondo membro dell'equazione (16,7), nel caso in cui l'interazione tra le particelle sia coulombiana.

immediatamente che esso non rappresenta affatto quel correlatore simultaneo che ci proponiamo di trovare (assieme con il correlatore completo non simultaneo). Il punto centrale che garantisce l'efficienza del metodo proposto è che per una funzione g arbitraria il correlatore (51,9) calcolato in questo modo si riduce con il tempo (t_1, t_2 sono dell'ordine di tempo dello smorzamento di Landau) a una funzione della sola differenza $t = t_1 - t_2$, indipendente dalla scelta di g . Così il problema sarà risolto: questa funzione limite rappresenterà il correlatore non simultaneo cercato, e il suo valore per $t_1 - t_2 = 0$ sarà il correlatore simultaneo.

Passando alla realizzazione di tale programma, introduciamo le componenti dello sviluppo di Fourier nelle coordinate e dello sviluppo unilaterale di Fourier nel tempo

$$\delta f_{a\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \int d^3x \int_0^\infty dt \cdot e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (51,10)$$

e analogamente per $\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$. Moltiplicando le equazioni (51,7-8) per $e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, integrando rispetto a dt da 0 a ∞ e rispetto a d^3x , otteniamo

$$\begin{aligned} i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) \delta f_{a\omega\mathbf{k}}^{(+)} - ie_a\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}} \delta \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} &= \delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}), \\ -k^2 \delta \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} &= 4\pi \sum_a e_a \int \delta f_{a\omega\mathbf{k}}^{(+)} d^3p. \end{aligned} \quad (51,11)$$

Abbiamo già avuto a che fare con equazioni simili (cfr. le (34,10-11)); da esse ricaviamo

$$\delta \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = -\frac{4\pi}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} \sum_a e_a \int \frac{\delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p})}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} d^3p, \quad (51,12)$$

dove ε_l è la costante dielettrica del plasma con distribuzione $\bar{f}(\mathbf{p})$ ¹⁾. Il prodotto di queste due espressioni e il calcolo della media statistica danno

$$\begin{aligned} \langle \delta \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta \varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle &= \frac{16\pi^2}{k^4 \varepsilon_l(\omega, k) \varepsilon_l(\omega', k')} \sum_{a,b} e_a e_b \times \\ &\times \int \frac{\langle \delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}) \delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}') \rangle}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) i(\mathbf{k}'\mathbf{v}' - \omega')} d^3p d^3p'. \end{aligned} \quad (51,13)$$

Il valore medio a numeratore dell'espressione integranda è legato alla componente di Fourier $g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ del correlatore « iniziale »

¹⁾ Soltanto per semplificare la scrittura delle formule ulteriori, supporremo che la funzione $\bar{f}(\mathbf{p})$ sia isotropa in modo che il corrispondente tensore della costante dielettrica $\varepsilon_{\alpha\beta}$ si riduce agli scalari ε_l e ε_t .

$g_{ab}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ dalla formula

$$\langle \delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}) \delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

(si veda la (19,13)). Come ogni funzione di correlazione simultanea, il correlatore iniziale deve contenere un termine con funzione δ , che esprime i casi in cui una sola particella si trova in elementi coincidenti dello spazio delle fasi

$$\delta_{ab} \bar{f}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$$

(cfr. la (19,6)). L'immagine della trasformazione di Fourier di questo termine è $\delta_{ab} \bar{f}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$. Quindi nella (51,13) si deve porre

$$\begin{aligned} \langle \delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}) \delta f_{b\mathbf{k}'}(0, \mathbf{p}') \rangle = \\ = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') [\delta_{ab} \bar{f}_a(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')], \end{aligned} \quad (51,14)$$

dove $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ è una funzione regolare qualsiasi (senza singolarità per \mathbf{p} e \mathbf{p}' reali), ossia la trasformata di Fourier di una funzione $\mu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ che tende a zero per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$.

Sostituito nella (51,13) il termine con questa funzione arbitraria nella (51,14) dà

$$\frac{4(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{k^4 \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_l(\omega', \mathbf{k}')} \sum_{a, b} \int \frac{\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d^3 p d^3 p'}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) i(\mathbf{k}\mathbf{v}' - \omega')}. \quad (51,15)$$

Mostriamo che questa espressione corrisponde nella rappresentazione temporale a una funzione che si smorza rapidamente al crescere di t o t' .

Il passaggio dalla trasformata di Laplace $\langle \delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle$ (si veda la nota a pag. 170) alla funzione del tempo t_2 e $t_1 = t_2 + t$ si realizza mediante la formula d'inversione

$$\langle \delta\varphi_{\mathbf{k}}(t_1) \delta\varphi_{\mathbf{k}'}(t_2) \rangle = \int e^{-i\omega t_1 - i\omega' t_2} \langle \delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}, \quad (51,16)$$

dove l'integrazione è estesa ai cammini nei piani delle variabili complesse ω e ω' , che passano sopra tutti i punti singolari dell'espressione integranda. Vediamo quale è l'asintotica dell'espressione (51,16) per $t_1, t_2 \rightarrow \infty$. Per determinarla si devono spostare in basso i contorni d'integrazione finché non « si attaccano » ai punti singolari; così, la singolarità nel punto $\omega = \omega_c$ condurrà alla dipendenza asintotica dell'integrale in $d\omega$ dal tempo nella forma $\exp(-i\omega_c t)$. È facile vedere che l'espressione (51,15) ha singolarità soltanto nei semipiani inferiori di ω o ω' (e non sugli assi reali di queste variabili) e perciò l'asintotica dell'integrale (51,16), con la (51,15) in qualità di $\langle \delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle$, contiene solo i termini che si smorzano.

Consideriamo, ad esempio, l'integrale in ω . Il fattore $1/\varepsilon_l(\omega, k)$ nella (51,15) ha poli negli zeri della funzione $\varepsilon_l(\omega, k)$, disposti soltanto nel semipiano inferiore di ω ¹⁾. Della stessa proprietà gode anche l'integrale in d^3p nella (51,15). Infatti, questo integrale ha la forma

$$\int \frac{\psi(z) dz}{z - \omega/k - i0},$$

dove $z \equiv p_x$ è la proiezione del vettore \mathbf{p} sulla direzione \mathbf{k} e, inoltre, il fattore $\psi(z)$ (secondo le proprietà supposte della funzione $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$) potrebbe avere punti singolari solo per valori complessi di z . Un

integrale di questo tipo è stato già studiato alla fine del § 29 e, come è stato mostrato, può avere poli soltanto nel semipiano inferiore di ω .

In tal modo, la parte che non si smorza del correlatore proviene unicamente dal contributo del primo termine dell'espressione (51,14) all'integrale (51,13):

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle = \\ = - \frac{4(2\pi)^5 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{k^4 \varepsilon_l(\omega, k) \varepsilon_l(\omega', k)} \sum_a e_a^2 \int \frac{\bar{f}_a(p) d^3p}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)(\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)}. \end{aligned} \quad (51,17)$$

Trasformiamo l'espressione integranda scrivendo

$$\begin{aligned} [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)(\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)]^{-1} = \\ = \frac{1}{\omega + \omega' + i0} \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} + \frac{1}{\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \right]. \end{aligned}$$

Nell'integrazione ulteriore rispetto a ω' nella (51,16), il contributo che non si smorza per $t \rightarrow \infty$ proviene dal residuo nel polo $\omega' = -\omega - i0$, che viene aggirato con il cammino d'integrazione mostrato nella fig. 14; in questo senso il fattore $1/(\omega + \omega')$ si deve intendere come $-2\pi i \delta(\omega + \omega')$. Il significato dei fattori $1/(\omega \pm \mathbf{k}\mathbf{v})$ nella successiva integrazione rispetto a ω è definito dalla formula (29,8), secondo cui

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} - \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} = -2\pi i \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$$

(questa notazione sottintende che l'integrazione in ω e ω' si effettua già sull'asse reale).

¹⁾ Si intende che la distribuzione $\bar{f}(p)$ corrisponde allo stato stazionario del plasma in modo che le onde di plasma si smorzano. È evidente che soltanto in questo caso ha senso l'impostazione del problema delle fluttuazioni stazionarie.

Così, per calcolare il correlatore nel limite asintotico dei tempi t grandi, nell'integrale (51,17) si deve eseguire la sostituzione

$$[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)(\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)]^{-1} \rightarrow \\ \rightarrow - (2\pi)^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (51,18)$$

Come risultato otteniamo ¹⁾

$$\langle \delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} \delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}, \quad (51,19)$$

dove

$$(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{32\pi^3}{k^4 |\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})|^2} \sum_a e_a^2 \int \bar{f}_a(p) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3p. \quad (51,20)$$

Dalla definizione (51,19) si vede (cfr. la (19,13)) che le grandezze $(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}$ rappresentano la trasformata di Fourier cercata della funzione di correlazione, cioè il correlatore spettrale. In tal modo la formula (51,20) risolve il problema posto per le fluttuazioni del potenziale.

Analogamente si definiscono gli altri correlatori. Così, esprimendo $\delta f_{a\omega\mathbf{k}'}^{(+)}$ dalla (51,11) in funzione di $\delta\varphi_{\omega'\mathbf{k}'}^{(+)}$, moltiplicando per $\delta\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}$ dalla (51,12) e calcolando il valore medio, otteniamo il correlatore del potenziale e della funzione di distribuzione ²⁾

$$(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{e_a \mathbf{k}}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega + i0} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial p} (\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} + \\ + \frac{8\pi^2 e_a}{k^2 \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} \bar{f}_a(p) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (51,21)$$

Ricordiamo che l'ordine in cui si scrivono $\delta\varphi$ e δf_a nel simbolo $(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}$ è fondamentale: la (51,21) è, per definizione (cfr. V, (122,11)), l'immagine di Fourier del correlatore spazio-temporale

$$\langle \delta\varphi(t, \mathbf{r}) \delta f_a(0, 0) \rangle.$$

Se il correlatore è definito come $\langle \delta f_a(t, \mathbf{r}) \delta\varphi(0, 0) \rangle$, allora si avrà

$$(\delta f_a \delta\varphi)_{\omega\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)_{-\omega-\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)^*_{\omega\mathbf{k}} \quad (51,22)$$

(cfr. V, (122,13)).

¹⁾ A scanso di equivoci ricordiamo che questa non è tutta l'espressione, bensì la parte singolare in $\omega + \omega'$, che definisce l'andamento asintotico del correlatore. Nell'espressione completa non tutti i termini conterrebbero $\delta(\omega + \omega')$, in quanto la corrispondente funzione di t_1, t_2 dipende dalla differenza $t = t_1 - t_2$ soltanto asintoticamente, per t_1, t_2 grandi.

²⁾ Sottolineiamo che esiste la regola di aggiramento inversa nel primo termine $(\omega - i0)$ al posto di $(\omega + i0)$. Essa è dovuta al fatto che per $\omega = -\omega'$, $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ si ha

$$(\mathbf{k}'\mathbf{v} - \omega' - i0)^{-1} = -(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega + i0)^{-1}.$$

Infine, il correlatore spettrale delle funzioni di distribuzione è

$$\begin{aligned}
 (\delta f_a \delta f_b)_{\omega \mathbf{k}} = & 2\pi \delta_{ab} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \bar{f}_a(p_1) \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_1) + \\
 & + \frac{e_a e_b (\delta \varphi^2)_{\omega \mathbf{k}}}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_1 + i0)(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_2 - i0)} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \left(\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_b}{\partial \mathbf{p}_2} \right) - \\
 & - \frac{8\pi^2 e_a e_b}{k^2} \left\{ \left(\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \bar{f}_b \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_2)}{\varepsilon_l(\omega, k)(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_1 + i0)} + \right. \\
 & \left. + \left(\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_b}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \bar{f}_a \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_1)}{\varepsilon_l^*(\omega, k)(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_2 - i0)} \right\}. \quad (51,23)
 \end{aligned}$$

Questa è l'immagine di Fourier del correlatore

$$(\delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1) \delta f_b(0, 0, \mathbf{p}_2)).$$

Se nelle formule (51,20-23) al posto di \bar{f}_a consideriamo le funzioni maxwelliane f_{0a} , otteniamo i correlatori delle fluttuazioni in un plasma in equilibrio senza urti.

Consideriamo, ad esempio, le fluttuazioni del potenziale. Per un plasma maxwelliano si può rappresentare la parte immaginaria della costante dielettrica longitudinale nella forma

$$\varepsilon_l^*(\omega, k) = \frac{4\pi^2 \omega}{k^2 T} \sum_a e_a^2 \int f_{0a}(p) \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) d^3 p \quad (51,24)$$

(si veda la (30,1); la generalizzazione a più specie di particelle è evidente). Introducendo questa espressione nella (51,20) otteniamo

$$(\delta \varphi^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{8\pi T \varepsilon_l^*(\omega, k)}{\omega k^2 |\varepsilon_l(\omega, k)|^2}. \quad (51,25)$$

Il correlatore dell'intensità del campo elettrico longitudinale è

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega \mathbf{k}} = k_\alpha k_\beta (\delta \varphi^2)_{\omega \mathbf{k}}. \quad (51,26)$$

È ovvio che questo risultato si potrebbe ottenere anche dalla teoria macroscopica generale delle fluttuazioni elettromagnetiche in equilibrio, esposta in IX, §§ 75-77¹⁾. Secondo questa teoria, il correlatore spettrale dell'intensità del campo elettrico si esprime mediante la funzione di Green ritardata con una formula che nel limite classico ($\hbar\omega \ll T$) si scrive

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega \mathbf{k}} = -\frac{2\omega T}{\hbar c^2} \text{Im } D_{\alpha\beta}^R(\omega, \mathbf{k}) \quad (51,27)$$

¹⁾ Il campo autocompatibile nel plasma è una grandezza macroscopica; perciò ad esso è applicabile la teoria macroscopica delle fluttuazioni. Quanto alla funzione di distribuzione, essa non è una grandezza macroscopica e le sue fluttuazioni richiedono sempre uno studio cinetico.

(si veda IX, (76,3) e (77,2)). In un mezzo con dispersione spaziale la funzione di Green è ¹⁾

$$D_{\alpha\beta}^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2 \epsilon_l / c^2 - k^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \frac{4\pi\hbar c^2}{\omega^2 \epsilon_l} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (51,28)$$

La sostituzione della parte longitudinale di questa funzione (il secondo termine) nella (51,27) fornisce le espressioni (51,25-26).

Torniamo infine all'equazione (51,4) e mostriamo che l'espressione

$$e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\langle \frac{\partial \delta \varphi(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \right\rangle, \quad (51,29)$$

che figura al suo secondo membro, coincide effettivamente con la nota espressione per l'integrale degli urti in un plasma. La grandezza (51,29) si ottiene dalla funzione di correlazione $\langle \delta \varphi(t, \mathbf{r}) \delta f_a(0, 0) \rangle$ derivando rispetto a \mathbf{r} e ponendo quindi $\mathbf{r} = 0$. Troviamo così

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \mathbf{r}} \delta f_a \right\rangle &= \int i \mathbf{k} (\delta \varphi \delta f_a)_{\omega \mathbf{k}} \frac{d\omega d^3 k}{(2\pi)^4} = \\ &= - \int \mathbf{k} \operatorname{Im} (\delta \varphi \delta f_a)_{\omega \mathbf{k}} \frac{d\omega d^3 k}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (51,30)$$

(nell'ultima uguaglianza è inclusa la (51,22)). Ma dalla (51,21) abbiamo (usando le (51,20) e (30,1))

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (\delta \varphi \delta f_a)_{\omega \mathbf{k}} &= \left\{ -\pi \mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}_a} (\delta \varphi^2)_{\omega \mathbf{k}} - \frac{8\pi^2 e''}{k^2 |\epsilon_l|^2} \bar{f}_a \right\} e_a \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_a) = \\ &= -\frac{32\pi e_a}{k^4 |\epsilon_l|^2} \sum_b e_b^2 \int \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \mathbf{p}_a} \bar{f}_b - \bar{f}_a \frac{\partial \bar{f}_b}{\partial \mathbf{p}_b} \right\} \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_b) d^3 p_b \cdot \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_a). \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella (51,30), riduciamo facilmente la (51,29) alla forma dell'integrale degli urti di Balescu-Lenard (§ 47).

Dopo tale deduzione può sembrare strano che per il calcolo dell'integrale degli urti sia stato sufficiente considerare le fluttuazioni in un plasma senza urti. Ciò, tuttavia, è dovuto al fatto che per gli urti in un plasma sono importanti le componenti di Fourier del campo elettrico con $k \gtrsim 1/a \gg 1/l$, il che permette di trascurare gli urti. La situazione qui è completamente analoga a quella che ha avuto luogo per la deduzione dell'equazione cinetica di Boltzmann al § 16. Infatti, l'equazione (16,10) significa esattamente che è stata trascurata l'influenza degli urti sulla funzione di correlazione a coppia.

¹⁾ Questa espressione si deduce dalla formula (75,20) in IX se si divide quest'ultima nelle componenti trasversale e longitudinale e se si sostituisce ϵ in queste componenti rispettivamente con $\epsilon_t(\omega, k)$ e $\epsilon_l(\omega, k)$.

Capitolo V

PLASMA IN UN CAMPO MAGNETICO

§ 52. Costante dielettrica di un plasma freddo senza urti

Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà di un plasma posto in un campo magnetico esterno; esso si dice *magneticamente attivo*. Il campo magnetico costringe le particelle a descrivere traiettorie spiraliformi lungo le linee di forza, esercitando così un'influenza profonda sul comportamento del plasma. Il campo incide, in particolare, anche sulle proprietà dielettriche del plasma.

Ricordiamo preliminarmente alcune proprietà generali del tensore della costante dielettrica in presenza di un campo magnetico con induzione \mathbf{B} (si veda VIII, § 104). L'uguaglianza (28,6) è verificata, così come in assenza di campo:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}). \quad (52,1)$$

Secondo il principio di Onsager, questo tensore è simmetrico se contemporaneamente il campo cambia di segno:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{k}; -\mathbf{B}). \quad (52,2)$$

Sottolineiamo, tuttavia, che questa proprietà si riferisce unicamente a un mezzo in equilibrio termodinamico, mentre la proprietà (52,1) è conseguenza della definizione stessa di $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ¹⁾.

Nel caso generale il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ si può dividere in due parti: hermitiana $(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}^*)/2$ e antihermitiana $(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*)/2$. L'ultima parte definisce la dissipazione dell'energia del campo nel mezzo (cfr. la (30,3)).

Iniziamo lo studio del plasma magneticamente attivo col caso elementare di un plasma « freddo » senza urti. La temperatura di questo plasma è supposta così bassa da poter trascurare il moto termico delle particelle (le condizioni necessarie verranno formulate più avanti). Non esiste in questa approssimazione dispersione spaziale e la costante dielettrica dipende solo dalla frequenza del campo elettrico. Non esiste neanche dissipazione, in modo che il tensore

¹⁾ La formula (52,2) è scritta immediatamente per un mezzo invariante rispetto all'inversione spaziale (è evidente che un plasma in equilibrio ha questa proprietà). In tale mezzo $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sono funzioni particolari di \mathbf{k} . In un mezzo arbitrario le relazioni di Onsager hanno la forma

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(\omega, -\mathbf{k}; -\mathbf{B}). \quad (52,2a)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ è hermitiano, cioè

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}^*(\omega; \mathbf{B}). \quad (52,3)$$

Assieme all'uguaglianza (52,1) di qui segue che

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(-\omega; \mathbf{B}). \quad (52,4)$$

Dividendo il tensore hermitiano nelle parti reale e immaginaria, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon''_{\alpha\beta}$, in virtù delle (52,2-3) avremo

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) &= \varepsilon'_{\beta\alpha}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega; -\mathbf{B}), \\ \varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) &= -\varepsilon''_{\beta\alpha}(\omega; \mathbf{B}) = -\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega; -\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (52,5)$$

In tal modo, in un mezzo senza dissipazione le $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ sono funzioni pari del campo e le $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ funzioni dispari.

Supporremo che l'anisotropia del plasma sia legata soltanto alla presenza di un campo magnetico costante omogeneo (la cui induzione all'interno del plasma indichiamo con \mathbf{B}_0). In questo caso la dipendenza lineare generale tra induzione dielettrica ed intensità di un campo elettrico monocromatico debole ha la forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \mathbf{b} (\mathbf{b} \mathbf{E}) + ig [\mathbf{E} \mathbf{b}], \quad (52,6)$$

dove $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$ e ε_{\perp} , ε_{\parallel} , g sono funzioni di ω e B_0 . Questa relazione in forma tensoriale si scrive come $D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}$, dove

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) b_{\alpha} b_{\beta} + ig \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_{\gamma}. \quad (52,7)$$

Se la direzione dell'asse z coincide con \mathbf{B}_0 , le componenti di questo tensore sono

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{\perp}, & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{\parallel}, \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= ig, & \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (52,8)$$

Dalla condizione del carattere hermitiano del tensore (52,7) risulta che le funzioni ε_{\perp} , ε_{\parallel} , g sono reali; dalla (52,4) segue che ε_{\perp} e ε_{\parallel} sono funzioni pari della frequenza e g una funzione dispari. Il principio di Onsager si verifica automaticamente con l'espressione (52,7).

Nei campi deboli il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ va sviluppato nelle potenze intere del vettore \mathbf{B}_0 . Pertanto per $B_0 \rightarrow 0$ il coefficiente ε_{\perp} tende a un limite finito, ossia alla costante dielettrica in assenza di un campo magnetico. La differenza $\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel} \propto B_0^2$ e il coefficiente $g \propto B_0$.

Il calcolo del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ nell'approssimazione considerata si può effettuare direttamente partendo dalle equazioni del moto delle particelle nei campi variabile \mathbf{E} e costante \mathbf{B}_0 , così come è stata dedotta la formula (31,9) al § 31. Dunque, per gli elettroni abbiamo

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0]. \quad (52,9)$$

La velocità \mathbf{v} varia con il tempo secondo la stessa legge ($e^{-i\omega t}$) del campo \mathbf{E} ; trascurando la variazione spaziale di quest'ultimo nella

regione di moto della particella, dalla (52,9) ricaviamo

$$i\omega \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0].$$

La soluzione di questa equazione vettoriale algebrica contiene termini diretti lungo \mathbf{E} , \mathbf{b} e $[\mathbf{E}\mathbf{b}]$; considerando in modo appropriato i coefficienti in questi termini abbiamo

$$\mathbf{v} = -\frac{ie\omega}{m(\omega^2 - \omega_{Be}^2)} \left\{ \mathbf{E} - \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \mathbf{b} (\mathbf{E}\mathbf{b}) - i \frac{\omega_{Be}}{\omega} [\mathbf{E}\mathbf{b}] \right\}, \quad (52,10)$$

dove $\omega_{Be} = eB_0/mc$. La polarizzazione \mathbf{P} e con essa l'induzione \mathbf{D} generate dal moto degli elettroni sono legate alla velocità degli elettroni mediante la relazione (29,4):

$$-i\omega \mathbf{P} = -i\omega \frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi} = \mathbf{j} = -eN_e \mathbf{v}.$$

Si calcola così anche il contributo ionico alla polarizzazione e si sommano tra loro. Come risultato otteniamo

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}, \\ \epsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\Omega_e^2 + \Omega_i^2}{\omega^2}, \\ g &= \frac{\omega_{Be}\Omega_e^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{Be}^2)} - \frac{\omega_{Bi}\Omega_i^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}. \end{aligned} \quad (52,11)$$

Qui

$$\omega_{Be} = \frac{eB_0}{mc}, \quad \omega_{Bi} = \frac{zeB_0}{Mc} \quad (52,12)$$

sono le cosiddette *frequenze di Larmor* degli elettroni e degli ioni ¹⁾; i valori di questi parametri sono una caratteristica importante di un plasma magneticamente attivo (ricordiamo che questa è la frequenza di rotazione di particelle cariche lungo orbite circolari in un campo magnetico).

I rapporti

$$\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Be}} = \frac{zm}{M}, \quad \frac{\Omega_i}{\Omega_e} = \left(\frac{zm}{M} \right)^{1/2} \quad (52,13)$$

sono grandezze piccole. Per quanto riguarda il rapporto tra le frequenze Ω_e e ω_{Be} (o Ω_i e ω_{Bi}) dipendenti da parametri completamente diversi (dalla densità del plasma e dal campo B_0), esso può variare entro limiti molto larghi.

Notiamo che il contributo ionico alla costante dielettrica di un plasma magneticamente attivo, malgrado la grande massa degli ioni,

¹⁾ Si chiamano anche frequenze *ciclotroniche* o *giromagnetiche*.

può essere commensurabile (per frequenze ω sufficientemente piccole) o persino superiore al contributo elettronico. Per $\omega \rightarrow 0$ due termini in g si elidono mutuamente e $g \rightarrow 0$; è facile vederlo osservando che

$$\Omega_e^2/\omega_{Be} = \Omega_i^2/\omega_{Bi} \quad (52,14)$$

poiché il plasma è elettricamente neutro ($N_e = zN_i$). Ambedue i termini in g restano dello stesso ordine di grandezza per $\omega \sim \omega_{Bi}$; si può trascurare la parte ionica in g per $\omega \gg \omega_{Bi}$. Quanto alla costante dielettrica trasversale ϵ_{\perp} , i due termini sono comparabili soltanto nella regione

$$\omega \sim \omega_{Bi} (M/m)^{1/2} \sim (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}.$$

Qui è possibile trascurare il contributo ionico soltanto per

$$\omega \gg (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}. \quad (52,15)$$

Infine, si può sempre trascurare la parte ionica nella costante dielettrica longitudinale ϵ_{\parallel} (in cui Ω_e^2 e Ω_i^2 figurano sotto forma di somma). Notiamo in proposito che l'indipendenza di ϵ_{\parallel} da B_0 è conseguenza dell'omogeneità del campo B in esame: nei campi omogenei incrociati il campo magnetico non cambia il moto delle particelle lungo la direzione B_0 .

Sofferamoci infine sulle condizioni di applicabilità delle formule dedotte. Applicando al moto delle particelle l'equazione (52,9), abbiamo trascurato la variazione spaziale del campo E nella regione di localizzazione della particella. Le dimensioni di questa regione nella direzione del campo costante B_0 sono definite dalla distanza v_T/ω percorsa dalla particella che si muove con velocità termica media v_T durante il periodo di variazione del campo. Nelle direzioni perpendicolari al campo B_0 queste dimensioni invece sono definite, per $\omega < \omega_B$, dalla grandezza

$$r_B \sim v_T/\omega_B, \quad (52,16)$$

ossia dal raggio delle orbite circolari delle particelle, che si muovono con velocità v_T nel campo magnetico B_0 (raggio di Larmor delle particelle). Per poter trascurare la variazione spaziale del campo E è necessario che queste distanze siano piccole rispetto a quelle su cui varia il campo E (nelle direzioni corrispondenti):

$$v_T |k_z| / \omega \ll 1, \quad v_T k_{\perp} / \omega_B \ll 1, \quad (52,17)$$

dove $k_z \equiv k_{\parallel}$ e k_{\perp} sono le componenti del vettore d'onda parallelamente e perpendicolarmente al campo B_0 . Queste disuguaglianze devono essere soddisfatte per le specie di particelle nel plasma.

Inoltre, vedremo più avanti che la frequenza ω non deve essere troppo vicina a una delle frequenze ω_{Be} , ω_{Bi} o ai loro multipli

(le condizioni (53,17)). In prossimità di queste frequenze si deve tener conto della dispersione spaziale anche se sono soddisfatte le condizioni (52,17). Come vedremo al § 55, ciò elimina i poli che le espressioni (52,11) hanno per $\omega^2 = \omega_{Be}^2$ o $\omega^2 = \omega_{Bi}^2$.

§ 53. Funzione di distribuzione in un campo magnetico

Il tensore della costante dielettrica per un plasma magneticamente attivo senza urti si calcola, se si tiene conto della dispersione spaziale, mediante le funzioni di distribuzione degli elettroni e degli ioni definite dall'equazione cinetica.

Per fissare le idee, scriveremo tutte le formule per gli elettroni. Le equazioni cinetiche per un plasma senza urti sono state dedotte già al § 27. Per gli elettroni l'equazione cinetica ha la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (53,1)$$

Supponiamo che il plasma si trovi in un campo magnetico omogeneo costante \mathbf{B}_0 di grandezza qualsiasi e in un campo elettrico variabile debole in cui

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}' \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (53,2)$$

In questo caso, in virtù delle equazioni di Maxwell, si ha

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{B}' = [\mathbf{k} \mathbf{E}]. \quad (53,3)$$

Sostituiamo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ nella (53,1) e rappresentiamo la funzione di distribuzione nella forma $f = f_0 + \delta f$, dove f_0 è la distribuzione omogenea e stazionaria, in assenza di un campo variabile; la piccola aggiunta δf dipende da t e \mathbf{r} secondo la stessa legge (53,2) per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B}' , cui essa è proporzionale. Separando nell'equazione i termini di ordine zero e uno del campo debole, otteniamo ¹⁾

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] = 0, \quad (53,4)$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) \delta f - \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = e \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v} [\mathbf{k} \mathbf{E}]] \right\}. \quad (53,5)$$

Indichiamo con v_z, k_z le componenti dei vettori \mathbf{v}, \mathbf{k} lungo il campo \mathbf{B}_0 , e con $\mathbf{v}_\perp, \mathbf{k}_\perp$ le componenti nel piano perpendicolare a \mathbf{B}_0 ; sia φ l'angolo tra \mathbf{v}_\perp e il piano \mathbf{k}_\perp , \mathbf{B}_0 (calcolato nella direzione di rotazione di un cavatappi, avvitato lungo il vettore \mathbf{B}_0); le variabili v_z, v_\perp, φ costituiscono le coordinate cilindriche nello spazio \mathbf{v} .

¹⁾ Nel plasma freddo non si doveva includere la forza di Lorentz esercitata da parte del campo debole \mathbf{B}' poiché, trascurando il moto proprio (in assenza di campo) delle particelle, questa forza è un infinitesimo del secondo ordine.

L'equazione (53,5) con queste variabili assume la forma

$$i(k_z v_z + k_\perp v_\perp \cos \varphi - \omega) \delta f + \omega_{Be} \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = e \left\{ E + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{kE}] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (53,6)$$

Dall'equazione (53,4), invece, risulta che $\partial f_0 / \partial \varphi = 0$, vale a dire f_0 può essere una funzione qualsiasi dipendente esclusivamente da p_z e p_\perp

$$f_0 = f_0(p_z, p_\perp) \quad (53,7)$$

(questo risultato è evidente a priori per un plasma senza urti, poiché p_z e p_\perp sono variabili, sulle quali il campo magnetico non incide).

Per rendere più semplice la scrittura delle formule introduciamo le notazioni

$$\alpha = \frac{k_z v_z - \omega}{\omega_{Be}}, \quad \beta = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}, \quad (53,8)$$

$$Q(v_z, v_\perp, \varphi) = \frac{e}{\omega_{Be}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \left\{ E + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{kE}] \right\}. \quad (53,9)$$

Se f_0 dipende unicamente dall'energia degli elettroni $\varepsilon = p^2/2m$, la derivata $\partial f_0 / \partial \mathbf{p} = \mathbf{v} df_0 / d\varepsilon$ e il suo prodotto per il secondo termine tra parentesi si annulla in modo che

$$Q = \frac{e}{\omega_{Be}} \frac{df_0}{d\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (53,10)$$

Con queste notazioni l'equazione (53,6) assume la forma

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} + i(\alpha + \beta \cos \varphi) \delta f = Q(\varphi) \quad (53,11)$$

(omettiamo gli argomenti v_z, v_\perp nella funzione Q). La sua soluzione è

$$\delta f = e^{-i(\alpha\varphi + \beta \sin \varphi)} \int_C^\varphi e^{i(\alpha\varphi' + \beta \sin \varphi')} Q(\varphi') d\varphi',$$

ossia, dopo la sostituzione della variabile d'integrazione $\varphi' = \varphi - \tau$,

$$\delta f = e^{-i\beta \sin \varphi} \int_0^{C-\varphi} e^{i\beta \sin(\varphi-\tau) - i\alpha\tau} Q(\varphi-\tau) d\tau.$$

La costante C è definita dalla condizione che la funzione δf sia periodica rispetto a φ , di periodo 2π . Poiché la funzione integranda (così come il fattore davanti all'integrale) è periodica rispetto a φ , la condizione suindicata verrà soddisfatta se i limiti d'integrazione saranno indipendenti da φ ; a tal fine bisogna porre $C = \infty$ o $C = -\infty$. La scelta di queste due possibilità è determinata dalla regola

di aggiramento di Landau (29,6): si deve integrare per $\omega \rightarrow \omega + i0$, cioè $\alpha \rightarrow \alpha - i0$; questo integrale converge soltanto per $C = \infty$ ¹⁾. Abbiamo infine

$$\begin{aligned} \delta f &= e^{-i\beta \sin \varphi} \int_0^{\infty} e^{i\beta \sin(\varphi - \tau) - i\alpha\tau} Q(\varphi - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \exp \left\{ -i\alpha\tau - 2i\beta \cos \left(\varphi - \frac{\tau}{2} \right) \sin \frac{\tau}{2} \right\} Q(\varphi - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (53,12)$$

Nel limite $B_0 \rightarrow 0$ questa espressione deve trasformarsi nella (29,2). Per effettuare il passaggio al limite, osserviamo che per $\alpha \gg 1$ nell'integrale è importante la regione $\tau \ll 1$. Allora $\sin(\varphi - \tau) \approx \sin \varphi - \tau \cos \varphi$ e l'integrale assume la forma

$$\delta f = Q(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-i(\alpha + \beta)\tau} d\tau = Q(\varphi) \int_0^{\infty} \exp \left\{ -i\tau \frac{k v - \omega}{\omega_{Be}} \right\} d\tau.$$

Calcolando l'integrale per $\omega \rightarrow \omega + i0$ abbiamo

$$\delta f = \frac{Q \omega_{Be}}{i(k v - \omega)}, \quad (53,13)$$

come dovevasi dimostrare.

Se la frequenza del campo coincide con la frequenza di Larmor ω_{Be} o ne è multipla, allora si chiama *risonanza ciclotronica semplice* o *multipla* (degli elettroni). Per lo studio delle proprietà dielettriche di un plasma in prossimità di queste risonanze è comodo un altro metodo di soluzione dell'equazione (53,11), basato sullo sviluppo della funzione cercata in serie di Fourier rispetto alla variabile φ .

Effettuando nella (53,11) la sostituzione

$$\delta f = e^{-i\beta \sin \varphi} g, \quad (53,14)$$

otteniamo per la funzione g l'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} + i\alpha g = e^{i\beta \sin \varphi} Q(v_z, v_{\perp}, \varphi).$$

Cerchiamone la soluzione sotto forma della serie di Fourier

$$g = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\varphi} g_s(v_z, v_{\perp}) \quad (53,15)$$

¹⁾ Questa deduzione dipende dal segno con cui ω figura nell'indice della potenza. Nel caso degli ioni la carica $-e$ va sostituita con ze in modo che $\omega_{Be} \rightarrow -\omega_{Bi}$. Allora per $\omega \rightarrow \omega + i0$ sarebbe $\alpha \rightarrow \alpha + i0$ e per C si dovrebbe prendere il valore $-\infty$.

e per i coefficienti g_s troviamo

$$g_s = Q_s / i (\alpha + s), \quad (53,16)$$

$$Q_s(v_z, v_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\beta \sin \tau - s\tau)} Q(v_z, v_\perp, \tau) d\tau.$$

Lo sviluppo (53,15) garantisce automaticamente la periodicità della funzione δf rispetto a φ .

Notiamo, prima di tutto, che la funzione δf espressa sotto forma della serie (53,14-15) consente di formulare immediatamente le condizioni per le quali si può trascurare la dispersione spaziale. Il vettore d'onda entra nei termini della serie mediante i parametri

$$\beta = k_\perp v_\perp / \omega_B, \quad \alpha + s = -(\omega - s\omega_B - k_z v_z) / \omega_B.$$

La costante dielettrica del plasma è definita dalla funzione di distribuzione per velocità $v \sim v_T$. Il vettore d'onda scompare da questa funzione se

$$k_\perp v_\perp \ll \omega_B, \quad |\omega - s\omega_B| \gg |k_z| v_T. \quad (53,17)$$

La prima delle disuguaglianze (53,17) e la seconda con $s = 0$ coincidono con le condizioni (52,17). Vediamo che, oltre a queste condizioni, è necessario ancora che la frequenza ω non sia troppo vicina a una delle risonanze ciclotroniche.

Nell'intorno delle risonanze ciclotroniche la funzione di distribuzione può essere espressa, per certe condizioni, da un solo termine della serie di Fourier. E precisamente, deve essere

$$|k_z| v_T \ll \omega_B, \quad |\omega - n\omega_B| \ll \omega_B, \quad (53,18)$$

dove n è uno dei numeri $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si vede facilmente che inoltre l' n -esimo termine dello sviluppo (53,15) è grande rispetto agli altri. Infatti,

$$g_n \sim \frac{Q_n \omega_B}{|k_z v_T| + |\omega - n\omega_B|} \gg Q_n,$$

mentre per $s \neq n$ sarà $g_s \ll Q_s$ (poiché $|s\omega_B - \omega| \gg \omega_B$). Limitandoci a questo termine otteniamo per la funzione di distribuzione degli elettroni

$$\delta f = Q_n \frac{\omega_{Be} \exp \left[i \left(n\varphi - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}} \sin \varphi \right) \right]}{i [k_z v_z - (\omega - n\omega_{Be})]}, \quad (53,19)$$

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[-i \left(n\tau - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}} \sin \tau \right) \right] Q(v_z, v_\perp, \tau) d\tau.$$

La dipendenza della funzione di distribuzione dall'angolo φ è definita esplicitamente da questa formula. In particolare, per $n = 0$ e $k_{\perp} \rightarrow 0$ la distribuzione non dipende in generale da φ . L'origine di questa proprietà è evidente dalla condizione $\omega \ll \omega_{Be}$ (la (53,18) con $n = 0$): la frequenza della rotazione di Larmor è grande rispetto alla frequenza di variazione del campo, il che conduce alla funzione di distribuzione « media » rispetto all'angolo di rotazione ¹⁾.

§ 54. Costante dielettrica di un plasma maxwelliano magneticamente attivo

Il contributo elettronico al tensore della costante dielettrica si calcola in base alla funzione di distribuzione mediante la formula

$$P_{\alpha} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} E_{\beta} = \frac{e}{i\omega} \int v_{\alpha} \delta f d^3p \quad (54,1)$$

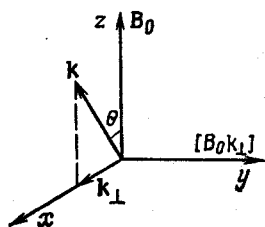


Fig. 15

(e analogamente il contributo ionico con la sostituzione $e \rightarrow -ze$). Per un plasma maxwelliano si può integrare esplicitamente in questa espressione rispetto a d^3p .

La funzione δf è data dall'integrale (53,12) e, inoltre, secondo la definizione (53,10),

$$Q = -\frac{eE_{\nu}}{\omega_{Be}T} f_0. \quad (54,2)$$

Riscriviamo questo integrale in forma più compatta introducendo al posto dei vettori $\mathbf{k} = (k_z, \mathbf{k}_{\perp})$ e $\mathbf{E} = (E_z, \mathbf{E}_{\perp})$ i vettori

$$\mathbf{K} = \left(k_z \tau, 2\tilde{\mathbf{k}}_{\perp} \sin \frac{\tau}{2}\right), \quad \tilde{\mathbf{E}} = (E_z, \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}), \quad (54,3)$$

dove $\tilde{\mathbf{k}}_{\perp}$ è il vettore \mathbf{k}_{\perp} ruotato di un angolo $\tau/2$ (nel piano perpendicolare a \mathbf{B}_0) e $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}$ il vettore \mathbf{E}_{\perp} ruotato di un angolo τ . Allora δf assume la forma

$$\delta f = -\frac{e}{T\omega_{Be}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{\omega_{Be}} (\omega\tau - \mathbf{K}\mathbf{v}) \right\} f_0(p) (\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{v}) d\tau,$$

dove $f_0(p)$ è la funzione di distribuzione di Maxwell.

Poniamo questa espressione nella (54,1) e sostituiamo la variabile d'integrazione $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ secondo la formula

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - i\mathbf{K}T/m\omega_{Be}.$$

¹⁾ Le considerazioni corrispondenti sono state esposte in modo più particolareggiato per una deduzione analoga al § 1.

L'integrazione rispetto a d^3u è elementare e dà

$$P = \frac{ie^2 N_e}{m\omega\omega_{Be}} \int_0^\infty \left(\tilde{E} - \frac{T}{m\omega_{Be}^2} (\tilde{E}K) K \right) \exp \left[-\frac{i\omega\tau}{\omega_{Be}} - \frac{K^2 T}{2m\omega_{Be}^2} \right] d\tau. \quad (54,4)$$

Inoltre, in accordo con la definizione (54,3),

$$K^2 = k_z^2 \tau^2 + 4k_\perp^2 \sin^2 \frac{\tau}{2}.$$

Riscrivendo l'espressione (54,4) nelle componenti, troviamo le componenti del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$. A tale scopo conveniamo sulla scelta degli assi coordinati: l'asse z è diretto lungo B_0 , l'asse x lungo k_\perp , l'asse y lungo $[B_0 k_\perp]$ (fig. 15). Dopo semplici calcoli otteniamo

$$\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \frac{i\Omega_e^2}{\omega\omega_{Be}} \int_0^\infty \kappa_{\alpha\beta} \exp \left\{ i\tau \frac{\omega + i0}{\omega_{Be}} - \frac{1}{2} k_z^2 r_{Be}^2 \tau^2 - 2k_\perp^2 r_{Be}^2 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right\} d\tau, \quad (54,5)$$

dove

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} &= \cos \tau - (k_\perp r_{Be})^2 \sin^2 \tau, \\ \kappa_{yy} &= \cos \tau + 4(k_\perp r_{Be})^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}, \\ \kappa_{zz} &= 1 - (k_z r_{Be})^2 \tau^2, \\ \kappa_{xy} &= -\kappa_{yx} = -\sin \tau + 2(k_\perp r_{Be})^2 \sin \tau \sin^2 \frac{\tau}{2}, \\ \kappa_{xz} &= \kappa_{zx} = -k_z k_\perp r_{Be}^2 \tau \sin \tau, \\ \kappa_{yz} &= -\kappa_{zy} = -2k_z k_\perp r_{Be}^2 \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} \end{aligned} \quad (54,6)$$

($r_{Be} = v_{Te}/\omega_{Be}$ è il raggio di Larmor degli elettroni).

È da notare che le uguaglianze

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} \quad (54,7)$$

sono evidenti a priori. Infatti, per un sistema di coordinate fisso, in accordo con il principio di Onsager, deve essere $\varepsilon_{\alpha\beta}(B_0) = \varepsilon_{\beta\alpha}(-B_0)$. Per la scelta convenuta sopra degli assi coordinati legati alle direzioni B_0 e k_\perp , le direzioni degli assi y e z diventano inverse con la sostituzione $B_0 \rightarrow -B_0$. Perciò su questi assi avremo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}(B_0) &= -\varepsilon_{yx}(-B_0), \quad \varepsilon_{xz}(B_0) = -\varepsilon_{zx}(-B_0), \\ \varepsilon_{yz}(B_0) &= \varepsilon_{zy}(-B_0). \end{aligned} \quad (54,8)$$

D'altra parte, B_0 (direzione dell'asse z) è uno pseudovettore e k_\perp , $[B_0 k_\perp]$ (direzioni degli assi x e y) sono vettori propri. Perciò, in virtù

dell'invarianza rispetto all'inversione delle coordinate, le componenti ϵ_{xz} e ϵ_{yz} (contenenti una sola volta l'indice z) devono essere funzioni dispari di B_0 e tutte le altre componenti funzioni pari. Da qui e dalla (54,8) deriva la (54,7).

E da notare che in accordo con le relazioni (54,7) le parti hermitiane e antihermitiane delle diverse componenti $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon'_{\alpha\beta} + i\epsilon''_{\alpha\beta}$ si esprimono in modo diverso attraverso le loro parti reale e immaginaria. E precisamente, la divisione in parti hermitiana e antihermitiana è data dalla somma seguente:

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \epsilon'_{xx} & i\epsilon''_{xy} & \epsilon'_{xz} \\ -i\epsilon''_{xy} & \epsilon'_{yy} & i\epsilon''_{yz} \\ \epsilon'_{xz} & -i\epsilon''_{yz} & \epsilon'_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\epsilon''_{xx} & \epsilon'_{xy} & i\epsilon''_{xz} \\ -\epsilon'_{xy} & i\epsilon''_{yy} & \epsilon'_{yz} \\ i\epsilon''_{xz} & -\epsilon'_{yz} & i\epsilon''_{zz} \end{pmatrix}. \quad (54,9)$$

Anche se abbiamo effettuato tutti i calcoli per la parte elettronica della costante dielettrica, formule completamente analoghe sussistono anche per il contributo ionico. Il passaggio al caso degli ioni si realizza con la sostituzione $\Omega_e, v_{Te} \rightarrow \Omega_i, v_{Ti}$; $\omega_{Be} \rightarrow -\omega_{Bi}$ e con la sostituzione contemporanea del limite superiore dell'integrale nella (54,5) con $-\infty$ (si veda la nota a pag. 266). Sostituendo in seguito la variabile d'integrazione $\tau \rightarrow -\tau$ torniamo alle vecchie espressioni (54,5-6) con $\Omega_i, v_{Ti}, \omega_{Bi}$ al posto di $\Omega_e, v_{Te}, \omega_{Be}$ con la sola differenza che κ_{xy} e κ_{yz} cambiano di segno. In tal modo la regola di passaggio dal contributo elettronico a quello ionico nella costante dielettrica consiste nella sostituzione dei parametri elettronici con ionici e nel contemporaneo cambiamento di segno delle componenti ϵ_{xy} e ϵ_{yz} .

§ 55. Smorzamento di Landau in un plasma magneticamente attivo

Il moto termico delle particelle in un plasma implica la comparsa di una parte antihermitiana nel tensore $\epsilon_{\alpha\beta}$. In un plasma senza urti, in cui esiste la dissipazione vera e propria dell'energia, questa parte del tensore è legata allo smorzamento di Landau.

Abbiamo visto al § 30 che il meccanismo dello smorzamento di Landau è legato alla trasmissione dell'energia da parte del campo elettromagnetico alle particelle per le quali $\omega = kv$, cioè per le quali la proiezione della velocità v sulla direzione k coincide con la velocità di fase dell'onda ω/k . In un plasma magneticamente attivo questa condizione cambia un po': devono coincidere le proiezioni della velocità della particella e della velocità di fase dell'onda sulla direzione del campo costante B_0 :

$$v_z k_z = \omega. \quad (55,1)$$

Infatti, il moto della particella, perpendicolare a \mathbf{B}_0 , segue traiettorie circolari e non può essere accompagnato dalla trasmissione sistematica di energia dal campo alla particella. Se su un tratto della traiettoria circolare la particella si muove in fase con l'onda e riceve da essa energia, sul tratto opposto della traiettoria la particella cederà la stessa energia al campo.

In un plasma magneticamente attivo esiste, tuttavia, un altro meccanismo di dissipazione senza urti legato alla rotazione di Larmor delle particelle. Nel sistema di coordinate che si muove lungo il campo \mathbf{B}_0 con la particella (con velocità v_z) quest'ultima descrive un'orbita circolare con frequenza ω_B . Questa particella rappresenta, dal punto di vista elettrodinamico, un oscillatore, che emette radiazione di frequenza ω_B (radiazione magnetica di ritardo). Inversamente, essendo collocato in un campo variabile esterno, l'oscillatore assorbe con la stessa frequenza. La frequenza dell'onda elettromagnetica nel sistema di coordinate in moto (rispetto al plasma), modificata dall'effetto Doppler, vale $\omega' = \omega - k_z v_z$. Perciò all'assorbimento suindicato parteciperanno le particelle per le quali

$$\omega - k_z v_z = \omega_B.$$

Se $k_\perp = 0$, il campo dell'onda è omogeneo nelle direzioni trasversali (rispetto a \mathbf{B}_0), vale a dire che la forza agente sull'oscillatore non dipende dalle sue coordinate. Queste sono le condizioni nelle quali l'oscillatore assorbe esclusivamente alla sua frequenza ω_B . Se, invece, $k_\perp \neq 0$, la forza agente sull'oscillatore dipende dalle sue coordinate per cui compare l'assorbimento anche alle frequenze multiple, cioè per le condizioni

$$\omega - k_z v_z = n\omega_B, \quad (55,2)$$

dove n è un intero qualsiasi (positivo o negativo). Il meccanismo di dissipazione descritto si chiama *smorzamento ciclotronico di Landau*; a seconda dei valori di n si parla di smorzamento a una risonanza ciclotronica semplice ($n = \pm 1$) o multipla.

Quindi, uno smorzamento notevole può avere luogo nelle regioni di frequenze in cui

$$|\omega - n\omega_B| \leq |k_z| v_T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (55,3)$$

(il valore $n = 0$ corrisponde alla condizione (55,1)). Queste linee di assorbimento di risonanza esistono sia alle frequenze elettroniche ω_{Be} che a quelle ioniche ω_{Bi} .

Dal punto di vista matematico alle condizioni (55,1-2) corrispondono i poli, che hanno in questi punti i diversi termini dello sviluppo della funzione di distribuzione in serie di Fourier (53,14-16). Le parti antiermitiane del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ provengono dai residui, per aggragamento di questi poli, nell'integrale (54,1), secondo la regola di Landau. Il passaggio al limite $B_0 \rightarrow 0$ ha un carattere matematico.

originale. Nel campo magnetico i valori « polari » v_z (per k_z dato) formano una successione discreta definita dall'equazione (55,2). Via via che il campo diminuisce i poli si avvicinano e nel limite $B_0 = 0$ i valori polari v_z dipendono non dal numero discreto n , bensì dal parametro continuo $k_\perp v_\perp$ in accordo con la condizione

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = k_z v_z + k_\perp v_\perp$$

(come è stato mostrato passando dalla (53,12) alla (53,13)).

Per esempio, calcoliamo il tensore della costante dielettrica nella regione di risonanza ciclotronica semplice degli elettroni ($n = 1$). Supporremo inoltre che

$$|k_z| v_{Te} / \omega_{Be} \ll 1, \quad k_\perp v_{Te} / \omega_{Be} \ll 1. \quad (55,4)$$

Allora per la funzione di distribuzione si può ricorrere a un solo termine della serie di Fourier, cioè all'espressione (53,19) corrispondente al valore n considerato. In questo caso, in virtù della seconda condizione (55,4), questa funzione di distribuzione può essere sviluppata in potenze di k_\perp . Nel caso $n = 1$ in questo sviluppo ci si può limitare al termine nullo, in accordo con il fatto che l'assorbimento ciclotronico alla frequenza ω_{Be} non richiede che il campo esterno sia disomogeneo sul piano xy .

Scriviamo così la funzione di distribuzione nella forma

$$\delta f = Q_1 \frac{\omega_{Be} e^{i\varphi}}{i [k_z v_z - (\omega - \omega_{Be})]}, \quad (55,5)$$

dove

$$Q_1 = - \frac{ef_0}{2\pi T \omega_{Be}} \int_0^{2\pi} E v e^{-i\tau} d\tau.$$

Dopo aver scritto

$$E\mathbf{v} = E_x v_\perp \cos \tau + E_y v_\perp \sin \tau + E_z v_z$$

e integrato otteniamo

$$Q_1 = - \frac{ev_\perp}{2T\omega_{Be}} f_0 (E_x - iE_y). \quad (55,6)$$

Con questa funzione di distribuzione il vettore polarizzazione (54,1) ha solo le componenti x e y . Dopo l'integrazione in $v_\perp dv_\perp d\varphi$ esse diventano

$$P_x = -iP_y = (E_x - iE_y) \frac{e^2 N_e}{2\omega m k_z} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{mv_z^2}{2T} \right) \frac{dv_z}{i_z - (\omega - \omega_{Be})/k_z - i0 \operatorname{sign} k_z}.$$

L'integrale di questa forma si esprime mediante la funzione F definita dalla formula (31,3). Infine troviamo le componenti del tensore dielettrico ¹⁾

$$\varepsilon_{xx} - 1 = \varepsilon_{yy} - 1 = i\varepsilon_{xy} = \frac{\Omega_e^2}{2\omega(\omega - \omega_{Be})} F\left(\frac{\omega - \omega_{Be}}{\sqrt{2}\nu_{Te}|k_z|}\right), \quad (55,7)$$

$$\varepsilon_{zz} - 1 = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

La parte antihermitiana di questo tensore, che descrive lo smorzamento, è

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} = \frac{\pi^{1/2}\Omega_e^2}{2^{3/2}\omega|k_z|\nu_{Te}} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2\nu_{Te}^2 k_z^2}\right\}. \quad (55,8)$$

Quanto alla parte hermitiana, nell'intorno del punto $\omega = \omega_{Be}$ essa ha la forma

$$\varepsilon'_{xx} - 1 = \varepsilon'_{yy} - 1 = -\varepsilon'_{xy} = -\frac{\Omega_e^2(\omega - \omega_{Be})}{2\omega\nu_{Te}^2 k_z^2}, \quad (55,9)$$

$$|\omega - \omega_{Be}|/\nu_{Te}|k_z| \ll 1.$$

Nel punto stesso essa cambia di segno e si annulla. Vediamo qui in che modo l'inclusione della dispersione spaziale elimina i poli della costante dielettrica di un plasma freddo (52,11): la dipendenza discontinua, rappresentata dalla curva tratteggiata nella fig. 16, va sostituita dalla dipendenza continua rappresentata dalla curva in grassetto ²⁾.

Nel limite $|k_z| \rightarrow 0$ l'espressione (55,8) si riduce alla funzione δ :

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} \rightarrow \frac{\pi\Omega_e^2}{2\omega} \delta(\omega - \omega_{Be}) \quad (55,10)$$

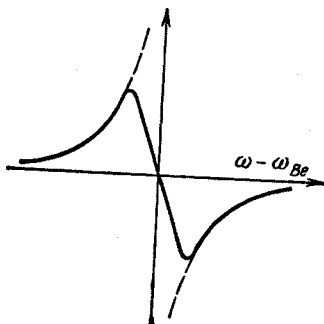


Fig. 16

(infatti, per $\omega - \omega_{Be} \neq 0$, la funzione (55,8) si annulla nel passaggio al limite; al tempo stesso, l'integrale in $d\omega$ di questa funzione è uguale a $\pi\Omega_e^2/2\omega$ qualunque sia il valore k_z). Questo risultato è completamente chiaro: in assenza di dispersione spaziale ($k \rightarrow 0$) la larghezza della linea di assorbimento si annulla e lo smorza-

¹⁾ Il polo $\nu_z = (\omega - \omega_{Be})/k_z$ si aggira dal basso o dall'alto a seconda del segno di k_z ; questa circostanza implica la comparsa del segno di modulo per k_z nell'argomento della funzione.

²⁾ L'espressione (55,7) non gode, naturalmente, della proprietà (52,1). Questa proprietà comparirebbe soltanto se si fosse tenuto conto della linea di assorbimento nell'intorno $\omega = \omega_{Be}$ e anche della linea in prossimità della frequenza $\omega = -\omega_{Be}$.

mento resta soltanto se ω coincide precisamente con ω_{Be} . Si può usare la formula (55,10) al posto della (55,8) nelle espressioni integrali in ω .

È da notare che la formula (55,10) può essere dedotta direttamente dalle espressioni (52,11) per la costante dielettrica di un plasma freddo mediante la regola di aggiramento di Landau. Secondo questa regola, in presenza di un polo nella frequenza ω quest'ultima va intesa come $\omega + i0$. Perciò i fattori polari che figurano nelle (52,11) si devono intendere effettivamente nel senso seguente:

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \rightarrow \frac{1}{2\omega_{Be}} \left[\frac{1}{\omega - \omega_{Be} + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_{Be} + i0} \right]$$

e secondo la regola (29,8):

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \rightarrow \frac{P}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{i\pi}{2\omega_{Be}} [\delta(\omega - \omega_{Be}) - \delta(\omega + \omega_{Be})]. \quad (55,11)$$

Effettuando nelle (52,11) questa sostituzione otteniamo la (55,10).

Per $k_z = 0$ (cioè per $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) in un plasma magneticamente attivo non esiste smorzamento di Landau: la velocità delle particelle scompare dalle condizioni (55,1-2) e queste non possono essere soddisfatte (tranne che ω coincida esattamente con qualche $n\omega_B$)¹⁾. Sottolineiamo che questa proprietà è legata all'approssimazione non relativistica; in un plasma relativistico lo smorzamento di Landau (ciclotronico) può esistere anche per $k_z = 0$. La frequenza di rotazione attorno alla direzione \mathbf{B}_0 per una particella relativistica carica di energia ε vale

$$\omega_B \frac{mc^2}{\varepsilon} = \omega_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(con la precedente definizione di ω_B). Questo valore deve figurare a secondo membro della condizione (55,2) al posto di ω_B . In particolare, per $k_z = 0$ avremo

$$\omega = n\omega_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad (55,12)$$

perché questa condizione possa verificarsi è necessario soltanto che $\omega < n\omega_B$.

Lo smorzamento di Landau in un plasma relativistico magneticamente attivo può esistere anche nel limite $\mathbf{k} \rightarrow 0$ (a differenza non solo del plasma non relativistico magneticamente attivo, ma anche di quello relativistico in assenza di campo magnetico). Esso si realizza a causa delle particelle che si trovano in risonanza ciclotronica semplice con il campo variabile omogeneo (la condizione (55,12) con $n = 1$), e, quindi, esiste per frequenze $\omega < \omega_B$ (si veda il problema 2).

¹⁾ Nel limite $B_0 \rightarrow 0$ lo smorzamento, ovviamente, ricompare a causa degli elettroni che soddisfano la condizione $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$.

P R O B L E M I

1. Trovare il tensore della costante dielettrica di un plasma magneticamente attivo per $\omega \ll |k_z| v_{Te}$; si suppongono soddisfatte anche le condizioni (55,4).

Soluzione. Nell'approssimazione di ordine zero rispetto al piccolo parametro $k_{\perp} v_{Te} / \omega_{Be}$ la funzione di distribuzione per questo caso (il termine $s = 0$ della serie di Fourier (53,14-15)) è

$$\delta f = Q_0 \frac{\omega_{Be}}{i(k_z v_z - \omega)},$$

dove

$$Q_0 = -\frac{ef_0}{\omega_{Be} T} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E v \, d\tau = -\frac{e v_z E_z}{\omega_{Be} T} f_0.$$

Con questa funzione δf il vettore polarizzazione \mathbf{P} ha la sola componente z e di tutte le componenti del tensore $\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}$ è diversa da zero la sola

$$\epsilon_{zz} - 1 = \frac{4\pi e^2}{\omega T} \int \frac{f_0(p) v_z^2 d^3 p}{k_z v_z - \omega - i0}.$$

Dopo la sostituzione identica

$$v_z^2 = \frac{1}{k_z} (k_z v_z - \omega) v_z + \frac{\omega}{k_z} v_z$$

l'integrale del primo termine si annulla (integrando rispetto a dp_z); il secondo termine conduce al risultato

$$\epsilon_{zz} - 1 = \frac{\Omega_e^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left[F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} |k_z| v_{Te}} \right) + 1 \right].$$

La parte immaginaria di questa espressione è

$$\epsilon''_{zz} = \frac{\pi^{1/2} \omega \Omega_e^2}{2^{1/2} |k_z|^3 v_{Te}^3} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right).$$

2. Trovare la parte antihermitiana del tensore della costante dielettrica per un plasma elettronico magneticamente attivo ultrarelativistico nel limite $k \rightarrow 0$.

Soluzione. Nel caso relativistico l'equazione cinetica (53,5) resta la stessa, ma trasformata nella forma (53,6), la relazione relativistica $\mathbf{p} = e\mathbf{v}/c^2$ (ϵ è l'energia dell'elettrone) al posto di $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ conduce alla sostituzione di ω_{Be} con $\omega_{Be} mc^2/e$; dopo questa sostituzione restano valide anche tutte le formule successive del § 53. Per $k = 0$ lo smorzamento proviene unicamente dalla risonanza ciclotronica semplice; perciò nel calcolare la parte antihermitiana di $\epsilon_{\alpha\beta}$ è sufficiente tener conto solo del termine $s = 1$ nelle (53,14-15). Analogamente alle (55,5-6) troviamo

$$\delta f = -\frac{ie p_{\perp} c^2 e^{i\psi} f_0}{2T\epsilon (\omega - \omega_{Be} mc^2/\epsilon)} (E_x - iE_y).$$

La funzione f_0 ultrarelativistica ($T \gg mc^2$) vale ¹⁾

$$f_0 = \frac{N_e c^3}{8\pi T^3} e^{-\epsilon/T}.$$

¹⁾ In questa espressione è scritto con precisione ultrarelativistica il coefficiente di normalizzazione; non si può ancora porre $\epsilon \approx cp$, in quanto si deve integrare rispetto a p da 0 a ∞ .

Il vettore polarizzazione si calcola come

$$\mathbf{P} = \frac{e}{i\omega} \int \frac{p c^2}{\varepsilon} \delta f d^3 p,$$

dove con $d^3 p$ si deve intendere $p^2 dp d\phi = p \varepsilon d\varepsilon d\phi/c^2$. Dopo l'integrazione in $d\phi$ e la sostituzione $cp = (\varepsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2}$ si ottiene

$$\varepsilon_{xx} - 1 = \varepsilon_{yy} - 1 = i\varepsilon_{xy} = -\frac{\Omega_e^2 m c^2}{12\omega^2 T^4} \int_{mc^2}^{\infty} \frac{(\varepsilon^2 - m^2 c^4)^{3/2} e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon}{\varepsilon - \omega_{Be} m c^2 / \omega + i0}.$$

L'integrale ha parte immaginaria se il polo $\varepsilon = \omega_{Be} m c^2 / \omega$ giace nella regione d'integrazione, cioè se $\omega < \omega_{Be}$. In questo caso troviamo infine

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} = \frac{\pi \Omega_e^2 \omega_{Be}^3}{12\omega^5} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2 \omega_{Be}}{\omega T}\right).$$

§ 56. Onde elettromagnetiche in un plasma freddo magneticamente attivo

Deduciamo l'equazione generale che definisce la dipendenza della frequenza dal vettore d'onda (o, come si suole dire, la legge di dispersione) per onde monocromatiche libere, che si propagano in un mezzo con tensore dielettrico arbitrario $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$.

Per un campo elettromagnetico dipendente dal tempo e dalle coordinate secondo la legge $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ le equazioni di Maxwell (28,2) assumono la forma ¹⁾

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad [\mathbf{k}\mathbf{B}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (56,1)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{D} = 0. \quad (56,2)$$

Ponendo la prima delle formule (56,1) nella seconda, otteniamo

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = -[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{E}]] = \mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}),$$

ossia, nelle componenti,

$$E_\alpha k^2 - k_\alpha k_\beta E_\beta = \frac{\omega^2}{c^2} D_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (56,3)$$

La condizione di compatibilità di questo sistema di equazioni lineari omogenee è che sia nullo il determinante

$$\left| k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right| = 0. \quad (56,4)$$

¹⁾ Non confondere il campo magnetico variabile dell'onda \mathbf{B} con il campo costante \mathbf{B}_0 !

Questa è l'equazione della dispersione cercata ¹⁾. Per k dato (reale) essa definisce le frequenze $\omega(k)$ (in generale, complesse) o, come si dice, lo spettro delle *autooscillazioni del mezzo*. Nel caso generale, in cui esistono dispersione di frequenza e spaziale, l'equazione (56,4) definisce un'infinità di rami della funzione $\omega(k)$.

Consideriamo onde elettromagnetiche in un plasma freddo magneticamente attivo, con il tensore della costante dielettrica dato dalle formule (52,7) e (51,11) ²⁾. Essendo questo tensore hermitiano, è chiaro a priori che i valori $k^2 c^2 / \omega^2$ definiti dall'equazione (56,4) sono reali.

Poiché in assenza di dispersione spaziale le $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dipendono unicamente da ω , allora l'equazione della dispersione (56,4) è algebrica rispetto a k . Sviluppando il determinante otteniamo, dopo un semplice calcolo ³⁾

$$A \left(\frac{kc}{\omega} \right)^4 + B \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 + C = 0, \quad (56,5)$$

dove

$$A = \frac{1}{k^2} \varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta \equiv \varepsilon_t, \quad (56,6)$$

$$B = -\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_\perp^2 - g^2) \sin^2 \theta, \quad (56,7)$$

$$C = \varepsilon_\parallel (\varepsilon_\perp^2 - g^2) \quad (56,8)$$

(θ è l'angolo tra k e B_0). Per valori dati di ω e θ l'equazione (56,5) dà due valori di k^2 , cioè nel plasma possono propagarsi, in generale, due tipi di onde ⁴⁾.

Consideriamo dapprima i casi di propagazione delle onde solo longitudinalmente ($\theta = 0$) e solo trasversalmente ($\theta = \pi/2$) rispetto al campo magnetico, che presentano particolarità specifiche.

Per $\theta = 0$ le radici dell'equazione di dispersione danno

$$\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 = \varepsilon_\perp \pm g = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Be})} - \frac{\Omega_i^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Bi})}. \quad (56,9)$$

Dalle equazioni (56,3) si vede facilmente che queste onde sono trasversali ($E_z = 0$) e polarizzate su un cerchio ($E_y/E_x = \mp i$). Per $\omega = \omega_{Be}$ o per $\omega = \omega_{Bi}$ le espressioni (56,9) diventano infinite e ciò

¹⁾ Nell'ottica dei cristalli essa si chiama *equazione di Fresnel*.

²⁾ Le onde elettromagnetiche in un plasma freddo magneticamente attivo sono state studiate originariamente, trascurando il ruolo degli ioni, da E. V. Appleton (1928) e da H. Lassen (1927).

³⁾ Per il calcolo è opportuno prendere uno dei piani coordinati (il piano xz , ad esempio) passante attraverso B_0 e k .

⁴⁾ Si suole definire le onde corrispondenti *ordinarie e straordinarie*. Questi termini, tuttavia, non hanno qui lo stesso senso che nell'ottica dei cristalli monoassiali, cioè nessuna di queste onde si comporta come un'onda in un mezzo isotropo.

corrisponde alla risonanza, ossia alla coincidenza della frequenza e della direzione della rotazione del vettore \mathbf{E} con la frequenza e la direzione della rotazione di Larmor degli elettroni o ioni. Nella fig. 17 è rappresentato, a titolo d'illustrazione, l'andamento schematico della grandezza $n^2 = (ck/\omega)^2$ in funzione di ω . Per $\omega \rightarrow 0$ i valori n^2 tendono al valore limite

$$1 + \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Bi}^2} = 1 + \frac{c^2}{u_A^2}$$

(qui si è trascurata ω_{Bi} rispetto a ω_{Be} ; u_A verrà definita più avanti con la formula (56,18)). Alla propagazione di onde che non si smorzano corrispondono, ovviamente, solo i tratti delle curve (rappresentati da linee continue) sui quali $n^2 > 0$.

Per $\theta = 0$ l'equazione (56,5) è verificata anche per $\varepsilon_{\parallel} = 0$, il che corrisponde alle onde di plasma longitudinali ordinarie, con frequenza $\omega \approx \Omega_e$ indipendente da \mathbf{k} .

Per $\theta = \pi/2$ l'equazione della dispersione ha due radici

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \varepsilon_{\parallel},$$

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \varepsilon_{\perp} - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (56,10)$$

Alla prima corrisponde un'onda con legge di dispersione indipendente da \mathbf{B}_0 :

$$\omega^2 \approx c^2 k^2 + \Omega_e^2.$$

Quest'onda è trasversale ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) e linearmente polarizzata, inoltre $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$. Alla seconda radice (56,10) corrisponde un'onda con il campo $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, avente componenti sia longitudinale che trasversale rispetto a \mathbf{k} . Se la frequenza è così grande da poter trascurare il contributo ionico in $\varepsilon_{\alpha\beta}$, cioè $\omega \gg (\omega_{Be}\omega_{Bi})^{1/2}$ (condizione (52,15)), allora in quest'onda ¹⁾

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\Omega_e^2(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2 - \Omega_e^2)}. \quad (56,11)$$

Nel caso generale di angoli θ arbitrari (diversi da 0 o da $\pi/2$) osserviamo, prima di tutto, che per ogni valore esistono frequenze

¹⁾ Le oscillazioni del plasma in cui gli ioni sono inessenziali, in generale si chiamano oscillazioni *ad alta frequenza*; quelle in cui gli ioni hanno importanza si dicono a *bassa frequenza*.

per cui il coefficiente A nell'equazione (56,5) si annulla:

$$\varepsilon_{\perp} \equiv \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta = 1 - \frac{\Omega_e^2 + \Omega_i^2}{\omega^2} \cos^2 \theta -$$

$$- \left[\frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right] \sin^2 \theta = 0. \quad (56,12)$$

Se per le frequenze definibili da questa equazione (le cosiddette *frequenze delle risonanze di plasma*) è soddisfatta anche la condizione di « lentezza » $\omega \ll kc$, allora in accordo con il § 32 ad esse corrispondono le autooscillazioni longitudinali del plasma. Al tempo stesso, l'annullarsi del coefficiente di k^4 nell'equazione (56,5) quadratica (rispetto a k^2) significa che una delle sue radici diventa infinita; per $A \rightarrow 0$ queste radici valgono $-C/B$ e $-B/A$.

L'equazione (56,12) è cubica rispetto a ω^2 e ha tre radici reali. È facile definirle usando la limitatezza dei rapporti Ω_i/Ω_e e ω_{Bi}/ω_{Be} . Due radici si ottengono trascurando il contributo ionico alla (56,12) e valgono

$$\omega_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2} (\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2) \pm \frac{1}{2} [(\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (56,13)$$

È necessario, tuttavia, tener conto degli ioni nella regione $\omega \approx \omega_{Bi}$, in cui si trova la terza radice, per la quale si ottiene facilmente l'espressione

$$\omega_3^2 \approx \omega_{Bi}^2 \left(1 - z \frac{m}{M} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \quad (56,14)$$

(dove si è supposto che $\Omega_e \gg \omega_{Bi}$). Le formule (56,13) e (56,14) per $\omega_2(\theta)$ e $\omega_3(\theta)$ sono inapplicabili per angoli θ così vicini a $\pi/2$ che $\cos \theta \ll m/M$. In questa regione

$$\omega_2^2 \equiv \omega_{2ib}^2 = \frac{\omega_{Be}^2 (\Omega_i^2 + \omega_{Bi}^2)}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}, \quad \omega_3^2 = \frac{\Omega_e^2 \omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (56,15)$$

È impossibile trascurare il ruolo degli ioni sia per ω_3 che per ω_2 .

Nella fig. 18 è rappresentata schematicamente la dipendenza delle frequenze $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dall'angolo θ ¹⁾. Le curve $\omega_1(\theta)$ e $\omega_2(\theta)$ non si intersecano mai. La prima di esse comincia (per $\theta = 0$) dalla più grande delle frequenze Ω_e e ω_{Be} e la seconda da quella più piccola. Per $\theta = \pi/2$ esse assumono, rispettivamente, i valori

$$\omega_{1ib} = (\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^{1/2} \quad (56,16)$$

e ω_{2ib} . Le frequenze ω_{1ib} e ω_{2ib} si chiamano, rispettivamente, frequenze *ibride superiore* e *inferiore*. Per $\Omega_e^2 \gg \omega_{Be}^2$ (e, quindi, a priori $\Omega_i^2 \gg \omega_{Bi}^2$) la seconda di esse è $\omega_{2ib} = (\omega_{Be} \omega_{Bi})^{1/2}$.

¹⁾ È da notare immediatamente che oscillazioni con la frequenza ω_3 esistono di fatto solo in un intervallo ristretto di angoli in prossimità di $\pi/2$. Nella restante regione di angoli queste oscillazioni si smorzano fortemente per l'assorbimento ciclotronico alla risonanza ionica semplice.

La posizione delle frequenze ω_1 , ω_2 , ω_3 incide notevolmente sulla disposizione dei diversi rami dello spettro definito dall'equazione della dispersione (56,5). In quanto equazione quadratica rispetto a $(ck/\omega)^2$, essa ha due radici per ω e θ dati. Seguendo (per θ dato) la variazione di queste radici come funzioni di ω che diventano infinite, è facile giungere alla fig. 19, nella quale è rappresentato schematicamente l'andamento di queste funzioni. I punti d'intersezione delle curve con l'asse delle ascisse sono definiti dall'equazione $C = 0$,

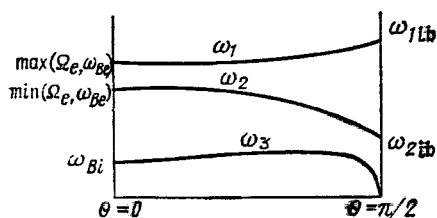


Fig. 18

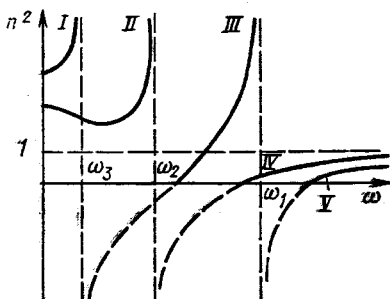


Fig. 19

cioè da $\varepsilon_{\parallel} = 0$ o $\varepsilon_{\perp}^2 = g^2$. La posizione di questi punti non dipende dall'angolo θ ; uno di essi (la radice dell'equazione $\varepsilon_{\parallel} = 0$) è sempre $\omega \approx \Omega_e$.

Lo spettro delle autooscillazioni di un plasma magneticamente attivo contiene, quindi, in tutto cinque rami. Due di essi (il ramo I e il ramo II nella fig. 19) raggiungono la regione delle oscillazioni a bassa frequenza; i valori limite (per $\omega \rightarrow 0$) della velocità di fase in questi rami sono

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)_{\text{I}} = \frac{u_A |\cos \theta|}{(1 + u_A^2/c^2)^{1/2}}, \quad \left(\frac{\omega}{k}\right)_{\text{II}} = \frac{u_A}{(1 + u_A^2/c^2)^{1/2}}, \quad (56,17)$$

dove

$$u_A = c \frac{\omega_{Bi}}{\Omega_i} = \frac{B_0}{(4\pi N_i M)^{1/2}}; \quad (56,18)$$

questa grandezza si chiama *velocità di Van Alphen*. Le espressioni (56,17) si ricavano facilmente dall'equazione (56,5) mediante le espressioni limite

$$\varepsilon_{\perp} \approx 1 + \frac{u_A^2}{c^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} \approx -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}, \quad g \sim O(\omega).$$

Per $u_A \ll c$ le velocità di fase (56,17) valgono, rispettivamente, $u_A |\cos \theta|$ e u_A . Questi valori limite corrispondono alle onde esistenti in un plasma freddo secondo le equazioni ordinarie della magnetoidrodinamica (si veda VIII, § 69). Infatti, lo spettro delle onde

magnetoidrodinamiche contiene tre rami. In tutti questi tre rami la funzione $\omega(k)$ è lineare, ma in generale dipende da k :

$$(\omega/k)_A = u_A^2 \cos^2 \theta,$$

$$(\omega/k)_V = \frac{1}{2} \{u_s^2 + u_A^2 + [(u_s^2 + u_A^2)^2 - 4u_s^2 u_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}, \quad (56,19)$$

$$(\omega/k)_L = \frac{1}{2} \{u_s^2 + u_A^2 - [(u_s^2 + u_A^2)^2 - 4u_s^2 u_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\},$$

(u_s è la velocità del suono calcolata formalmente secondo la compressibilità adiabatica del mezzo). La velocità di fase del primo di questi rami (detti *onde di Van Alphen*) coincide direttamente con il valore limite della velocità del primo ramo (56,17). Per passare al plasma freddo nella seconda formula è necessario porre $u_s = 0$ (poiché nel gas $u_s \sim (T/M)^{1/2}$). In questo caso $(\omega/k)_V$ (le onde corrispondenti si chiamano *onde magnetoacustiche veloci*) coincide con il valore limite $(\omega/k)_{II}$. Per quanto riguarda il terzo ramo, $(\omega/k)_L$ (si chiama onda *magnetoacustica lenta*), la sua velocità si annulla per $u_s \rightarrow 0$ e perciò essa non esiste in un plasma freddo. Notiamo che l'ipotesi sulla temperatura fredda del plasma permette di trascurare la dispersione termica delle velocità degli ioni e di descriverle idrodinamicamente anche in assenza di urti. La condizione $u_A \ll c$ consente di trascurare le correnti di spostamento nelle equazioni della magnetoidrodinamica.

Nel caso inverso di grandi frequenze le velocità di fase di due rami (IV e V) tendono ai valori $\omega/k = c$ corrispondenti alle onde trasversali ad alta frequenza in un plasma isotropo, come deve essere in quanto per $\omega \gg \omega_{Be}$ il campo magnetico è inessenziale.

Soffermiamoci infine sul caso delle onde che si possono avere per $\Omega_e \gg \omega_{Be}$; la frequenza di risonanza $\omega_2 \approx \omega_{Be} \cos \theta$. Consideriamo pertanto la regione di frequenze intermedie (sul ramo II) tra ω_2 e $\omega_3 \approx \omega_{Bi}$, definita con le disuguaglianze

$$\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be} \cos \theta, \quad \omega \ll \Omega_e^2 / \omega_{Be}. \quad (56,20)$$

La condizione $\omega \gg \omega_{Bi}$ permette di trascurare il contributo ionico a g , e in virtù della condizione $\omega \ll \omega_{Be}$ si avrà

$$\varepsilon_{xy} = ig = -i \frac{\Omega_e^2}{\omega \omega_{Be}}. \quad (56,21)$$

Per le condizioni (56,20) si avrà anche $\varepsilon_{||} \gg g \gg \varepsilon_{\perp}$.

La soluzione cercata dell'equazione di dispersione si ottiene in modo più diretto se quest'ultima si scrive nella forma

$$\left| k^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} - k_{\alpha} k_{\beta} \varepsilon_{\gamma\delta}^{-1} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{\alpha\beta} \right| = 0, \quad (56,22)$$

e se nella (56,4) si passa dal tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ al suo inverso (esprimendo cioè E nelle equazioni (57,3) in funzione di D). Le componenti del

tensore inverso sono

$$\varepsilon_{xx}^{-1} = \varepsilon_{yy}^{-1} \approx -\varepsilon_{\perp}/g^2, \quad \varepsilon_{zz}^{-1} = 1/\varepsilon_{\parallel}, \quad \varepsilon_{xy}^{-1} = -\varepsilon_{yx}^{-1} \approx i/g,$$

e la più grande di esse è ε_{xy}^{-1} . Trascurando le altre componenti (e considerando il piano xz passante per B_0 e k) otteniamo l'equazione di dispersione

$$\begin{vmatrix} -\omega^2/c^2 & ik_z^2/g \\ -ik^2/g & -\omega^2/c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

$$\omega = k^2 c^2 \frac{\omega_{Be}}{\Omega_e^2} |\cos \theta| = \frac{c B_0 |\cos \theta|}{4\pi e N_e} k^2. \quad (56,23)$$

Queste onde si dicono *elicoidali*¹⁾ e sono di origine puramente elettronica.

Il nome di queste onde è legato al carattere della loro polarizzazione. Per una scelta appropriata degli assi coordinati dall'uguaglianza $kD = 0$ (56,2) otteniamo

$$D_x \sin \theta + D_z \cos \theta = 0. \quad (56,24)$$

Dalle equazioni (56,3) scritte nella forma

$$[k^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} - k_{\alpha} k_{\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma}^{-1}] D_{\beta} = \frac{\omega^2}{c^2} D_{\alpha}, \quad (56,25)$$

ricaviamo $D_x = -i |\cos \theta| D_y$. Nella stessa approssimazione (conservando cioè di tutte le $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ la sola ε_{xy}^{-1}) il campo elettrico dell'onda si trova interamente nel piano xy perpendicolare a B_0 : $E_z = = \varepsilon_{z\beta}^{-1} D_{\beta} = 0$. Le componenti sono

$$E_x = \varepsilon_{xy}^{-1} D_y, \quad E_y = \varepsilon_{yx}^{-1} D_x = -\varepsilon_{xy}^{-1} D_x,$$

e dalla (56,24) deriva

$$E_y = i |\cos \theta| E_x. \quad (56,26)$$

In tal modo, l'onda è polarizzata ellitticamente nel piano perpendicolare a B_0 ; per $\theta = \pi/2$ la polarizzazione diventa lineare. Nel sistema di coordinate $\xi\eta\zeta$ con l'asse ζ diretto lungo k abbiamo

$$E_{\xi} = -i \frac{|\cos \theta|}{\cos \theta} E_y, \quad E_{\zeta} = E_{\xi} \operatorname{tg} \theta. \quad (56,27)$$

Il vettore E ruota attorno alla direzione k descrivendo un cono circolare.

Notiamo che l'espressione (56,21) per ε_{xy} ha un significato fisico semplice. Per $\omega_{Be} \gg \omega$ (assieme alla condizione (52,17) $k_{\perp} v_{Te}/\omega_{Be} = k_{\perp} r_{Be} \ll 1$ sottintesa ovunque) si può supporre che il moto degli elettroni trasversale (rispetto a B_0) avvenga nel campo E costante

¹⁾ Nelle applicazioni geofisiche si chiamano *atmosferiche fischianti*.

e omogeneo. Ma per il moto di una carica nei campi incrociati \mathbf{E} e \mathbf{B}_0 , omogenei e costanti la velocità trasversale media (velocità di deriva elettrica) è

$$\bar{v}_\perp = c [\mathbf{E} \mathbf{B}_0] / B_0^2 \quad (56,28)$$

(si veda II, § 22). A questa velocità corrisponde precisamente l'espressione (56,21). In tal modo, le onde elicoidali sono legate alla deriva elettrica degli elettroni nel plasma.

§ 57. Influenza del moto termico sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un plasma magneticamente attivo

Se si tiene conto del moto termico delle particelle, l'equazione di dispersione diventa, in generale, trascendente e conduce a un insieme non numerabile di rami della funzione $\omega(\mathbf{k})$. La maggior parte di queste oscillazioni, tuttavia, si smorza fortemente. Solo in casi eccezionali lo smorzamento è debole e le oscillazioni si possono propagare sotto forma di onde. A questi casi si riferiscono, prima di tutto, le onde studiate al paragrafo precedente, per le quali il moto termico (se le condizioni (52,17) e (53,17) sono soddisfatte) conduce soltanto a piccole correzioni alla legge della dispersione e a un piccolo coefficiente di smorzamento di Landau.

Abbiamo visto, tuttavia, che per le onde in un plasma freddo esistono regioni di frequenze in cui il rapporto kc/ω diventa grande a piacere (gli intorni delle risonanze di plasma). Ma per $k \rightarrow \infty$ le condizioni (52,17) sono violate a priori in modo che è necessario tener conto del moto termico. Mostriamo ora che l'inclusione del moto termico già come piccola correzione alla costante dielettrica elimina la divergenza delle radici dell'equazione di dispersione e conduce ad alcune proprietà qualitativamente nuove dello spettro delle oscillazioni del plasma (B. N. Geršman, 1956). In questo caso, come vedremo, possono ancora essere soddisfatte le condizioni che garantiscono che lo smorzamento di Landau sia esponenzialmente piccolo, in modo che è sempre possibile trascurare la parte antihermitiana $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Per fissare le idee, tratteremo l'intorno delle risonanze di plasma ad alta frequenza, dove è sufficiente tener conto del moto termico dei soli elettroni.

I termini correttivi in $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sono proporzionali a $(kv_{Te})^2$ ¹⁾. Le stesse correzioni compariranno anche nei coefficienti A , B , C dell'equazione di dispersione (56,5). Se ci si propone di studiare solo la radice divergente di questa equazione, è sufficiente tener conto dei termini correttivi solo nel coefficiente A , che si annulla (senza correzioni) nel punto di risonanza.

¹⁾ Essi si deducono dai termini del primo ordine nello sviluppo dell'espressione integranda nella (54,5) in potenze di k^2 .

Rappresentiamo questo coefficiente nell'intorno della frequenza di risonanza (di ω_1 , ad esempio) nella forma

$$A = a_r (\omega - \omega_1) - A_{1r} \left(\frac{v_{Te} k}{\omega_1} \right)^2. \quad (57,1)$$

Il secondo termine rappresenta la correzione proveniente dal moto termico. I coefficienti a_r e A_{1r} vanno considerati nel punto $\omega = \omega_1$, in modo che non dipendono più dalla variabile ω (ma dipendono, ovviamente, dalla direzione k , cioè dall'angolo θ). Ponendo $\omega = \omega_1$ anche nei coefficienti B e C (e indicando questi loro valori con B_r e C_r), otteniamo l'equazione di dispersione nell'intorno della frequenza di risonanza nella forma

$$\left[a_r (\omega - \omega_1) - A_{1r} \frac{v_{Te}^2}{c^2} \left(\frac{kc}{\omega_1} \right)^2 \right] \left(\frac{kc}{\omega_1} \right)^4 + B_r \left(\frac{kc}{\omega_1} \right)^2 + C_r = 0. \quad (57,2)$$

Cerchiamo la radice di questa equazione, che per $v_{Te} \rightarrow 0$ si trasforma in

$$\left(\frac{kc}{\omega_1} \right)^2 \approx - \frac{B_r}{a_r (\omega - \omega_1)},$$

ovvero

$$\omega - \omega_1 = - \frac{B_r \omega_1^2}{a_r c^2 k^2}. \quad (57,3)$$

Essendo $(kc/\omega_1)^2$ grande in questa soluzione, per trovarla si deve omettere nella (57,2) il termine C_r , non contenente la variabile grande suindicata. Allora otteniamo la seguente legge della dispersione:

$$\omega - \omega_1 = \frac{A_{1r}}{a_r} \left(\frac{kv_{Te}}{\omega_1} \right)^2 - \frac{B_r}{a_r} \left(\frac{\omega_1}{kc} \right)^2. \quad (57,4)$$

Qui si devono distinguere due casi a seconda del segno di A_{1r} (le grandezze a_r e B_r , invece, sono sempre positive)¹⁾.

Nella fig. 20 la legge della dispersione (57,4) per $A_{1r} > 0$ è rappresentata dalla curva continua che interseca l'asse delle ascisse nel punto ²⁾

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{cv_{Te}} \sqrt{\frac{B_r}{A_{1r}}}. \quad (57,5)$$

Per $v_{Te} \rightarrow 0$ questo punto scompare a destra all'infinito e si torna alla curva corrispondente alla legge della dispersione (57,3) per un plasma freddo (la curva tratteggiata nella fig. 20).

¹⁾ La positività di B_r si vede facilmente dalle espressioni (56,6-7): escludendo ε_{\parallel} mediante la condizione $A = 0$, troviamo $B_r = \varepsilon_{\perp}^2 \tan^2 \theta + g^2 \sin^2 \theta > 0$. Dall'espressione (56,6) per A e dalle espressioni (52,11) per ε_{\perp} e ε_{\parallel} segue che $\partial A / \partial \omega > 0$; perciò è positivo anche $a_r = (\partial A / \partial \omega)_{\omega = \omega_1}$.

²⁾ Notiamo che per questo k il rapporto kv_{Te}/ω_1 contiene $(v_{Te}/c)^{1/2}$ e perciò è piccolo. Questa è la suddetta condizione di uno smorzamento di Landau piccolo.

È da notare che l'inclusione del moto termico implica, quindi, il prolungamento del ramo dello spettro delle oscillazioni alla regione $\omega > \omega_1$. Nel limite di campo esterno nullo è questo ramo a corrispondere alle oscillazioni di plasma longitudinali ordinarie: in assenza di campo il coefficiente $B_r = 0$, la frequenza ω_1 coincide con Ω_e e tutta la curva di dipendenza di $\omega - \Omega_e$ da k^2 si riduce alla retta uscente dall'origine delle coordinate, la cui equazione coincide con la (32,5) ¹⁾.

Se il moto termico viene trascurato, le oscillazioni nelle risonanze di plasma sono longitudinali. Sottolineiamo che con l'inclusione

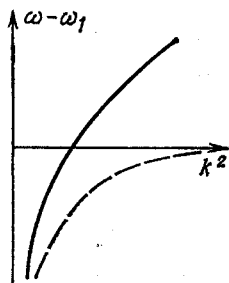


Fig. 20

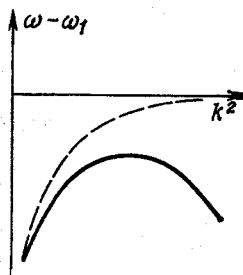


Fig. 21

della dispersione spaziale questa proprietà, a rigore, scompare: la grandezza $A = \varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / k^2 \equiv \varepsilon_l$ diventa dipendente da k e l'uguaglianza $\varepsilon_l = 0$ (condizione per la longitudinalità delle oscillazioni) non è più compatibile con il legame tra le stesse variabili ω , k , θ definito dall'equazione di dispersione. Come nei punti stessi delle risonanze di plasma (che in generale perdono la loro distinguibilità) anche nei loro intorno le onde restano, tuttavia, quasi longitudinali: essendo piccolo A e lenta l'onda (piccolo ω/kc), la componente trasversale $E^{(t)}$ è piccola (secondo la (32,10)) rispetto a $E^{(l)}$.

Torniamo al caso $A_{1r} < 0$. Il carattere della dipendenza di $\omega - \omega_1$ da k per questo caso è rappresentato nella fig. 21. La curva non entra nella regione $\omega > \omega_1$, piegandosi indietro nel punto di massimo con le coordinate

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{cv_{Te}} \left(\frac{B_r}{|A_{1r}|} \right)^{1/2}, \quad \omega - \omega_1 = \frac{2v_{Te}}{a_r c} (|A_{1r}| B_r)^{1/2}. \quad (57,6)$$

¹⁾ Ciò premesso, le onde corrispondenti (in un plasma magneticamente attivo) al tratto superiore della curva continua nella fig. 20 si chiamano onde di plasma, a differenza di quelle ordinarie o straordinarie corrispondenti al tratto inferiore di questa curva. Sottolineiamo, tuttavia, la convenzionalità di questa terminologia: abbiamo a che fare infatti con un unico ramo dello spettro delle oscillazioni, il cui punto di intersezione con l'asse delle ascisse ($\omega = \omega_1$) non ha niente di speciale.

Per $v_{Te} \rightarrow 0$ questo punto si allontana a destra all'infinito, avvicinandosi contemporaneamente all'asse delle ascisse e ritorniamo così alla curva della legge (57,3).

A titolo di ulteriore esempio consideriamo le onde trasversali in prossimità della risonanza ciclotronica elettronica che si propagano lungo il campo magnetico. Trascurando il moto termico, la legge di dispersione di queste onde è data dalla formula (56,9) (con i segni inferiori), dove nell'intorno del punto $\omega = \omega_{Be}$ si ha ¹⁾

$$\omega = \omega_{Be} \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{k^2 c^2} \right) \quad (57,7)$$

(inoltre $kc \gg \Omega_e$) e tutto lo spettro giace per $\omega < \omega_{Be}$.

Lo studio di queste onde con l'inclusione del moto termico degli elettroni richiede di costruire un'equazione della dispersione con il tensore delle costanti dielettriche (55,7) riferite appunto alla regione della risonanza ciclotronica ²⁾. Sviluppando il determinante (56,4) (con il vettore \mathbf{k} diretto lungo l'asse z), otteniamo

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})} F \left(\frac{\omega - \omega_{Be}}{\sqrt{2} kv_{Te}} \right). \quad (57,8)$$

All'esterno della linea dell'assorbimento di risonanza, cioè per $|\omega_{Be} - \omega| \gg kv_{Te}$ (ma, ovviamente, come prima $|\omega_{Be} - \omega| \ll \omega_{Be}$) questa relazione assume la forma

$$\frac{k^2 c^2}{\omega_{Be}^2} = - \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}(\omega - \omega_{Be})} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be} kv_{Te}} \exp \left(- \frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right).$$

Di qui si riottiene la legge della dispersione (57,7) per la parte reale della frequenza e l'espressione

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_{Be} \frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}} \left(\frac{\Omega_e}{ck} \right)^4 \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_e}{ck} \right)^4 \left(\frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}} \right)^2 \right\} \quad (57,9)$$

per il coefficiente di smorzamento di Landau.

All'ulteriore avvicinarsi di ω a ω_{Be} , nella regione $|\omega_{Be} - \omega| \ll kv_{Te}$ il coefficiente di smorzamento cresce diventando comparabile con la frequenza stessa ω ; in questa regione non si può più parlare di propagazione di onde.

¹⁾ Per fissare le idee, supponiamo che non soltanto $\omega_{Be} - \omega \ll \omega_{Be}$, ma anche $\Omega_e > \omega_{Be}$ in modo che si può trascurare a priori l'unità a secondo membro della (56,9).

²⁾ Ricordiamo che le formule (55,7) suppongono anche che sia soddisfatta la condizione (55,4), cioè $\omega_{Be} \gg kv_T$

§ 58. *Equazioni idrodinamiche di un plasma magneticamente attivo*

Se le dimensioni spaziali caratteristiche L , in un plasma in moto sono grandi rispetto alle lunghezze del cammino libero

$$L \gg l, \quad (58,1)$$

allora si può supporre che, grazie agli urti, in ogni piccola parte del plasma si stabilisca l'equilibrio termodinamico, con proprie condizioni locali di temperatura (uguali per elettroni e ioni), di pressione, ecc. In questi casi il moto del plasma può essere descritto dalle equazioni idrodinamiche macroscopiche.

Le equazioni della magnetoidrodinamica sono state dedotte in VIII, §§ 65, 66, dove si è supposto, tuttavia, che i coefficienti cinetici del mezzo (la viscosità, la conducibilità termica) fossero indipendenti dal campo magnetico. A tal fine nel plasma devono essere soddisfatte le condizioni

$$v_i \gg \omega_{Bi}, \quad v_e \gg \omega_{Be}$$

(la seconda condizione deriva dalla prima). Queste condizioni diventano spesso troppo rigide, per cui è necessario costruire equazioni idrodinamiche esenti dalle restrizioni suindicate ¹⁾.

L'equazione di continuità per la densità della massa ρ conserva, ovviamente, la sua forma usuale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad (58,2)$$

dove \mathbf{V} è la velocità macroscopica. Restano immutate anche l'equazione di Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_\alpha \right] + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_\alpha = - \frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (58,3)$$

e l'equazione di conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho U + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \\ = - \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + W \right) - (\sigma' \mathbf{V}) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}] + \mathbf{q} \right], \end{aligned} \quad (58,4)$$

dove $\sigma'_{\alpha\beta}$ è il tensore degli sforzi viscosi; $(\sigma' \mathbf{V})$ indica il vettore con componenti $\sigma'_{\alpha\beta} V_\beta$; \mathbf{q} è la densità del flusso d'energia che include sia la parte dissipativa, legata alla conducibilità termica e ai fenomeni termoelettrici, sia il trasporto di energia da parte della corrente per convezione (si veda più avanti la definizione (58,8)); U e W sono l'energia interna e la funzione termica del mezzo, riferite all'unità

¹⁾ Inoltre, in VIII, §§ 65, 66 nelle equazioni sono stati omissi i termini che descrivono l'effetto termoelettrico.

di massa. Il tensore $\sigma'_{\alpha\beta}$ e il vettore \mathbf{q} devono essere espressi in funzione dei gradienti delle grandezze termodinamiche e della velocità; la forma di queste espressioni dipende appunto dal campo magnetico.

L'equazione (58,3) richiede la seguente osservazione. In essa è inclusa la forza esercitata sul plasma da parte del campo magnetico (l'ultimo termine a secondo membro), ma viene omessa la forza

$$e(zN_i - N_e) \mathbf{E}$$

esercitata da parte del campo elettrico. In questo caso l'omissione è giustificata: dalla condizione (58,1) segue che per di più $L \gg a$ e perciò il plasma è quasi-neutro, poiché si può porre $zN_i = N_e$ e nel plasma non esistono cariche non compensate ¹⁾.

Alle equazioni (58,2-4) si devono aggiungere le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico quasi-stazionario (equazioni senza corrente di spostamento):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (58,5)$$

Ricordiamo che la quasi-stazionarietà del campo significa che la frequenza di variazione ω è piccola nel senso $\omega \ll c/L$. In questo caso il campo elettrico, indotto dal campo magnetico variabile, è $E \sim \omega LB/c \ll B$; questa è la regione per cui nella (58,4) bisogna tener conto della densità di energia del solo campo magnetico, e non di quello elettrico. Notiamo anche che l'omissione della corrente di spostamento si trova in accordo con l'ipotesi che il plasma sia quasi-neutro: dall'ultima delle equazioni (58,5) deriva $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Infine, si deve associare un'equazione, che esprima la « legge generalizzata di Ohm », della forma

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] = \mathbf{F}, \quad (58,6)$$

dove \mathbf{F} è una combinazione lineare della corrente \mathbf{j} e dei gradienti delle grandezze termodinamiche. Ricordiamo (si veda VIII, § 63) che l'origine della combinazione di \mathbf{E} e \mathbf{B} a primo membro della (58,6) è legata alla trasformazione di \mathbf{E} al passaggio dal sistema a riposo di un dato elemento di volume del mezzo al sistema di riferimento in cui questo elemento si muove con la velocità \mathbf{V} .

In un plasma quasi-neutro la concentrazione relativa delle sue componenti (elettroni e ioni) rappresenta una grandezza invariata ($N_e/N_i = z$). Perciò solo la temperatura e la pressione sono variabili

¹⁾ Questo ragionamento è basato sulla disuguaglianza $l \gg a$. Ricordiamo che ovunque abbiamo a che fare con un plasma completamente ionizzato. In un plasma parzialmente ionizzato la disuguaglianza $l \gg a$ può essere non soddisfatta per la diminuzione della lunghezza del cammino libero, grazie agli urti con atomi neutri, e allora la condizione $l \gg a$ va considerata come una condizione supplementare, necessaria per poter trascurare la forza elettrica di volume.

termodinamiche indipendenti; il problema di esprimere F e q in funzione dei gradienti di queste grandezze (e della corrente j) coincide formalmente con lo stesso problema nella teoria degli effetti termogalvanomagnetici nei metalli (si veda VIII, § 27)¹).

Le relazioni tra j e q , da una parte, e il campo e i gradienti delle grandezze termodinamiche, dall'altra parte, si scrivono in una forma, che generalizza le relazioni (44,12-13):

$$F_{\alpha} + \frac{1}{e} \frac{\partial \mu_e}{\partial x_{\alpha}} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1} j_{\beta} + \alpha_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_{\beta}}, \quad (58,7)$$

$$q_{\alpha} = -\frac{\mu_e}{e} j_{\alpha} + \beta_{\alpha\beta} j_{\beta} - \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_{\beta}}. \quad (58,8)$$

Qui μ_e è il potenziale chimico degli elettroni e i tensori $\sigma'_{\alpha\beta}$, $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ dipendono dal campo magnetico B , come da un parametro. La mancanza del termine $-\varphi j$ a primo membro della (58,8) (cfr. la (44,13)) è dovuta al fatto che la grandezza φj è inclusa già nella (58,4) mediante il vettore di Poynting nella densità del flusso d'energia. È facile vederlo trasformando mediante le equazioni di Maxwell (58,5) la sua divergenza; nel caso stazionario, considerato nel § 44, abbiamo

$$-\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [EB] = jE = -\operatorname{div} (\varphi j).$$

Quindi, il flusso d'energia q nella (58,8) non contiene più il trasporto di energia $-e\varphi$ da parte delle particelle.

In virtù del principio di Onsager i coefficienti nelle relazioni (58,7-8) sono legati mutuamente dalle relazioni

$$\sigma_{\alpha\beta}(B) = \sigma_{\beta\alpha}(-B), \quad \kappa_{\alpha\beta}(B) = \kappa_{\beta\alpha}(-B), \quad (58,9)$$

$$\beta_{\alpha\beta}(B) = T\alpha_{\beta\alpha}(-B). \quad (58,10)$$

Poiché B è l'unico parametro vettoriale a nostra disposizione, la dipendenza dei tensori dalla direzione $b = B/B$ può essere scritta nella forma generale

$$\alpha_{\alpha\beta}(B) = \alpha_1 \delta_{\alpha\beta} + \alpha_2 b_{\alpha} b_{\beta} + \alpha_3 e_{\alpha\beta\gamma} b_{\gamma} \quad (58,11)$$

(e analogamente per gli altri tensori), dove i coefficienti scalari α_1 , α_2 , α_3 sono funzioni del modulo del campo B . Questa dipendenza soddisfa la condizione di simmetria rispetto all'inversione: B , vettore assiale, e le sue componenti non cambiano di segno per inversione, come deve essere per le componenti dei tensori propri $\alpha_{\alpha\beta}$, ... È da notare che le espressioni della forma (58,11) soddisfano automaticamente le relazioni (58,9) e la (58,10) diventa

$$\beta_{\alpha\beta}(B) = T\alpha_{\alpha\beta}(B). \quad (58,12)$$

¹ Ricordiamo di nuovo che si tratta di plasma completamente ionizzato. L'esistenza di più specie di particelle pesanti (ioni diversi, atomi neutri) richiederebbe di tener conto dei processi di diffusione corrispondenti.

Nell'applicazione concreta delle espressioni (58,7-8) nella magnetoidrodinamica è più comodo esprimere il gradiente del potenziale chimico in funzione dei gradienti della pressione e della temperatura mediante le relazioni

$$\nabla \mu_e = -s_e \nabla T + \frac{1}{N_e} \nabla P_e, \quad \mu_e = w_e - T s_e,$$

dove $P_e = N_e T = Pz/(1+z)$ è la pressione parziale degli elettroni nel plasma, s_e e w_e sono l'entropia e la funzione termica della componente elettronica del plasma, riferite a una sola particella. Riscriviamo infine le relazioni (58,7-8) nella forma vettoriale seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] + \frac{1}{eN_e} \nabla P_e = \\ = \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \mathcal{R} [\mathbf{B}\mathbf{j}] + \alpha_{\parallel} (\nabla T)_{\parallel} + \alpha_{\perp} (\nabla T)_{\perp} + \mathcal{N} [\mathbf{B}\nabla T], \end{aligned} \quad (58,13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} + \frac{w_e}{e} \mathbf{j} = \alpha_{\parallel} T \mathbf{j}_{\parallel} + \alpha_{\perp} T \mathbf{j}_{\perp} + \\ + \mathcal{N} T [\mathbf{B}\mathbf{j}] - \kappa_{\parallel} (\nabla T)_{\parallel} - \kappa_{\perp} (\nabla T)_{\perp} + \mathcal{L} [\mathbf{B}\nabla T], \end{aligned} \quad (58,14)$$

dove si sono introdotte nuove notazioni per i coefficienti (sono tutti funzioni di \mathbf{B}) e gli indici \parallel e \perp indicano le componenti longitudinali e trasversali dei vettori rispetto a \mathbf{B} . La definizione del coefficiente α_{\parallel} nella (58,13) differisce dalla sua definizione nella (58,7) per l'inclusione in esso della grandezza s_e/e . I coefficienti \mathcal{R} , \mathcal{N} , \mathcal{L} descrivono rispettivamente i cosiddetti effetti Hall, Nernst e Leduc-Righi. Ricordiamo anche che i termini $\mathcal{N} [\mathbf{B}\mathbf{j}]$ nella (58,13) e $\mathcal{L} [\mathbf{B}\nabla T]$ nella (58,14) rappresentano gli effetti cinetici senza dissipazione; essi scompaiono dai prodotti $\mathbf{E}\mathbf{j}$ e $\mathbf{q}\nabla T$ e perciò non sono legati all'aumento dell'entropia.

Quanto al tensore degli sforzi viscosi $\sigma'_{\alpha\beta}$, la sua espressione generale in funzione dei gradienti della velocità macroscopica è stata già dedotta al § 13. Applicandola a un plasma, questa espressione si semplifica un po', poiché ambedue i coefficienti della viscosità seconda ζ e ζ_1 si annullano. L'annullarsi del coefficiente ζ è una proprietà generale di tutti i gas monoatomici, cui si riferisce anche un plasma. La scomparsa del termine con ζ_1 verrà spiegata al prossimo paragrafo.

È opportuno raggruppare un po' gli altri termini nella (13,18) tenendo presente che in un plasma l'influenza del campo magnetico sulla viscosità è, in generale, un effetto forte (e non debole come in un gas neutro); perciò non ha senso mettere in risalto il coefficiente di viscosità ordinario η . Rappresentiamo qui $\sigma'_{\alpha\beta}$ in una forma che differisce dalla (13,18) solo per la sostituzione del termine contenente η con il termine

$$\eta_0 (3b_{\alpha}b_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \left(b_{\gamma}b_{\delta}V_{\gamma\delta} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right), \quad (58,15)$$

dove (al posto di \mathbf{h}) $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$; per l'opportunità di questa definizione di η_0 si veda più avanti la nota a pag. 301.

Se l'asse z è diretto nella direzione \mathbf{b} , le componenti del tensore degli sforzi assumono la forma

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= -\eta_0 \left(V_{zz} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \eta_1 (V_{xx} - V_{yy}) + 2\eta_3 V_{xy}, \\ \sigma'_{yy} &= -\eta_0 \left(V_{zz} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) + \eta_1 (V_{xx} - V_{yy}) - 2\eta_3 V_{xy}, \\ \sigma'_{zz} &= 2\eta_0 \left(V_{zz} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right), \\ \sigma'_{xy} &= 2\eta_1 V_{xy} - \eta_3 (V_{xx} - V_{yy}), \\ \sigma'_{xz} &= 2\eta_2 V_{xz} + 2\eta_4 V_{yz}, \\ \sigma'_{yz} &= 2\eta_2 V_{yz} - 2\eta_4 V_{xz}.\end{aligned}\tag{58,16}$$

§ 59. Coefficienti cinetici di un plasma in un campo magnetico forte

Per il calcolo dei coefficienti cinetici di un plasma magneticamente attivo è necessario, come al solito, cercare le funzioni di distribuzione delle particelle nella forma $f = f_0 + \delta f$, dove δf è una piccola correzione alla distribuzione d'equilibrio locale, proporzionale al corrispondente gradiente delle grandezze termodinamiche. Con la sostituzione di questa espressione nell'equazione cinetica, ad esempio, per gli elettroni

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} f_e \tag{59,1}$$

poniamo $f_e = f_{0e}$ nei primi tre termini a primo membro. Inoltre il quarto termine si annulla (poiché il vettore $\partial f_{0e}/\partial \mathbf{p}$ è diretto lungo \mathbf{v}). Perciò si deve conservare il termine con δf_e e, quindi, troviamo la seguente espressione per δf_e ¹⁾:

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_e), \tag{59,2}$$

dove I è l'integrale degli urti linearizzato.

Notiamo, prima di tutto, che i coefficienti di conducibilità longitudinale elettrica σ_{\parallel} e termica κ_{\parallel} non dipendono in generale da \mathbf{B} , restando uguali ai loro valori in assenza di campo magnetico (cioè σ e κ sono scalari ordinari). Infatti, da considerazioni di simmetria, è evidente a priori che per coincidenza delle direzioni dei vettori \mathbf{E} o ∇T con la direzione di \mathbf{B} la funzione di distribuzione δf non

¹⁾ Ricordiamo che, nel calcolare la costante dielettrica del plasma al § 29, il termine contenente il campo magnetico in questa equazione è stato ommesso, poiché per \mathbf{E} e \mathbf{B} piccoli esso è un infinitesimo del secondo ordine. Nel problema qui in esame il campo magnetico \mathbf{B} (contrariamente al campo elettrico \mathbf{E}) non è supposto affatto piccolo.

dipende dall'angolo φ di rotazione della velocità trasversale \mathbf{v}_\perp nel piano perpendicolare al campo \mathbf{B} . Fra l'altro,

$$[\mathbf{v}\mathbf{B}] \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{B}{m} \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi}$$

e, di conseguenza, per $\partial \delta f / \partial \varphi = 0$ il campo magnetico scompare in generale dall'equazione cinetica ¹⁾.

Per la stessa ragione resta indipendente dal campo magnetico (e quindi coincide con la viscosità ordinaria η) anche il coefficiente di viscosità η_0 , cioè il coefficiente che definisce gli sforzi viscosi $\sigma'_{\alpha\beta}$, quando la velocità \mathbf{V} è diretta lungo \mathbf{B} (l'asse z) e dipende solo dalla coordinata z ; in questo caso nelle espressioni (58,16) restano unicamente i termini contenenti

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = -\frac{1}{2} \sigma'_{zz} = -\frac{2}{3} \eta_0 \frac{dV}{dz}.$$

Infine, dovrebbe essere indipendente dal campo il coefficiente ζ_1 , che per la distribuzione della velocità suindicata porterebbe al tensore degli sforzi il contributo

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \frac{1}{2} \sigma'_{zz} = \zeta_1 \frac{dV}{dz}.$$

Ma poiché in assenza di campo questo effetto in generale non esiste, quindi $\zeta_1 = 0$ anche se il campo esiste ²⁾. (Sottolineiamo che questa causa non è dovuta al fatto che il plasma è non relativistico, in modo che l'uguaglianza $\zeta_1 = 0$ sarebbe valida anche nel caso relativistico a differenza del coefficiente ζ che è non nullo.)

Il calcolo degli altri coefficienti cinetici si può effettuare in forma analitica, nel caso limite di campi magnetici forti in cui (per ogni specie di particelle) la frequenza di Larmor $\omega_B \gg \nu$. In queste condizioni gli urti svolgono il ruolo di piccola correzione ³⁾.

Conduttività elettrica

Iniziamo dal calcolo dei coefficienti che definiscono la corrente elettrica nel plasma. È comodo eseguire questi calcoli nel sistema di riferimento in cui il dato elemento di volume del plasma è a riposo.

¹⁾ Sottolineiamo, tuttavia, che questi ragionamenti (e quelli analoghi più avanti) suppongono che il processo di diffusione delle particelle non dipenda dal campo magnetico. A tale scopo è necessario che il campo magnetico soddisfi la disuguaglianza (59,10); si veda più avanti.

²⁾ È da notare ancora una volta che tutte queste affermazioni sono legate alla forma del termine contenente \mathbf{B} nell'equazione cinetica (59,2). Esse non si riferiscono perciò a un gas ordinario, le cui molecole hanno un momento magnetico, mediante il quale (e non mediante la carica delle particelle come nel plasma) si realizza l'interazione con il campo magnetico.

³⁾ I coefficienti cinetici di un plasma magneticamente attivo sono stati calcolati da R. Landshoff (1949), E. S. Fradkin (1951) e S. I. Braginskij (1952). Il metodo analitico qui esposto appartiene a I. E. Tamm (1951).

Trascurando le grandezze $\sim m/M$, si può ritenere questo sistema coincidente con il sistema a riposo della componente ionica. La corrente elettrica in questo sistema è puramente elettronica. Perciò si deve risolvere solo l'equazione cinetica per gli elettroni.

Il primo membro dell'equazione cinetica dovrebbe essere trasformato mediante le equazioni idrodinamiche, così come è stato fatto al § 6 per il gas ordinario. Inoltre la velocità macroscopica nel punto considerato, nel sistema di riferimento prescelto, è nulla (ma, ovviamente, non le sue derivate)¹⁾.

In questo caso (per gli elettroni) non c'è bisogno di effettuare completamente i detti calcoli. Osserviamo, prima di tutto, che in generale si può omettere il termine $\partial \delta f_e / \partial t$. La derivazione rispetto al tempo conduce alla comparsa di termini con le derivate $\partial T / \partial t$, $\partial P / \partial t$ e $\partial V / \partial t$. Le prime due di queste derivate si esprimono in funzione dello scalare $\text{div } \mathbf{V}$ (cfr. la (6,16)); ma questi termini, come sappiamo già, nel caso di un gas monoatomico (quale è un plasma) si elidono lo stesso. Quanto alla derivata $\partial V / \partial t$, espressa mediante l'equazione idrodinamica (58,3), essa contiene il fattore $1/\rho$, cioè il fattore $1/M$; l'inclusione di questi termini nell'equazione cinetica condurrebbe soltanto a correzioni $\sim m/M$, che non ci interessano. In seguito, si può porre $\mathbf{E} = 0$ nella (59,2), poiché è noto a priori che \mathbf{E} può figurare nella corrente cercata \mathbf{j} soltanto sotto forma della somma

$$\mathbf{E} + \frac{1}{eN_e} \nabla P.$$

Infine, poiché non ci proponiamo di calcolare i coefficienti cinetici « longitudinali » (σ_{\parallel} , κ_{\parallel} , η_0) indipendenti dal campo, si possono supporre tutte le grandezze termodinamiche del plasma dipendenti solo dalle coordinate nel piano perpendicolare alla direzione \mathbf{B} . Indicando con ∇_{\perp} l'operatore di derivazione in questo piano, scriviamo quindi l'equazione cinetica nella forma

$$(\mathbf{v} \nabla_{\perp}) f_{0e} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + I (\delta f_e). \quad (59,3)$$

Questa equazione, a sua volta, si può risolvere con il metodo delle approssimazioni successive secondo le potenze di $1/\omega_{Be}$. Alla prima approssimazione (indichiamola con l'indice (1)) corrisponde la mancanza assoluta dell'integrale degli urti, cioè l'equazione

$$[\mathbf{v} \mathbf{b}] \frac{\partial \delta f_e^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\omega_{Be}} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) f_{0e} \quad (59,4)$$

($\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$). La soluzione di questa equazione è

$$\delta f_e^{(1)} = -\frac{1}{\omega_{Be}} (\mathbf{v} [\mathbf{b} \nabla_{\perp} f_{0e}]), \quad (59,5)$$

¹⁾ Ciò è stato già supposto di fatto sopra, dove si è usata la coincidenza dei versi dei vettori $\partial f_0 / \partial \mathbf{p}$ e \mathbf{v} .

il che è facile provare per sostituzione diretta. È evidente a priori che essa consente di calcolare solo i coefficienti cinetici non dissipativi: in assenza di urti non esiste dissipazione d'energia.

La densità della corrente elettrica è data dall'integrale

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f_e d^3p. \quad (59,6)$$

Sostituendovi la (59,5) scriviamo

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{mc}{B} ([\mathbf{b}\nabla_{\perp}] \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}) N_e = \frac{mc}{3B} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}] N_e \langle v^2 \rangle,$$

dove la media si calcola in base alla distribuzione maxwelliana. Otteniamo infine

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{c}{B} [\mathbf{b}\nabla_{\perp} P_e], \quad \nabla_{\perp} P_e = -\frac{B}{c} [\mathbf{b}\mathbf{j}^{(1)}]. \quad (59,7)$$

Confrontando questa espressione con la definizione del coefficiente \mathcal{R} nella (58,13) abbiamo

$$\mathcal{R} = -1/N_e c. \quad (59,8)$$

Nell'approssimazione successiva cerchiamo la soluzione dell'equazione (59,3) nella forma $\delta f_e = \delta f_e^{(1)} + \delta f_e^{(2)}$ e per $\delta f_e^{(2)}$ troviamo l'equazione

$$\omega_{Be} [\mathbf{v}\mathbf{b}] \frac{\partial \delta f_e^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} = -I(\delta f_e^{(1)}) = \frac{1}{\omega_{Be}} I(\mathbf{v} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}] f_{0e}) \quad (59,9)$$

(è impossibile portare fuori l'operatore ∇_{\perp} dal segno di I , poiché nell'integrale degli urti linearizzato l'espressione integranda contiene nei coefficienti grandezze dipendenti dalle coordinate, per esempio N_i).

Come è stato convenuto, il campo magnetico è supposto così forte che $\omega_{Be} \gg v_e$. Inoltre, in questo paragrafo, tuttavia supporremo al tempo stesso che

$$r_{Be} = v_{Te}/\omega_{Be} \gg a_e \quad (59,10)$$

(cioè $\omega_{Be} \ll \Omega_e$), il che limita la grandezza del campo superiormente. Se questa condizione è soddisfatta, il campo quasi non incurva le traiettorie degli elettroni (e tanto meno degli ioni) nella regione degli urti e, quindi, non incide sul processo di urto. In altre parole, l'operatore I non dipende esplicitamente dal campo. Ma allora, per considerazioni di simmetria, il secondo membro dell'equazione (59,9) deve avere una struttura vettoriale della forma $(\mathbf{v} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}]) \varphi(v^2)$; rispetto alla variabile \mathbf{v} questa struttura è identica a quella del secondo membro della (59,4), dove al posto di ∇_{\perp} figura

$[\mathbf{b}\nabla_{\perp}]$. Perciò la soluzione dell'equazione (59,9) è

$$\delta f_e^{(2)} = -\frac{1}{\omega_{Be}^2} I(\mathbf{v} [\mathbf{b} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}]] f_{0e}) = \frac{1}{\omega_{Be}^2} I(\mathbf{v}\nabla_{\perp} f_{0e}). \quad (59,11)$$

Nel calcolare la corrente il contributo non nullo proviene unicamente dagli urti *ei*. Infatti, poiché nelle condizioni considerate gli urti rappresentano un piccolo effetto, il contributo dagli urti *ee* e *ei* si può includere separatamente. Ciò significa, ad esempio, che il contributo proveniente dagli urti *ee* si calcola in base alla distribuzione che si ottiene risolvendo l'equazione cinetica, al secondo membro della quale figura l'integrale solo di questi urti, come se gli elettroni in generale non urtassero con gli ioni. Ma allora l'integrale $\int \mathbf{v} \delta f_e^{(2)} d^3p$, con la funzione $\delta f_e^{(2)}$ nella forma (59,11), si annulla poiché, in virtù della legge della conservazione della quantità di moto, per urti per una funzione di distribuzione f_e arbitraria abbiamo

$$\int \mathbf{v} \text{St}_e f_e d^3p = 0$$

(cfr. il § 5).

Quindi, nel calcolare la corrente elettrica si deve intendere nella (59,11) il simbolo I come integrale degli urti elettrone-ione. Inoltre, ¹⁾

$$I_{ei}(\mathbf{v}\nabla_{\perp} f_{0e}) = -v_{ei}(\mathbf{v})(\mathbf{v}\nabla_{\perp}) f_{0e}, \quad (59,12)$$

dove secondo la (44,3)

$$v_{ei}(\mathbf{v}) = \frac{4\pi z e^4 N_e L_e}{m^2 v^3}.$$

Il contributo alla corrente dalla distribuzione (59,11-12) vale

$$\mathbf{j}^{(2)} = \frac{e N_e}{3\omega_{Be}^2} \nabla_{\perp} \langle v^2 v_{ei}(\mathbf{v}) \rangle = \frac{4\sqrt{2\pi} z e^5 L_e N_e}{3m^{3/2} \omega_{Be}^2} \nabla_{\perp} \frac{P_e}{T^{3/2}}. \quad (59,13)$$

Per calcolare i coefficienti cinetici cercati si deve sostituire la corrente $\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$ nell'uguaglianza (58,13)

$$\frac{1}{e N_e} \nabla_{\perp} P_e = \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}_{\perp}] + \alpha_{\perp} \nabla_{\perp} T + \mathcal{N}B[\mathbf{b}\nabla_{\perp} T], \quad (59,14)$$

che definisce questi coefficienti. Ponendo dapprima $\nabla T = 0$ e riunendo i termini dell'ordine di $1/\omega_{Be}$, troviamo che

$$\mathbf{j}^{(1)}/\sigma_{\perp} + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(2)}] = 0,$$

¹⁾ Cfr. la formula (44,1). Ricordiamo che l'espressione di questa forma per $\text{St } f$ è valida se gli urti avvengono con particelle che si possono supporre fisse e se δf ha la forma $(\mathbf{v}\mathbf{A}) g(\mathbf{v})$, dove \mathbf{A} è un vettore costante. Nel caso considerato l'operatore vettoriale ∇_{\perp} svolge il ruolo di \mathbf{A} .

da cui

$$\sigma_{\perp} = \frac{3\pi^{1/2}e^2 N_e}{2^{1/2} m v_{ei}}, \quad (59,15)$$

dove v_{ei} (senza indicare l'argomento) significa

$$v_{ei} = v_{ei}(v_{Te}) = \frac{4\pi z e^4 L_e N_e}{m^{1/2} T^{3/2}}. \quad (59,16)$$

La grandezza (59,15) è dello stesso ordine della conduttività (43,8) in assenza di campo, con cui nel caso in esame coincide anche σ_{\parallel} .

Analogamente, ponendo nella (59,14) $\nabla P_e = 0$ e riunendo di nuovo i termini $\sim 1/\omega_{Be}$, otteniamo

$$\mathcal{R}B [\mathbf{b}j^{(2)}] + \mathcal{N}B [\mathbf{b}\nabla T] = 0,$$

da cui

$$\mathcal{N} = - \frac{v_{ei}}{(2\pi)^{1/2} m c \omega_{Be}^2} = - \frac{3c N_e}{2\sigma_{\perp} B^2}. \quad (59,17)$$

Quanto al coefficiente α_{\perp} , esso compare soltanto nell'approssimazione successiva rispetto a $1/\omega_{Be}$ e vale (per $z = 1$)

$$\alpha_{\perp} = 0,36 (v_{ei}/\omega_{Be})^2. \quad (59,18)$$

Conducibilità termica elettronica

Il flusso di calore nel plasma è composto di una parte elettronica e di una ionica; consideriamo dapprima la parte elettronica.

Il flusso di calore elettronico si calcola come integrale:

$$\mathbf{q}_e = \frac{m}{2} \int v^2 \mathbf{v} \delta f_e d^3 p. \quad (59,19)$$

In prima approssimazione rispetto a $1/\omega_{Be}$, sostituendovi la (59,5), troviamo

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = - \frac{m}{2\omega_{Be}} ([\mathbf{b}\nabla_{\perp}] \langle \mathbf{v} \mathbf{v} v^2 \rangle N_e = - \frac{m}{6\omega_{Be}} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}] N_e \langle v^4 \rangle,$$

da cui

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = - \frac{5c}{2eB} [\mathbf{b}\nabla_{\perp}] P_e T = - \frac{w_e}{e} \mathbf{j}^{(1)} - \frac{5cP_e}{2eB} [\mathbf{b}\nabla_{\perp} T], \quad (59,20)$$

dove $w_e = 5T/2$ è la funzione termica elettronica riferita a un elettrone. Confrontando con la definizione del coefficiente \mathcal{L} nella (58,14) otteniamo

$$\mathcal{L}_e = - \frac{5c N_e T}{2eB^2}. \quad (59,21)$$

Nell'approssimazione successiva l'integrale (59,19) deve essere calcolato con la funzione di distribuzione (59,11). Tuttavia, al flusso di calore danno un contributo sia gli urti ei che quelli ee . Nel primo

caso ricorriamo di nuovo alle espressioni (59,11-12) e troviamo

$$q_e^{(ei)} = -\frac{mN_e}{6\omega_{Be}^2} \nabla_{\perp} \langle v^4 v_{ei}(v) \rangle,$$

da cui

$$q_e^{(ei)} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ze^4 N_e L_e}{m^{3/2} \omega_{Be}^2} \nabla_{\perp} \frac{P_e}{\sqrt{T}}. \quad (59,22)$$

Per ricavare da qui la parte corrispondente del coefficiente di conducibilità termica κ_{\perp} si deve, tuttavia, tener conto anche della condizione $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)} = 0$ poiché, in accordo con la (58,14), κ_{\perp} è definito in base al flusso di calore in assenza di corrente. Con l'aiuto delle formule (59,7) e (59,13) troviamo che tale condizione implica la seguente relazione tra i gradienti della pressione e della temperatura:

$$\frac{q_{\perp}}{B} [\mathbf{b} \nabla_{\perp} P_e] = \frac{e N_e v_{ei}}{\sqrt{2\pi} m \omega_{Be}^2} \nabla_{\perp} T$$

(nei calcoli trascuriamo ovunque i termini di ordine superiore rispetto a $1/\omega_{Be}$). Calcolando mediante questa relazione la somma $q_e^{(1)} + q_e^{(ei)}$, abbiamo

$$\kappa_{\perp e}^{(ei)} = \frac{13}{6\sqrt{2\pi}} \frac{N_e T v_{ei}}{m \omega_{Be}^2}. \quad (59,23)$$

Questa formula ha un significato fisico semplice. Il coefficiente di conducibilità termica come ordine di grandezza deve valere $\kappa_{\perp} \sim C_e D_{\perp}$, dove $C_e \sim N_e$ è il calore specifico degli elettroni nell'unità di volume e D_{\perp} il coefficiente di diffusione degli elettroni in direzione trasversale al campo magnetico. Questo coefficiente è stimato, a sua volta, come $\langle (\Delta x)^2 \rangle / \delta t$, dove $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ è il quadrato medio dello spostamento durante il tempo δt . Nel campo magnetico lo spostamento in direzione perpendicolare si produce soltanto per urti, quando l'elettrone si sposta a una distanza $\sim r_{Be}$. Perciò $D_{\perp} \sim v_{ei} r_{Be}^2$, da cui si ottiene la (59,23).

Consideriamo il contributo proveniente dagli urti ee . I calcoli in questo caso sono più complicati e ne diamo solo le linee generali.

Nella funzione (59,11) con I si deve ora intendere l'integrale degli urti di Landau linearizzato

$$I_{ee} \delta f_e = -\operatorname{div}_p \mathbf{s}^{(ee)},$$

dove

$$s_{\alpha}^{(ee)} = 2\pi e^4 L_e \int \frac{w^2 \delta_{\alpha\beta} - w_{\alpha} w_{\beta}}{w^3} \left\{ f_{0e} \frac{\partial \delta f'_e}{\partial p'_{\beta}} + \delta f_e \frac{\partial f'_{0e}}{\partial p'_{\beta}} - \right. \\ \left. - f'_{0e} \frac{\partial \delta f_e}{\partial p_{\beta}} - \delta f'_e \frac{\partial f_{0e}}{\partial p_{\beta}} \right\} d^3 p' \quad (59,24)$$

($\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$). L'integrale (59,19) con questa funzione di distribuzione, dopo integrazione per parti, diventa

$$\kappa_e^{(ee)} = \frac{1}{2\omega_{Be}^2} \int \{v^2 s^{(ee)} + 2\mathbf{v}(\mathbf{v}s^{(ee)})\} d^3p. \quad (59,25)$$

Il coefficiente in questa formula è scritto in modo tale che con δf_e nella (59,24) si deve ora intendere la funzione $(\mathbf{v}\nabla_{\perp}) f_{0e}$. Inoltre, è sufficiente applicare la derivazione ∇_{\perp} solo alla temperatura T nell'esponente della funzione maxwelliana f_{0e} :

$$(\mathbf{v}\nabla_{\perp}) f_{0e} \rightarrow f_{0e} \frac{mv^2}{2T^2} (\mathbf{v}\nabla_{\perp} T);$$

i termini, provenienti dalla derivazione del fattore davanti all'esponente, si elidono a vicenda ¹⁾.

Dopo un calcolo semplice, anche se abbastanza lungo, l'integrale (59,25) si riduce alla forma $-\kappa_{\perp e}^{(ee)} \nabla_{\perp} T$, dove ²⁾

$$\kappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{\pi L_e e^4}{3T^2 \omega_{Be}^2} \int \left\{ wV^2 + \frac{(\mathbf{wV})^2}{w} + \dots \right\} f_{0e}(p) f_{0e}(p') d^3p d^3p';$$

qui $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}')/2$ e i puntini di sospensione tra parentesi graffe indicano i termini che contengono le potenze dispari di wV e si annullano per integrazione. Osservando che

$$f_{0e}(p) f_{0e}(p') \propto \exp \left(-\frac{mV^2}{T} - \frac{mw^2}{4T} \right),$$

e integrando rispetto a $d^3p d^3p'$, otteniamo infine

$$\kappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{N_e T v_{ee}}{m\omega_{Be}^2}, \quad (59,26)$$

dove

$$v_{ee} = \frac{4\pi e^4 N_e L_e}{m^{1/2} T^{3/2}}. \quad (59,27)$$

Quindi, tutto il contributo elettronico alla conducibilità termica trasversale vale

$$\kappa_{\perp e} = \frac{2N_e T v_{ee}}{3\sqrt{\pi} m\omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{13}{4} z \right). \quad (59,28)$$

Conducibilità termica ionica

Notiamo prima di tutto che la condizione per poter applicare l'approssimazione considerata per gli urti ii , $\omega_{Bi} \gg v_{ii}$, è più forte di quella per gli elettroni. Poiché $v_{ii} \sim v_{ee} (m/M)^{1/2}$ e $\omega_{Bi} \sim$

¹⁾ Questa circostanza è evidente a priori come conseguenza della proprietà generale indicata al § 6: l'integrale degli urti di particelle identiche si annulla per funzione della forma $v f_0$.

²⁾ Il gradiente della pressione non compare qui, e perciò non c'è bisogno di escluderlo mediante la condizione $j = 0$.

$\sim \omega_{Be} m/M$, allora da $\omega_{Bi} \gg v_{ii}$ segue la disuguaglianza $\omega_{Be} \gg v_{ee} (M/m)^{1/2}$, che è più forte della disuguaglianza $\omega_{Be} \gg v_{ee}$; quanto alla condizione $r_{Bi} \gg a$, essa si verifica a priori essendo più debole della (59,10)

L'equazione cinetica per gli ioni è analoga all'equazione (59,2):

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{r}} + ze\mathbf{E} \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{ze}{c} [\mathbf{vB}] \frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_i). \quad (59,29)$$

Tuttavia, se trasformiamo il primo membro, la situazione differisce dal caso elettronico. Ponendovi

$$f_{0i} = \frac{N_i}{(2\pi TM)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{M}{2T} (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 \right\},$$

dobbiamo ora derivare \mathbf{V} rispetto a t (e dopo porre nuovamente, in forza del sistema di riferimento in esame, $\mathbf{V} = 0$). Per $\mathbf{V} = 0$ abbiamo, in accordo con l'equazione idrodinamica del moto,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{jB}],$$

dove la pressione è $P = P_e + P_i$ e la densità $\rho = N_i M$. In seguito l'equazione cinetica assume la forma

$$\mathbf{v} \nabla_{\perp} f_{0i} - \frac{f_{0i}}{N_i T} \mathbf{v} \left(\nabla_{\perp} P - \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] \right) = -\frac{ze}{c} [\mathbf{vB}] \frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_i), \quad (59,30)$$

dove nuovamente (come nella (59,3)) abbiamo posto $\mathbf{E} = 0$ e scritto ∇_{\perp} al posto di ∇^{\perp} .

Risolviamo l'equazione (59,30) con il metodo delle approssimazioni successive rispetto a $1/\omega_{Bi}$. In prima approssimazione, analogamente alla (59,5), otteniamo

$$\delta f_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_{Bi}} \left(\mathbf{v} \left[\mathbf{b}, \nabla_{\perp} f_{0i} - \frac{f_{0i}}{N_i T} \nabla_{\perp} P + \frac{f_{0i}}{c N_i T} [\mathbf{jB}] \right] \right).$$

Ma in questa approssimazione, secondo la (59,7), abbiamo $\nabla_{\perp} P_e = [\mathbf{jB}]/c$ in modo che

$$\delta f_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_{Bi}} \left(\mathbf{v} \left[\mathbf{b}, \nabla_{\perp} f_{0i} - \frac{f_{0i}}{P_i} \nabla_{\perp} P_i \right] \right). \quad (59,31)$$

Questa funzione di distribuzione, ovviamente, non fornisce un contributo alla corrente $\int \delta f_i^{(1)} \mathbf{v} d^3 p = 0$, come deve essere nel sistema di riferimento, in cui la componente ionica del plasma si trova a ripo-

¹⁾ Nel caso elettronico il secondo termine a primo membro conterrebbe al posto di M/ρ il fattore $m/\rho = m/MN_i$ che si potrebbe trascurare.

so. Per il flusso di calore, invece, troviamo

$$\begin{aligned} q_i^{(1)} &= \frac{M}{2} \int v^2 v \delta f_i^{(1)} d^3 p = \\ &= \frac{M}{6\omega_{Bi}} \left[\mathbf{b} \cdot \nabla_{\perp} (N_i \langle v^4 \rangle) - \frac{\langle v^4 \rangle}{T} \nabla_{\perp} P_i \right] = \frac{5cP_i}{2zeB} [\mathbf{B} \nabla T], \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{L}_i = \frac{5cN_i T}{2zeB^2} = -\frac{\mathcal{L}_e}{z^2}. \quad (59,32)$$

Per il calcolo del flusso di calore nell'approssimazione successiva sono fondamentali solo gli urti ii , in quanto gli urti ie danno un contributo di $\sim (m/M)^{1/2}$ volte inferiore a causa della piccola variazione della quantità di moto degli ioni per urti con un elettrone. I calcoli corrispondenti sono completamente analoghi a quelli eseguiti sopra per gli urti ee ¹⁾. La parte ionica della conducibilità termica si ottiene perciò dalla (59,26) sostituendovi le grandezze elettroniche con quelle ioniche:

$$\kappa_{\perp i} = \frac{2N_i T v_{ii}}{3 \sqrt{\pi} M \omega_{Bi}^2}, \quad v_{ii} = \frac{4\pi z^2 e^4 L_i N_i}{M^{1/2} T^{3/2}}. \quad (59,33)$$

Dal confronto tra le (59,33) e (59,23) risulta che (per $z \sim 1$) $\kappa_{\perp i} \sim \kappa_{\perp e} (M/m)^{1/2}$. Quindi, in campi così grandi che $\omega_{Bi} \gg v_{ii}$, la conducibilità termica trasversale in pratica è interamente ionica. La conducibilità termica elettronica è comparabile con quella ionica allorché $\omega_{Bi} \sim (m/M)^{1/4} v_{ii}$ (per il confronto si deve tener conto che in questi campi si può trascurare l'influenza del campo magnetico su κ_i). Per campi ancora più piccoli il contributo ionico a κ_{\perp} diventa inessenziale; se in questo caso $\omega_{Be} \gg v_{ee}$, allora κ_{\perp} è definito dalla formula (59,28).

Viscosità

La quantità di moto di un plasma in moto è concentrata soprattutto negli ioni e perciò la viscosità è definita dalla funzione di distribuzione ionica. Inoltre, poiché gli urti di uno ione con gli elettroni cambiano poco la quantità di moto ionico, nell'equazione cinetica si devono includere solo gli urti ione-ione.

Il primo membro dell'equazione cinetica (59,29) si trasforma così come abbiamo fatto ai §§ 6, 8 e assume la forma ivi indicata ²⁾.

¹⁾ Il termine contenente ∇P_i , che distingue la (59,31) dalla (59,5), in questo caso è inessenziale: questa parte della funzione di distribuzione è $\propto v f_{0i}$ e annulla l'integrale degli urti; cfr. la nota a pag. 298.

²⁾ In questo caso si deve tener conto che la pressione del plasma è $P = (N_i + N_e) T = N_i (1 + z) T$ e il calore specifico riferito a uno ione vale $3(1 + z)/2$.

Quindi, l'equazione cinetica del problema della viscosità si scrive

$$\frac{M}{T} v_\alpha v_\beta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) f_{0i} = - \frac{ze}{cM} [\mathbf{vB}] \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} + I_{ii} (\delta f_i). \quad (59,34)$$

La soluzione di questa equazione si deve cercare nella forma

$$\delta f_i = \sum_{n=0}^4 g_n (v^2) V_{\gamma\delta}^{(n)} v_\gamma v_\delta, \quad (59,35)$$

dove $V_{\gamma\delta}^{(n)}$ sono combinazioni lineari delle componenti del tensore $V_{\alpha\beta}$, che figurano nell'espressione per il tensore degli sforzi viscosi

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^4 \eta_n V_{\alpha\beta}^{(n)} \quad (59,36)$$

secondo le definizioni (13,18) e (58,15). Ricordiamo che tutte le combinazioni $V_{\alpha\alpha}^{(n)} = 0$. Il tensore degli sforzi si calcola come l'integrale

$$-\sigma'_{\alpha\beta} = \int M v_\alpha v_\beta \delta f_i d^3 p.$$

Ponendovi la (59,35), calcolando la media sulle direzioni \mathbf{v} secondo la formula

$$\langle v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \rangle = \frac{v^4}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$$

e confrontando con la (59,36), otteniamo

$$\eta_n = - \frac{2M}{15} \int v^4 g_n (v^2) d^3 p. \quad (59,37)$$

Le equazioni che definiscono le funzioni g_n si ottengono sostituendo la (59,35) nella (59,34) e uguagliando i coefficienti dei tensori uguali $V_{\alpha\beta}^{(n)}$ nei due membri dell'equazione. Omettendo i particolari di questi calcoli abbastanza complicati, ne diamo subito i risultati finali.

I coefficienti di viscosità non nulli η_3 e η_4 compaiono già nel caso in cui trascuriamo l'integrale degli urti e perciò sono proporzionali a $1/\omega_{Bi}$. I coefficienti η_1 e η_2 , invece, compaiono soltanto nell'approssimazione successiva, cioè tenendo conto degli urti, e perciò sono proporzionali a $1/\omega_{Bi}^2$:

$$\eta_1 = \frac{\eta_2}{4} = \frac{2\pi^{1/2} (ze)^4 L_i N_i^2}{5 (MT)^{1/2} \omega_{Bi}^2}, \quad \eta_3 = \frac{\eta_4}{2} = \frac{N_i T}{2\omega_{Bi}}. \quad (59,38)$$

Notiamo per concludere che tutte le espressioni dedotte in questo paragrafo per i coefficienti cinetici « trasversali » hanno senso anche

¹⁾ L'opportunità di definire il coefficiente di viscosità η_0 per un plasma magneticamente attivo, secondo la (58,15), è legata al fatto che tutti gli altri coefficienti η tendono allora a zero per $B \rightarrow \infty$.

per condizioni più deboli della condizione generale (58,1). È facile vedere che la correzione alla funzione di distribuzione diventa piccola già se le dimensioni caratteristiche del problema sono grandi solo rispetto al raggio di Larmor r_B delle particelle corrispondenti, il che garantisce l'applicabilità delle suddette espressioni. Questa condizione è sufficiente anche per l'applicabilità delle stesse equazioni idrodinamiche se i gradienti della pressione e della temperatura sono ovunque trasversali rispetto alla direzione del campo magnetico.

Nei nostri ragionamenti abbiamo supposto sempre il plasma con temperature elettronica e ionica uguali. Ma per una grande differenza tra la massa elettronica e ionica spesso si verificano le condizioni « di doppia temperatura ». In questo caso anche è possibile formulare un sistema di equazioni di tipo idrodinamico e calcolare i coefficienti cinetici che figurano in esse ¹⁾.

PROBLEMA

Un plasma, disomogeneo nella direzione dell'asse x , è trattenuto da un campo magnetico diretto lungo l'asse z . Per la condizione $\omega_{Be} \gg \nu_{ei}$ determinare la distribuzione della densità e del campo magnetico nel plasma, supponendo assegnata la distribuzione della temperatura (*I. E. Tamm, 1951*).

Soluzione. I gradienti della temperatura T e della pressione P sono diretti, per ipotesi, lungo l'asse x . Lungo lo stesso asse è diretto anche il campo elettrico E , che compare per la disomogeneità del plasma, e che è potenziale nel caso stazionario. Che il plasma è trattenuto significa che nella direzione x non esistono moto del plasma e corrente elettrica: $V_x = 0, j_x = 0$.

Proiettando, in accordo con quanto detto, le equazioni (58,13) sull'asse y e usando l'equazione di Maxwell $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi j/c$, otteniamo

$$\frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx} = -j_y = \mathcal{M} \sigma_{\perp} B \frac{dT}{dx}.$$

Ponendo in questa formula l'espressione (59,17) per $\mathcal{M} \sigma_{\perp}$ abbiamo

$$\frac{d}{dx} \frac{B^2}{8\pi} = -\frac{3}{2} N_e \frac{dT}{dx}. \quad (1)$$

Il campo magnetico « viene spinto fuori » dalle regioni più calde del plasma. Proiettando l'equazione (58,3) sull'asse x e trascurando i termini viscosi, che forniscono un contributo infinitesimo di ordine superiore rispetto a $1/B$, troviamo la seconda equazione

$$\frac{d}{dx} (P_e + P_i) = \frac{1}{c} j_y B,$$

che mediante la stessa equazione di Maxwell si riduce alla forma (per $z = 1$)

$$2N_e T + \frac{B^2}{8\pi} = \text{costante}. \quad (2)$$

¹⁾ Questo argomento è esposto nell'articolo di *S. I. Braginskij*, Fenomeni di trasporto in un plasma, nella raccolta « Problemi della teoria del plasma », fasc. 1, Atomizdat, 1963 (ed. russa).

All'equazione (1) si può conferire una forma più comoda escludendo dalle (1) e (2) il campo magnetico. Dopo integrazione troviamo

$$N_e T^{1/4} = \text{costante.} \quad (3)$$

Le formule (2) e (3) risolvono il problema posto. La distribuzione della temperatura, invece, è definita dall'equazione della conducibilità termica.

§ 60. Approssimazione di deriva

Al paragrafo precedente nello studiare i coefficienti cinetici di un plasma in un campo magnetico forte abbiamo usato l'integrale degli urti di Landau, il che presupponeva soddisfatta la disuguaglianza $r_{Be} \gg a$ (59,10). Mostriamo ora come si può fare a meno di questa restrizione, cioè ottenere formule applicabili al caso di campi così forti che per gli elettroni è soddisfatta la disuguaglianza inversa

$$r_{Be} \ll a. \quad (60,1)$$

In questo caso è comodo ricorrere a un'approssimazione speciale, cosiddetta *di deriva*, che si realizza già nella stessa equazione cinetica e non soltanto nella sua soluzione. Questa approssimazione è valida se i campi magnetico ed elettrico variano in modo sufficientemente lento nello spazio e nel tempo. E precisamente, la frequenza del campo ω e la frequenza efficace degli urti ν devono essere piccole rispetto alla frequenza di Larmor, mentre la distanza caratteristica, alla quale variano i campi (indichiamola con $1/k$), deve essere grande rispetto al raggio di Larmor. Queste condizioni devono essere soddisfatte per ogni tipo di particelle cui si applica l'approssimazione di deriva. Più avanti in questo paragrafo scriveremo tutte le formule, per fissare le idee, per gli elettroni (le formule analoghe per gli ioni si ottengono, come sempre, con le sostituzioni $e \rightarrow -ze$, $\omega_{Be} \rightarrow -\omega_{Bi}$, $m \rightarrow M$). Quindi, saranno supposte soddisfatte le condizioni

$$\omega, \nu_{ei} \ll \omega_{Be}, \quad 1/k \gg r_{Be}. \quad (60,2)$$

Il metodo considerato è basato sulla soluzione approssimata delle equazioni di moto delle particelle cariche nei campi $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, che tiene conto che essi variano lentamente in funzioni di t e \mathbf{r} . Il moto delle particelle in questi campi è l'insieme di una rotazione rapidamente variabile (di frequenza ω_{Be}) lungo le « circonferenze di Larmor » e dello spostamento variabile lentamente dei centri di queste circonferenze (o, come si dice, dei *centri conduttori delle orbite*). Il metodo di soluzione consiste nel separare la componente del moto rapidamente variabile e oscillante e nel calcolare il valore medio rispetto a questa componente.

Rappresentiamo il raggio vettore e la velocità dell'elettrone nella forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}, \quad (60,3)$$

dove \mathbf{R} è il raggio vettore del centro conduttore dell'orbita e ξ il raggio vettore dell'elettrone oscillante rispetto al centro conduttore¹⁾. Nell'approssimazione zero, trascurando completamente la dipendenza spaziale e temporale del campo e gli urti, abbiamo semplicemente a che fare con il moto nei campi incrociati costanti e omogenei \mathbf{E} e \mathbf{B} . Come è noto (si veda II, § 22), il vettore ξ in questo caso giace rigorosamente in un piano perpendicolare al campo \mathbf{B} e ruota in questo piano con velocità angolare costante $\omega_{Be} = eB/mc$, restando costante in modulo. Il raggio della circonferenza $|\xi|$ è legato alla velocità costante $|\dot{\xi}| \equiv v_{\perp}$ dalla relazione $|\xi| = v_{\perp}/\omega_{Be}$; in forma vettoriale la relazione tra ξ e $\dot{\xi}$ si scrive

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\omega_{Be}} [b\dot{\xi}], \quad (60,4)$$

dove $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. Il centro dell'orbita si muove con la velocità

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 = v_{0\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{w}_0,$$

dove $v_{0\parallel}$ è la velocità del moto uniformemente accelerato nella direzione del campo magnetico, che soddisfa l'equazione

$$m\dot{v}_{0\parallel} = -e\mathbf{bE}, \quad (60,5)$$

e

$$\mathbf{w}_0 = \dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{c}{B} [E\mathbf{b}] \quad (60,6)$$

è la velocità di spostamento nel piano perpendicolare a \mathbf{B} (velocità di *deriva elettrica*)²⁾.

Nel seguito ci limiteremo a questa approssimazione e trascureremo i termini legati alla non costanza dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , considerando cioè questi campi costanti. Ciò premesso, ometteremo gli indici 0 in tutte le grandezze.

L'essenza dell'approssimazione di deriva consiste nel passare nell'equazione cinetica alle grandezze variabili lentamente \mathbf{R} , v_{\parallel} , $v_{\perp} = |\dot{\xi}|$. Queste grandezze nel loro insieme costituiscono cinque variabili indipendenti, da cui dipende la funzione di distribuzione.

L'elemento del volume di fase nelle nuove variabili ha la forma

$$d^3x \, d^3p = d^3R \cdot 2\pi m^3 \, dv_{\parallel} \cdot v_{\perp} dv_{\perp} = 2\pi m^3 \, d^3R \, dv_{\parallel} \, dJ, \quad (60,7)$$

dove si è introdotta una grandezza che sarà comoda in seguito,

$$J = v_{\perp}^2/2 \quad (60,8)$$

¹⁾ Non confondere la notazione \mathbf{V} in questo paragrafo con la velocità macroscopica indicata con \mathbf{V} al § 59!

²⁾ Si è supposto, ovviamente, che $E/B \ll 1$ in modo che $w \ll c$ e si possono trascurare gli effetti relativistici.

(per la verifica della relazione (60,7) si deve ricordare che nell'approssimazione considerata i campi si possono ritenere costanti).

Esprimiamo nelle nuove variabili la densità di corrente degli elettroni. Per un elettrone la densità di corrente è $-ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$, dove \mathbf{r} sono le coordinate correnti di un punto dello spazio e \mathbf{r}_e le coordinate del punto in cui si trova l'elettrone. Ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ e $\mathbf{r}_e = \mathbf{R} + \boldsymbol{\zeta}$, scriviamo

$$-ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \approx -e(\mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}})[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \boldsymbol{\zeta}\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{R})].$$

Calcoliamo il valore medio di questa espressione rispetto all'angolo di rotazione, mediante la relazione evidente

$$\omega_{Be} \langle \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\alpha} [\mathbf{b}\dot{\boldsymbol{\zeta}}]_{\beta} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\alpha} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\beta} \rangle = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \delta_{\alpha\beta},$$

dove α, β sono gli indici vettoriali bidimensionali (nel piano perpendicolare al campo magnetico). Otteniamo così

$$-eV\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \frac{mcJ}{B} [\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{r}}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}).$$

Moltiplicando questa espressione per la funzione di distribuzione degli elettroni f_e e integrando rispetto a $d^3p = 2\pi m^3 dv_{\parallel} dJ$, otteniamo la densità di corrente nello spazio \mathbf{R}^1 :

$$\mathbf{j}_e = -e \int \mathbf{V} f_e d^3p - \frac{mc}{B} \text{rot} \left(\mathbf{b} \int J f_e d^3p \right). \quad (60,9)$$

Il primo termine in questa espressione corrisponde al trasporto di cariche assieme alle piccole circonferenze di Larmor, il secondo tiene conto della rotazione delle particelle lungo queste circonferenze ²⁾. Il significato fisico di questo secondo termine è semplice: se lo scriviamo nella forma $c \text{rot } \mathbf{M}$, il vettore

$$\mathbf{M} = -\frac{m\mathbf{b}}{B} \int f_e J d^3p \quad (60,10)$$

rappresenterà la magnetizzazione del plasma legata alla rotazione delle cariche. Il momento magnetico (60,10) non dipende dal segno delle cariche ed è diretto in direzione opposta al campo magnetico, cioè corrisponde a diamagnetismo.

¹⁾ Nel secondo termine si integra per parti per cui l'operatore $\nabla_{\mathbf{r}}$ si sposta di $\mathbf{b}f_e$.

²⁾ Osserviamo che questo valore medio della densità di cariche $-e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$ conduce all'espressione ordinaria $-e \int f_e d^3p$; i termini correttivi legati alla rotazione delle particelle comparirebbero soltanto includendo gli infinitesimi del secondo ordine (cioè le derivate seconde rispetto alle coordinate).

Trasformiamo l'equazione cinetica nelle nuove variabili. Poiché la funzione di distribuzione f_e è riferita allo stesso elemento dello spazio delle fasi di prima (trasformato soltanto nella forma (60,7)), l'equazione cinetica ha sempre la forma $df_e/dt = St f_e$ oppure, sviluppando il primo membro nelle nuove variabili,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f_e}{\partial R_{\parallel}} + \frac{c}{B} [Eb] \frac{\partial f_e}{\partial R_{\perp}} = St f_e. \quad (60,11)$$

Qui sono state introdotte notazioni evidenti per le proiezioni dei vettori e sono state usate le uguaglianze (60,5-6). Il termine v_{\perp} è assente in questa approssimazione in quanto v_{\perp} per deriva non varia.

Passiamo alla scrittura dell'integrale degli urti nelle variabili di deriva ¹⁾. Notiamo prima di tutto che l'atto d'urto in queste variabili consiste nella variazione « istantanea » delle velocità v_{\parallel} e v_{\perp} e delle componenti del raggio vettore R_{\perp} del centro della piccola circonferenza, perpendicolari al campo magnetico (quanto alla componente R_{\parallel} parallela, essa praticamente coincide con la coordinata corrispondente della particella stessa e non cambia per urto).

Gli urti si producono solo tra particelle che passano l'una vicino all'altra a distanze d'impatto ρ non superiori al raggio di schermatura a , cioè $\rho \leq a$. Se ρ è piccolo rispetto ai raggi di Larmor delle particelle collidenti, il campo magnetico in generale non incide sulla diffusione, in quanto a queste distanze il campo non piega in modo notevole le traiettorie delle particelle. La descrizione di questi urti in termini delle variabili di deriva non è in generale naturale. Perciò l'uso dell'integrale degli urti in queste variabili è opportuno solo nell'ipotesi che almeno per una delle particelle collidenti $r_B \ll a$.

Per l'interazione coulombiana delle particelle sia in presenza di un campo magnetico, che in sua assenza, sono fondamentali gli urti lontani e, corrispondentemente, le piccole variazioni di tutte le variabili. Perciò la deduzione dell'integrale degli urti nello spazio p eseguita al § 41, resta valida anche per l'integrale degli urti nello spazio delle variabili $R_{\perp} = (X, Y)$, v_{\parallel} , J (l'asse z è diretto lungo il campo magnetico), se ora, al posto delle componenti della quantità di moto, introduciamo le quattro variabili $g_k \{X, Y, v_{\parallel}, J\}$ intendendo con $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$ le variazioni di queste grandezze in seguito a urti.

L'integrale degli urti si riduce sempre alla forma

$$St f = - \sum_{k=1}^4 \frac{\partial s_k}{\partial g_k} = - \frac{\partial s_{\perp}}{\partial R_{\perp}} - \frac{\partial s_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{\partial s_J}{\partial J} \quad (60,12)$$

¹⁾ L'integrale degli urti nelle variabili di deriva è stato dedotto da E. M. Lifšits (1937) per il gas elettronico e generalizzato per il plasma da S. T. Beljaev (1955).

(il flusso s_{\perp} ha, per definizione, componenti solo nel piano perpendicolare a \mathbf{B}). È fondamentale che l'elemento di volume nello spazio delle variabili g_k si riduca semplicemente al prodotto dei loro differenziali; perciò l'integrale degli urti ha la forma della divergenza ordinaria. La deduzione eseguita al § 41 non richiede che alcune piccole modifiche. Prima di tutto, nella scrittura della (41,2) si è già tenuto conto che, in virtù della conservazione della quantità di moto, $\Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{q} = -\Delta \mathbf{p}'$. Per le variabili di deriva considerate questa relazione, ovviamente, non esiste. Ripetendo la deduzione senza questa ipotesi troviamo (per urti tra elettroni e ioni, ad esempio)

$$s_k^{(ei)} = \sum_{l=1}^4 \frac{1}{2} \int \left\{ \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{el} \rangle f_l \frac{\partial f_e}{\partial g_{el}} + \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{il} \rangle f_e \frac{\partial f_l}{\partial g_{il}} \right\} d^3 p_l, \quad (60,13)$$

dove $d^3 p_i = 2\pi M^3 dJ_i dv_{i\parallel}$, Δg_k è la variazione delle grandezze g_k in seguito all'urto e le parentesi angolari esprimono il valore medio rispetto agli urti.

Nel dedurre la (60,13) è stata usata anche la possibilità di permutare nell'integrale degli urti gli stati iniziale e finale, e dopo ciò diventa evidente la riduzione dei termini lineari in Δg_k ; inoltre, ciò permette di integrare su tutto lo spazio g . Al § 41 questa trasformazione è stata realizzata in forza della simmetria rispetto all'inversione del tempo, che lega la probabilità degli urti diretto e inverso. In presenza di un campo magnetico questa simmetria ha luogo solo se si inverte la direzione del campo \mathbf{B} , così che essa lega in effetti le probabilità di urto in campi diversi. Tuttavia, come vedremo più avanti, nel caso considerato la simmetria rispetto all'inversione del tempo si ristabilisce con un'integrazione rispetto ai parametri d'impatto.

Infine, nella (60,13) si è tenuto conto che la diffusione reciproca delle « piccole circonferenze » si produce soltanto se essi passano l'uno vicino all'altro a distanze non superiori al raggio di schermatura a . Supponendo che la distribuzione vari i poco a queste distanze, abbiamo posto approssimativamente $f_i(\mathbf{R}_i, v_{i\parallel}, J_i) \approx f_i(\mathbf{R}_e, v_{i\parallel}, J_i)$ e integrato rispetto a $d^3 R_i$. Come risultato nella (60,13) è rimasta solo l'integrazione rispetto a $d^3 p_i$ e la media rispetto agli urti include in sé l'integrazione rispetto alle posizioni \mathbf{R}_i . Più avanti, nei casi concreti, questa media verrà espressa in funzione della corrispondente sezione di diffusione. Per il momento notiamo soltanto che i valori medi $\langle \Delta \mathbf{R}_{\perp} \Delta J \rangle$, $\langle \Delta \mathbf{R}_{\perp} \Delta v_{\parallel} \rangle$ sono nulli. Ciò risulta dal fatto che i prodotti $\Delta \mathbf{X} \Delta J$, $\Delta \mathbf{Y} \Delta J$ (e gli stessi prodotti con Δv_{\parallel} al posto di ΔJ) formano un vettore nel piano xy . Poiché per le piccole circonferenze di Larmor non esistono in questo piano direzioni prefissate, il vettore suindicato si annulla nel calcolare il valore medio.

L'integrale degli urti nelle variabili di deriva ha la seguente importante proprietà: aggiunto all'equazione cinetica, esso cambia l'espressione per il flusso di particelle (nello spazio ordinario!) mediante la funzione di distribuzione. Per vederlo, scriviamo l'equazione cinetica nella forma:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\partial (V f_e)}{\partial R_{\perp}} + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (\dot{v}_{\parallel} f_e) = - \frac{\partial s_{e\perp}}{\partial R_{\perp}} - \frac{\partial s_{e\parallel}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{\partial s_{eJ}}{\partial J} \quad (60,14)$$

(in seguito alla supposta costanza di E e B si può portare V sotto il segno di derivata). Integrando questa equazione rispetto a d^3p otteniamo

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div}_R \int (V f_e + s_{e\perp}) d^3p = 0, \quad N_e = \int f_e d^3p \quad (60,15)$$

(omettiamo per brevità l'indice e per le variabili elettroniche); N_e è la densità spaziale del numero di piccole circonferenze e l'espressione sotto il segno div_R rappresenta, quindi, la loro densità di flusso. Vediamo che all'espressione ordinaria $\int V f_e d^3p$ si aggiunge ancora il termine $\int s_{e\perp} d^3p$, legato agli urti. Questo termine rappresenta difatti il flusso di diffusione nella direzione trasversale al campo magnetico. Per questa descrizione (a differenza della descrizione ordinaria della diffusione) esso entra direttamente nell'equazione cinetica.

Nel ricorrere a queste espressioni si deve, ovviamente, tener presente che la densità di corrente elettrica è legata al flusso delle particelle proprie e non delle circonferenze. Il flusso di particelle differisce, secondo la (60,9), dal flusso di piccole circonferenze per il termine con il rotore, che descrive la magnetizzazione. Perciò l'espressione definitiva per la densità di corrente degli elettroni ha la forma

$$j_e = -e \int V f_e d^3p - \frac{mc}{B} \text{rot} \left(b \int f_e J d^3p \right) - \int e s_{e\perp} d^3p. \quad (60,16)$$

L'espressione (60,13) acquista significato reale soltanto dopo il calcolo dei valori medi che figurano in essa. Mostriamo come si ottiene ciò sull'esempio dell'integrale elettronico per gli urti elettrone-ione.

I calcoli si fanno in modo diverso nelle due regioni di valori dei parametri d'impatto ρ definiti dalle disuguaglianze

$$\text{I) } \rho \ll r_{Be}, \quad \text{II) } r_{Be} \ll \rho \ll a. \quad (60,17)$$

Osserviamo che le integrazioni rispetto al parametro ρ avranno carattere logaritmico, come si verifica di solito nella diffusione coulombiana. Con precisione logaritmica si può fare a meno della distinzione tra le disuguaglianze forti (\gg) e deboli ($>$). Perciò le regioni

(60,17) coprono in effetti tutto l'intervallo di variazione del parametro d'impatto ρ (in accordo con la (60,1) si è supposto, ovviamente, che $r_{Be} \ll a$). Per l'esistenza della regione I è necessario anche che sia

$$r_{Be} \gg \rho_{\min} = ze^2/mv_{Te}^2, \quad (60,18)$$

dove ρ_{\min} è la distanza d'impatto, alla quale l'angolo di diffusione diventa ~ 1 (consideriamo qui unicamente il caso quasi-classico $e^2/\hbar v_{Te} \gg 1$).

Supporremo al tempo stesso che $r_{Bi} \gg a$. Allora per tutti i parametri d'impatto $\rho \leq a$ l'influenza del campo magnetico sul moto degli ioni (nel processo d'urto) è inessenziale, in quanto la traiettoria dello ione viene incurvata poco dal campo alle distanze $\sim \rho$. Inoltre si può trascurare (nel limite $m/M \rightarrow 0$) la risposta degli ioni, ponendo cioè uguale a zero la variazione di tutte le variabili R_{\perp} , v_{\parallel} , J che li caratterizzano¹⁾. Allora nella (60,13) scompare il secondo termine tra parentesi graffe in modo che la componente elettrone-ione della corrente elettronica assume la forma

$$s_{\alpha}^{(ei)} = -\frac{N_i}{2} \langle \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} \rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial X_{\beta}}. \quad (60,19)$$

Le grandezze $\langle \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} \rangle$ formano un tensore spaziale, trasversale alla direzione del campo. Rappresentiamolo nella forma

$$\langle \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} \rangle = \frac{1}{2} \langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle (\delta_{\alpha\beta} - b_{\alpha} b_{\beta}), \quad (60,20)$$

che esprime questa trasversalità in modo esplicito. Quanto al flusso (60,19), esso si scrive come

$$s^{(ei)} = -\frac{N_i}{4} \langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle^{(ei)} \nabla_{\perp} f_e, \quad (60,21)$$

dove $\nabla_{\perp} = \nabla_{\mathbf{R}} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{R}})$ è l'operatore di derivazione nelle direzioni trasversali a \mathbf{b} .

Le espressioni analoghe della (60,19) per i « flussi di velocità » sono

$$\begin{aligned} s_{\parallel}^{(ei)} &= -\frac{N_i}{2} \left\{ \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + \langle \Delta v_{\parallel} \Delta J \rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial J} \right\}, \\ s_J^{(ei)} &= -\frac{N_i}{2} \left\{ \langle \Delta v_{\parallel} \Delta J \rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\parallel}} + \langle (\Delta J)^2 \rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial J} \right\}. \end{aligned} \quad (60,22)$$

In equilibrio, cioè per la distribuzione maxwelliana

$$f_e = \text{costante} \cdot \exp \left\{ -\frac{m}{T} \left(\frac{v_{\parallel}^2}{2} + J \right) \right\}, \quad (60,23)$$

¹⁾ È impossibile fare ciò se esistono parametri d'impatto per i quali $a \gg \rho \gg r_{Bi}$. Per questi urti lo ione va alla deriva nel campo dell'elettrone e la sua grande massa non si manifesta.

l'integrale degli urti deve annullarsi. Ponendo la (60,23) nelle (60,22) e uguagliando a zero i flussi, troviamo

$$\langle \Delta v_{||} \Delta J \rangle^{(ei)} = -v_{||} \langle (\Delta v_{||})^2 \rangle^{(ei)} = -\frac{1}{v_{||}} \langle (\Delta J)^2 \rangle^{(ei)}. \quad (60,24)$$

Calcoliamo dapprima il contributo proveniente dalla regione I. Si può supporre in questa regione che il campo magnetico in generale non incida sulla diffusione, poiché a queste distanze non si incurva molto né la traiettoria dello ione né quella dell'elettrone. In questo caso come variabile naturale per la descrizione degli urti si prende la quantità di moto ordinaria dell'elettrone \mathbf{p} , in funzione della quale si devono esprimere le variabili di deriva. Secondo le (60,3-4), (60,8) abbiamo

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{1}{m\omega_{Be}} [\mathbf{b} \mathbf{p}_{\perp}], \quad v_{||} = \frac{p_{||}}{m}, \quad J = \frac{p_{\perp}^2}{2m^2}.$$

Tenendo conto che le coordinate della particella \mathbf{r} (a differenza delle coordinate del centro dell'orbita \mathbf{R}) non variano per l'urto, ricaviamo

$$\Delta \mathbf{R}_{\perp} = \frac{1}{m\omega_{Be}} [\mathbf{b} \mathbf{q}_{\perp}], \quad \Delta v_{||} = \frac{q_{||}}{m}, \quad \Delta J = \frac{1}{m^2} \mathbf{p}_{\perp} \mathbf{q}_{\perp}, \quad (60,25)$$

dove \mathbf{q} è una piccola variazione della quantità di moto \mathbf{p} .

Denotando con l'indice I il contributo dalla categoria di urti considerata, scriviamo ora

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle_I^{(ei)} = \int (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 v d\sigma = \frac{1}{m^2 \omega_{Be}^2} \int q_{\perp}^2 v d\sigma, \quad (60,26)$$

dove $d\sigma$ è la sezione di diffusione dell'elettrone sullo ione fisso. Prendendo questa sezione dalla (41,6) e integrando, otteniamo

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle_I^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^4 L_I}{m^2 \omega_{Be}^2 v} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad (60,27)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{b} , e

$$L_I = \ln \frac{mr_{Be} v_{Te}^2}{ze^2} = \ln \frac{mv_{Te}^2}{ze^2 \omega_{Be}} \quad (60,28)$$

il logaritmo coulombiano « tagliato » superiormente alle distanze d'impatto $\rho \sim r_{Be}$ (la frontiera superiore della regione I). Infine, esprimendo questo risultato nelle variabili di deriva troviamo

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle_I^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^4 c^2 L_I}{B^2} \frac{v_{||}^2 + J}{(v_{||}^2 + 2J)^{3/2}}. \quad (60,29)$$

Un calcolo analogo dà

$$\langle \Delta v_{\parallel} \Delta J \rangle_I^{(ei)} = - \frac{8\pi z^2 e^4 L_I}{m^2} \frac{J v_{\parallel}}{(v_{\parallel}^2 + 2J)^{3/2}}, \quad (60,30)$$

e le due grandezze rimanenti sono definite dalla (60,24).

Consideriamo ora la regione II. Qui sono naturali le variabili di deriva e l'urto viene descritto come deviazione di deriva della piccola circonferenza in volo nella direzione \mathbf{b} (l'asse z) nel campo coulombiano dello ione fisso. Per deriva la velocità v_{\perp} e, quindi, J non cambia; in forza della legge di conservazione dell'energia per diffusione su uno ione pesante, ciò conduce, a sua volta, alla conservazione di v_{\parallel} . Perciò la regione II non dà contributo alle grandezze (60,24).

Il contributo alla $\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle$, invece, si calcola come

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle_{II}^{(ei)} = \int (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 |v_{\parallel}| d\sigma = \int (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 |v_{\parallel}| d^2\rho, \quad (60,31)$$

dove ρ è il valore del raggio vettore del centro della piccola circonferenza \mathbf{R}_{\perp} prima dell'urto. La variazione di \mathbf{R}_{\perp} per la circonferenza in volo nel campo magnetico omogeneo e costante \mathbf{B} e nel campo elettrico costante $\mathbf{E} = ez\mathbf{R}/R^3$ (il campo dello ione) è data dall'equazione della deriva

$$\frac{d\mathbf{R}_{\perp}}{dt} = \frac{c}{B} [\mathbf{bE}] = \frac{zec}{B} \frac{[\mathbf{bR}_{\perp}]}{(R_{\perp}^2 + R_{\parallel}^2)^{3/2}} \quad (60,32)$$

(si veda la (60,6)). In prima approssimazione si può porre a secondo membro di questa equazione $\mathbf{R}_{\perp} \approx \rho$, $R_{\parallel} = v_{\parallel}t$. La variazione totale di \mathbf{R}_{\perp} in seguito a urto si ottiene integrando la (60,32) rispetto a t da $-\infty$ a ∞ e vale

$$\Delta \mathbf{R}_{\perp} = \frac{2zec}{B |v_{\parallel}|} \frac{[\mathbf{b}\rho]}{\rho^2}. \quad (60,33)$$

Ponendo questa espressione nella (60,31) e integrando (con precisione logaritmica corrispondente alla frontiera della regione II) troviamo

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle_{II}^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^2 c^2 L_{II}}{B^2 |v_{\parallel}|}, \quad L_{II} = \ln \frac{a}{r_{Be}}. \quad (60,34)$$

In generale, i contributi (60,29) e (60,34) hanno lo stesso ordine di grandezza

$$N_i \langle (\Delta \mathbf{R}_{\perp})^2 \rangle \sim v_{ei} r_{Be}^2,$$

dove v_{ei} è la frequenza media degli urti elettrone-ione. La particolarità del contributo (60,34) è che esso diventa infinito per $v_{\parallel} \rightarrow 0$ indipendentemente dal valore v_{\perp} . Il significato fisico di questa divergenza è il seguente: per piccola velocità v_{\parallel} la piccola circonferenza resta a lungo nel campo dello ione e la deriva, nel frattempo, lo porta a grande distanza.

In realtà, ovviamente, la formula (60,34) diventa inapplicabile per piccole v_{\parallel} per diversi motivi: 1) se $r_{Bi} \gg a$, allora per $|v_{\parallel}| \ll \ll v_{Ti}$ durante l'urto lo ione può allontanarsi dall'elettrone; questo meccanismo « taglia » la divergenza per $|v_{\parallel}| \sim v_{Ti}$; 2) nella deduzione della formula si è supposto comunque che $|\Delta R_{\perp}| \ll \rho$; 3) la piccola circonferenza può allontanarsi dallo ione considerato a causa della deriva nel campo di altre particelle (urto triplo).

Le formule scritte risolvono il problema della costruzione dell'equazione cinetica nell'approssimazione di deriva. Essa, in particolare, consente di trovare i coefficienti cinetici del plasma in prima approssimazione non nulla rispetto a $1/B$ (si veda il problema 1).

Infine, resta da spiegare in che modo l'integrazione rispetto a $d^2\rho$ ristabilisca formalmente la simmetria rispetto all'inversione del tempo, cosa che abbiamo già sfruttato nella scrittura della (60,13). La violazione di questa simmetria si manifesta nel cambiamento di segno della deviazione ΔR_{\perp} nella (60,33) quando cambia il verso di B . Tuttavia, si può ristabilire il vecchio segno mediante la sostituzione della variabile d'integrazione $\rho \rightarrow -\rho$, in modo che il cambiamento di segno di B in questa approssimazione non si può manifestare (nella regione I, invece, il campo magnetico in generale non influisce sulla diffusione).

PROBLEMI

1. Determinare nell'approssimazione di deriva il coefficiente di Hall \mathcal{R} e la conduttività trasversale σ_{\perp} di un plasma (S. T. Beljaev, 1955).

Soluzione. Consideriamo il plasma con un gradiente della densità elettronica (in assenza di campo elettrico e di gradiente della temperatura), supponiamo maxwelliana la funzione di distribuzione f_e nelle (60,16) e (60,21) e troviamo

$$j = \frac{cT}{B} [b \nabla N_e] + e D_{\perp} \nabla_{\perp} N_e,$$

inoltre, il coefficiente di diffusione trasversale è

$$D_{\perp} = \frac{N_i}{4} \langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle,$$

dove il trattino orizzontale significa valore medio rispetto alla distribuzione maxwelliana degli elettroni. Confrontando con l'espressione generale (58,13), troviamo in prima approssimazione rispetto a $1/B$ la vecchia espressione (59,8) per \mathcal{R} . Nell'approssimazione successiva abbiamo

$$\sigma_{\perp} = T/e^2 N_e \mathcal{R}^2 B^2 D_{\perp}. \quad (1)$$

Nella regione II (si veda la (60,17)) consideriamo $\langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle$ definito dalla (60,34). Con precisione logaritmica otteniamo

$$\overline{|v_{\parallel}|^{-1}} = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv_{\parallel}^2}{2T} \right) \frac{dv_{\parallel}}{|v_{\parallel}|} \approx 2 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \ln \frac{v_{Te}}{v_{\min}}.$$

dove v_{\min} è definito con uno dei meccanismi indicati alla fine del paragrafo. Ponendo, ad esempio, $v_{\min} \sim v_{Ti}$ otteniamo infine

$$D_{\perp}^{II} = \frac{(2\pi m)^{1/2} z^2 e^2 c^2 N_i}{T^{1/2} B^2} \ln \frac{M}{m} \ln \frac{a}{r_{Be}}. \quad (2)$$

Analogamente, considerando $\langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle$ definito dalla (60,27), otteniamo il contributo della regione I al coefficiente di diffusione

$$D_{\perp}^I = \frac{4 (2\pi m)^{1/2} z^2 e^2 c^2 N_i}{3 T^{1/2} B^2} \ln \frac{m v_{Te}^3}{z e^2 \omega_{Be}}. \quad (3)$$

Se supponiamo che sia soddisfatta la disuguaglianza (59,10) inversa della (60,1), allora la regione II non esiste e il logaritmo nella (3) va sostituito con il suo valore coulombiano ordinario (41,10). In questo caso la sostituzione della (3) nella (1) conduce alla formula (59,15) per σ_{\perp} .

2. Determinare il coefficiente di diffusione trasversale D_{\perp} per urti tra elettroni e atomi neutri.

Soluzione. Poiché il carattere dell'interazione dell'elettrone con gli atomi è di breve durata, esiste solo la regione I in cui con a si deve intendere la dimensione dell'atomo¹⁾. Resta valida anche la formula (60,26). Tuttavia, ora si deve sostituire in essa la sezione di diffusione dell'elettrone su un atomo neutro. Dopo l'integrazione sugli angoli la grandezza D_{\perp} si esprime in funzione della sezione di trasporto σ_t di questa diffusione

$$D_{\perp} = \frac{N_a}{4} \langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle = \frac{N_a}{2 \omega_{Be}^2} \overline{v^3 \sigma_t}$$

(N_a è la densità del numero di atomi). Per la sezione σ_t indipendente dalla velocità dell'elettrone otteniamo, dopo aver calcolato il valore medio secondo la distribuzione maxwelliana,

$$D_{\perp} = \frac{2}{3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m} \right)^{3/2} \frac{N_a \sigma_t}{\omega_{Be}^2}.$$

¹⁾ Si può dubitare che l'integrale degli urti (60,12) sia applicabile alla diffusione su un potenziale di corto raggio, che si produce, ovviamente, per angoli dell'ordine di grandezza dell'unità. Si vede facilmente, tuttavia, che nel problema in esame si richiede soltanto che le variazioni della posizione del centro dell'orbita siano piccole, $\Delta R_{\perp} \sim r_{Be}$, rispetto alle distanze caratteristiche alle quali varia la concentrazione degli elettroni, il che corrisponde alla condizione di applicabilità dell'equazione della diffusione trasversale (cfr. la fine del § 59).

Capitolo VI

TEORIA DELLE INSTABILITÀ

§ 61. Instabilità di fascio

In accordo con i risultati del § 34, l'ampiezza di una perturbazione con vettore d'onda \mathbf{k} in un mezzo omogeneo infinito si comporta asintoticamente per $t \rightarrow \infty$ come

$$e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (61,1)$$

dove $\omega(\mathbf{k})$ è la frequenza delle onde che si propagano nel mezzo. In particolare, per le onde longitudinali in un plasma le frequenze $\omega(\mathbf{k})$ sono radici dell'equazione ¹⁾

$$\epsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (61,2)$$

Le frequenze $\omega(\mathbf{k})$ sono in generale complesse. Se la parte immaginaria $\text{Im } \omega \equiv -\gamma < 0$, la perturbazione si smorza con il tempo. Se, invece, in un certo intervallo di valori \mathbf{k} abbiamo $\gamma < 0$, queste perturbazioni crescono, vale a dire che il mezzo è instabile rispetto alle oscillazioni in questo intervallo di lunghezze d'onda; la grandezza $|\gamma|$ si chiama in questo caso *incremento dell'instabilità*. Sottolineiamo subito che parlando della crescita « illimitata » della perturbazione (secondo la legge $\exp(|\gamma|t)$), qui e più avanti intendiamo sempre il comportamento solo nell'approssimazione lineare; in realtà, ovviamente, la crescita è limitata dagli effetti non lineari.

In un plasma senza urti la parte immaginaria della frequenza è dovuta allo smorzamento di Landau. Dal punto di vista termodinamico lo stato d'equilibrio del plasma, corrispondendo al massimo assoluto dell'entropia, è stabile rispetto a qualsiasi perturbazione. Tuttavia, è stato già detto al § 30 che per distribuzioni di non equilibrio, nel plasma all'assorbimento dell'energia delle oscillazioni può subentrare il loro rafforzamento. Ciò si manifesta nella comparsa di una regione di valori delle variabili indipendenti \mathbf{k} e ω ($\omega > 0$) in cui la parte immaginaria della costante dielettrica è negativa: $\epsilon_l'(\omega, \mathbf{k}) < 0$. Sottolineiamo però che la presenza di queste regioni di per sé non implica ancora necessariamente l'instabilità del plasma (comunque nell'approssimazione lineare). In questa regione

¹⁾ Ricordiamo che nel caso di plasma anisotropo questa equazione di dispersione si riferisce alle onde « lente » quasi-longitudinali; si veda il § 32.

deve anche cadere difatti uno dei rami dello spettro delle oscillazioni di plasma.

Un esempio caratteristico di instabilità è rappresentato da un fascio diretto di elettroni che passano per un plasma immobile (A. I. Achiezer, Ja. B. Fajnberg, 1949; D. Bohm, E. P. Gross, 1949). Il fascio è supposto elettronicamente compensato: la somma delle densità elettroniche delle cariche nel plasma e nel fascio è uguale alla densità ionica delle cariche del plasma. Il sistema è omogeneo e illimitato, cioè il fascio (così come il plasma immobile) riempie tutto lo spazio e la sua velocità diretta V è ovunque la stessa. Riterremo non relativistica la velocità V .

Supponiamo dapprima che il fascio e il plasma siano freddi, cioè che si possa trascurare il moto termico delle loro particelle; la condizione necessaria a tale scopo verrà precisata più avanti.

Nella regione di frequenze delle oscillazioni elettroniche la costante dielettrica longitudinale del sistema plasma-fascio ha la forma

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) - 1 = -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - \mathbf{kV})^2}. \quad (61,3)$$

Il primo termine a secondo membro corrisponde al plasma immobile, $\Omega_e = (4\pi e^2 N_e / m)^{1/2}$ è la corrispondente frequenza elettronica del plasma. Il secondo termine è dovuto agli elettroni del fascio. Nel sistema di riferimento K' , che si muove assieme al fascio, il contributo dei suoi elettroni a $\varepsilon_l - 1$ è uguale a $-(\Omega_e' / \omega')^2$, dove ω' è la frequenza delle oscillazioni in questo sistema e $\Omega_e' = (4\pi e^2 N_e' / m)^{1/2}$ (N_e' è la densità degli elettroni del fascio). Passando al sistema di riferimento iniziale K , la frequenza ω' diviene

$$\omega' = \omega - \mathbf{kV} \quad (61,4)$$

e si riottiene l'espressione (61,3) ¹⁾.

Riterremo piccola la densità del fascio nel senso che

$$N_e' \ll N_e \quad (61,5)$$

in modo che anche $\Omega_e' \ll \Omega_e$. Allora la presenza del fascio non fa altro che cambiare un po' il ramo fondamentale dello spettro delle oscillazioni longitudinali del plasma, ossia la radice dell'equazione di dispersione $\varepsilon_l = 0$ per cui $\omega \approx \Omega_e$. Ma accanto a questo ramo ne compare un altro nuovo, legato alla presenza del fascio, del quale ora ci occuperemo.

¹⁾ È facile ottenere la legge di trasformazione della frequenza trasformando il fattore di fase dell'onda. Il raggio vettore di un punto nel sistema K' è $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$. Perciò

$$\mathbf{kr} - \omega t = \mathbf{kr}' - (\omega - \mathbf{kV})t = \mathbf{kr}' - \omega't.$$

Affinché il termine con il piccolo numeratore $\Omega_e'^2$ resti nell'equazione della dispersione

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2} = 1, \quad (61,6)$$

deve essere piccolo anche il denominatore. Perciò cerchiamo la soluzione nella forma $\omega = kV + \delta$ con δ piccolo. Allora l'equazione diventa

$$\frac{\Omega_e^2}{(kV)^2} + \frac{\Omega_e'^2}{\delta^2} = 1, \quad (61,7)$$

da cui

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{[1 - (\Omega_e/kV)^2]^{1/2}}, \quad (61,8)$$

dove la condizione $\delta \ll kV$ impone che $|kV|$ sia non troppo vicino a Ω_e . L'ipotesi di plasma freddo implica che sia soddisfatta la condizione $kv_{Te} \ll \omega$, che in questo caso significa quindi che deve essere $v_{Te} \ll V$, cioè la velocità del fascio è grande rispetto alla velocità termica degli elettroni nel plasma.

Se $(kV)^2 > \Omega_e^2$, allora le due radici (61,8) sono reali e le oscillazioni non crescono. Se invece

$$(kV)^2 < \Omega_e^2, \quad (61,9)$$

i due valori δ sono immaginari; quello, in cui $\text{Im } \omega = \text{Im } \delta > 0$, corrisponde a oscillazioni crescenti. In tal modo, il sistema è instabile rispetto alle oscillazioni con valori kV sufficientemente piccoli.

Un'altra situazione viene a crearsi includendo il moto termico degli elettroni nel plasma. Nel caso generale, al posto della (61,3) avremo

$$\varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon_l^{(p1)}(\omega, k) - \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2}, \quad (61,10)$$

dove $\varepsilon_l^{(p1)}$ si riferisce al plasma senza fascio. Risolvendo l'equazione $\varepsilon_l = 0$ allo stesso modo, troviamo che

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{[\varepsilon_l^{(p1)}(kV, k)]^{1/2}}. \quad (61,11)$$

Ma in virtù dello smorzamento di Landau la funzione $\varepsilon_l^{(p1)}$ ha sempre la parte immaginaria (per k qualsiasi). Quindi δ sarà sempre complessa e, inoltre, in virtù del doppio segno nella (61,11) per uno dei rami delle oscillazioni sarà $\text{Im } \delta > 0$, vale a dire che queste oscillazioni sono instabili. Passando a V grandi, corrispondenti al caso suindicato di plasma freddo, la parte $\text{Im } \varepsilon_l$ legata allo smorzamento di Landau diventa esponenzialmente piccola e si ritorna quindi alla (61,8).

Nelle considerazioni esposte è stata trascurata la dispersione termica delle velocità degli elettroni nel fascio. Ciò è giustificato se la grandezza di questa dispersione è

$$v_{Te}' \ll |\delta|/k. \quad (61,12)$$

PROBLEMI

1. Determinare la frontiera di instabilità di un fascio in un plasma freddo da parte dei valori kV vicini a Ω_e .

Soluzione. Per piccoli valori della differenza $(kV)^2 - \Omega_e^2$ la precisione dell'equazione (61,7) è insufficiente. Conservando nell'equazione $\varepsilon_l = 0$ (con ε_l definito dalla (61,3)) anche il termine di ordine successivo rispetto a δ , otteniamo

$$\frac{\Omega_e'^2}{\delta^2} \approx 1 - \frac{\Omega_e^2}{(kV)^2} + \frac{2\Omega_e^2\delta}{(kV)^3} \approx \frac{2(kV - \Omega_e)}{\Omega_e} + \frac{2\delta}{\Omega_e}.$$

Introducendo le grandezze ξ e τ in base alle relazioni

$$\delta = \xi \left(\frac{1}{2} \Omega_e \Omega_e'^2 \right)^{1/3}, \quad \tau = \left(\frac{2}{\Omega_e \Omega_e'^2} \right)^{1/3} (kV - \Omega_e),$$

riscriviamo l'equazione nella forma

$$\xi^3 + \tau \xi^2 = 1 \quad (1)$$

(per fissare le idee, supponiamo kV vicino a $+\Omega_e$ e non a $-\Omega_e$). Tutte e tre le radici dell'equazione (1) sono reali per $\tau > 3 \cdot 2^{-2/3}$, il che definisce la regione di stabilità. Due di queste radici corrispondono a due radici dell'equazione (61,7) e la terza corrisponde per $\Omega_e \approx kV$ alla frequenza delle oscillazioni del plasma immobile vicina a queste radici.

2. Studiare la stabilità delle onde ionico-acustiche in un plasma a doppia temperatura ($T_e \gg T_i$), in cui la componente elettronica si muove relativamente alla componente ionica con velocità macroscopica V e inoltre $V \ll v_{Te}$.

Soluzione. Per la condizione $V \ll v_{Te}$ il moto diretto degli elettroni incide poco sulla legge di dispersione delle onde ionico-acustiche, che è sempre data dalla formula (33,4):

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{zT_e}{M} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + k^2 a_e^2)^{1/2}}.$$

Lo smorzamento (la componente elettronica) si ottiene dalla (33,6) mediante la sostituzione (61,4):

$$\gamma = (kV - \omega) \left(\frac{\pi z m}{8M} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

La condizione di instabilità è $kV > \omega$; essa impone comunque che sia $V > \omega/k$. In prossimità della frontiera di instabilità il fattore $kV - \omega$ nella (2) è piccolo e allora può risultare necessario includere in γ anche la parte ionica dello smorzamento, piccola nelle condizioni ordinarie.

§ 62. Instabilità assoluta e convettiva

La presenza nell'equazione della dispersione di radici nel semipiano superiore di ω significa che la perturbazione piccola iniziale sotto forma di onda piana cresce, cioè il sistema è instabile rispetto a questa perturbazione. In realtà, però, ogni perturbazione iniziale

rappresenta un « pacchetto d'onde » di dimensioni finite nello spazio e le onde piane non sono altro che alcune delle sue componenti di Fourier. Col passare del tempo il pacchetto « si smussa » e la sua ampiezza (nel sistema instabile) cresce. Al tempo stesso, tuttavia, come ogni pacchetto d'onde, esso si sposterà nello spazio. Qui si possono verificare due casi.

Primo, malgrado lo spostamento del pacchetto d'onde, la perturbazione cresce infinitamente in ogni punto dello spazio; questa instabilità si dice *assoluta*. Secondo, il pacchetto si sposta così rapidamente che in ogni punto prefissato dello spazio la perturbazione tende a zero per $t \rightarrow \infty$; questa instabilità si dice *convettiva*.

Sottolineiamo subito che questa distinzione è relativa nel senso che il carattere dell'instabilità è sempre definito rispetto a questo o quel sistema di riferimento e il passaggio da un sistema ad un altro può modificare questo carattere: l'instabilità convettiva in un certo sistema diventa assoluta nel sistema che si muove « con il pacchetto d'onde » e l'instabilità assoluta si trasforma in convettiva in un sistema che « si allontana » in modo sufficientemente rapido dal pacchetto.

Tuttavia, questa circostanza non priva di significato fisico la distinzione tra i due tipi di instabilità. Nelle impostazioni reali del problema esiste sempre un sistema di riferimento prefissato dal punto di vista sperimentale, rispetto al quale si deve considerare l'instabilità. La possibilità di studiare un sistema fisico infinitamente esteso non esclude il fatto che questo sistema ha in realtà delle frontiere (le pareti, ad esempio) che servono come « sistema di riferimento di laboratorio ». Per di più, la limitatezza effettiva del sistema può far sì che per l'instabilità convettiva la perturbazione, in generale, non farà in tempo a svilupparsi prima che il pacchetto d'onde « sia portato via » all'esterno della frontiera del sistema (il fluire di un liquido in un tubo, ad esempio).

La teoria esposta più avanti, che consente di stabilire il criterio di distinzione tra i due tipi d'instabilità, ha un carattere molto generale ¹⁾. Si tratta di un qualsiasi sistema omogeneo e infinito (almeno in una direzione, l'asse x). Perciò non concretizziamo qui la natura del mezzo e la perturbazione in esso, indicando quest'ultima con $\psi(t, r)$. Inoltre, ci limitiamo al caso di un pacchetto d'onde unidimensionale. Se il sistema è tridimensionale, ciò vuol dire che la perturbazione considerata è della forma

$$\psi(t, r) = \psi(t, x) e^{i(k_y y + k_z z)}$$

con k_y, k_z dati.

¹⁾ Questo criterio è stato stabilito originariamente da P. A. Sturrock (1958). La formulazione data più avanti del criterio appartiene a R. J. Briggs (1964), che seguiremo infatti ai §§ 62-64.

Rappresentiamo $\psi(t, x)$ sotto forma dello sviluppo unilaterale di Fourier rispetto al tempo da $t = 0$ (l'istante in cui compare la perturbazione) a $t = \infty$. Indichiamo con $\varphi(\omega, x)$ la componente di questo sviluppo:

$$\varphi(\omega, x) = \int_0^{\infty} \psi(t, x) e^{i\omega t} dt. \quad (62,1)$$

Nel seguito dovremo considerare le perturbazioni crescenti per $t \rightarrow \infty$. Supporremo (come difatti avviene) che questa crescita si verifichi non più rapidamente di una legge esponenziale $\exp(\sigma_0 t)$. Allora si può fare convergente l'integrale (62,1), considerando ω come variabile complessa con $\text{Im } \omega = \sigma > \sigma_0$. In questa regione $\varphi(\omega, x)$, come funzione della variabile complessa ω , non ha singolarità. Nella regione $\text{Im } \omega < \sigma_0$, invece, la funzione $\varphi(\omega, x)$ si deve intendere come prolungamento analitico; è ovvio che qui essa ha delle singolarità.

L'espressione inversa per la funzione $\psi(t, x)$, in funzione della sua immagine di Fourier, ha la forma

$$\psi(t, x) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} \varphi(\omega, x) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (62,2)$$

dove $\sigma > \sigma_0$, in modo che il cammino d'integrazione nella (62,2) (lo chiameremo ω -contorno) passa nel semipiano superiore di ω sopra tutti i punti singolari della funzione $\varphi(\omega, x)$.

Sviluppiamo la funzione $\varphi(\omega, x)$ come integrale di Fourier rispetto alla coordinata x :

$$\varphi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\omega k}^{(+)} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (62,3)$$

(per brevità omettiamo l'indice di k_x).

La funzione $\psi_{\omega k}^{(+)}$ si ottiene in ogni caso concreto risolvendo le « equazioni del moto » linearizzate del sistema in esame e ha la forma

$$\psi_{\omega k}^{(+)} = \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)}, \quad (62,4)$$

dove $g_{\omega k}$ è definita dalla perturbazione iniziale e la funzione $\Delta(\omega, k)$ è caratteristica per il sistema in quanto tale (così, per un plasma l'« equazione del moto » è l'equazione cinetica, la funzione $\Delta(\omega, k)$ risulta essere la costante dielettrica longitudinale del plasma e $g_{\omega k}$ si esprime in funzione della componente di Fourier della perturbazione iniziale mediante la formula (34,12)).

Supporremo che $g_{\omega k}$, come funzione delle variabili complesse ω e k , non abbia singolarità per valori finiti di esse, che sia cioè una

funzione intera ¹⁾. Allora tutti i punti singolari $\psi_{\omega k}^{(+)}$ coincidono con le singolarità del fattore $1/\Delta(\omega, k)$. L'uguaglianza

$$\Delta(\omega, k) = 0 \quad (62,5)$$

rappresenta l'equazione di dispersione del sistema; le sue radici $\omega(k)$ determinano le frequenze delle oscillazioni con valori dati (reali) del vettore d'onda k . Come abbiamo visto al § 34, sono queste frequenze a definire la legge asintotica (per $t \rightarrow \infty$) di variazione nel tempo della componente di Fourier della perturbazione con k dato:

$$\psi_k(t) \sim e^{-i\omega(k)t} = e^{-i\omega'(k)t + \omega''(k)t}$$

Se si parte da questa legge, la ricerca della legge asintotica di variazione della perturbazione in un punto dato dello spazio richiede,rebbe di studiare l'integrale

$$\psi(t, x) \sim \int e^{-i\omega'(k)t} e^{\omega''(k)t} e^{ikh} dk. \quad (62,6)$$

In presenza di instabilità, quando in una regione di valori k abbiamo $\omega''(k) > 0$, uno dei fattori nell'espressione integranda cresce infinitamente per $t \rightarrow \infty$ e l'altro diventa una funzione oscillante in modo infinitamente rapido; queste tendenze opposte rendono difficile la stima dell'integrale.

Torniamo invece all'espressione (62,2) per $\psi(t, x)$, prima dell'integrazione rispetto a ω . Spostiamo il contorno ω in basso fino ad « attaccarlo » al primo punto singolare della funzione $\varphi(\omega, x)$ (il più alto, cioè con ω'' più grande); questo punto si trovi per $\omega = \omega_c$ (come risulterà dal seguito, ω_c non dipende da x). È evidente che il valore asintotico dell'integrale è definito dall'intorno di questo stesso punto in modo che

$$\psi(t, x) \sim e^{-i\omega_c t} = \exp(-i\omega_c' t + \omega_c'' t). \quad (62,7)$$

Se $\omega_c'' > 0$, la perturbazione cresce in ogni punto fisso x , vale a dire che l'instabilità è assoluta. Se invece $\omega_c'' < 0$, la perturbazione nei punti fissi tende a zero, in altre parole, l'instabilità è convettiva. Quindi, il criterio cercato si riduce alla definizione di ω_c .

La funzione $\varphi(\omega, x)$ è definita dall'integrale (62,3) con $\psi_{\omega k}^{(+)}$ dalla (62,4):

$$\varphi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)} e^{ikh} \frac{dk}{2\pi}. \quad (62,8)$$

Poiché $g_{\omega k}$, per ipotesi, è una funzione intera di k , le singolarità dell'espressione integranda (come funzione di k complessa) giacciono

¹⁾ A tal fine è necessario comunque che il pacchetto d'onde iniziale decresca in modo sufficientemente rapido nello spazio (più rapidamente di $\exp(-\alpha |x|)$).

nei punti singolari del fattore $1/\Delta(\omega, k)$. Di solito si tratta di poli, cioè delle radici $k(\omega)$ dell'equazione (62,5).

Supponiamo che per un determinato valore di ω (un punto sul contorno ω) con parte immaginaria $\omega'' = \sigma$ sufficientemente grande (positiva) i punti singolari giacciono nel piano k , come è rappresentato nella fig. 22: alcuni punti nel semipiano superiore, gli altri in quello inferiore. In questo caso il cammino d'integrazione rispetto a k (contorno k) nella (62,8) passa lungo l'asse reale. Facciamo variare

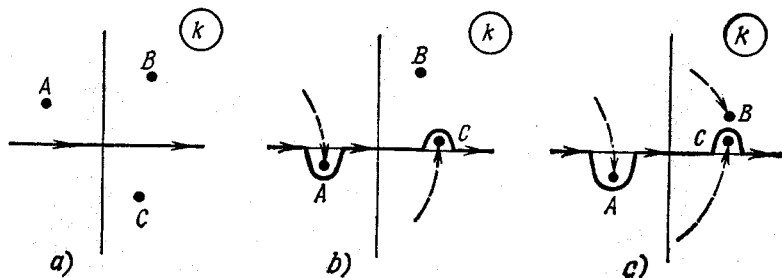


Fig. 22

ora ω , diminuendo gradualmente ω'' . I punti singolari si sposteranno (nel piano k) e per alcuni valori di ω possono raggiungere l'asse reale¹⁾. Questi valori di ω non sono ancora punti singolari per la funzione $\varphi(\omega, k)$: nulla impedisce di spostare il contorno k in modo tale da allontanarlo dall'intorno dei punti singolari intersecanti l'asse reale (come è mostrato nella fig. 22, b). La singolarità dell'integrale compare tuttavia se due punti singolari, che si spostano, si avvicinano stringendo il cammino d'integrazione e, quindi, eliminano la possibilità di spostarlo lontano dal loro intorno (fig. 22, c).

In tal modo il valore di ω , che definisce il carattere dell'instabilità, si sceglie tra quelli tali che le due radici $k(\omega)$ dell'equazione di dispersione si fondono. Inoltre si considerano soltanto i casi di fusione, in cui le due radici convergono da parti opposte del contorno k ; in altre parole, per $\omega'' \rightarrow \infty$ queste radici devono giacere da parti opposte dell'asse reale. Notiamo in proposito che i valori ω_c sono definiti unicamente dalle proprietà della funzione $1/\Delta(\omega, k)$, e perciò è evidente la loro indipendenza da x .

In seguito a fusione di due radici semplici dell'equazione compare una radice multipla (del secondo ordine). In prossimità di questa radice l'equazione di dispersione ha la forma

$$\Delta(\omega, k) \approx (\omega - \omega_c) \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right)_c + \frac{1}{2} (k - k_c)^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial k^2} \right)_c = 0, \quad (62,9)$$

¹⁾ Nel caso di un mezzo instabile il punto singolare deve comparire sull'asse reale k (almeno in una regione di valori ω') già per $\omega'' > 0$, poiché esistono evidentemente radici dell'equazione $\Delta(\omega, k) = 0$ tali che la parte immaginaria $\omega'' > 0$, per k reale.

in modo che $k - k_c \sim \pm(\omega - \omega_c)^{1/2}$ ¹⁾. Notiamo che nel punto $\omega = \omega_c$ la funzione $\omega(k)$ soddisfa la condizione

$$\frac{d\omega}{dk} = 0, \quad (62,10)$$

vale a dire che ω_c è un punto di sella della funzione analitica $\omega(k)$.

L'integrale (62,8) calcolato nell'intorno del punto $k = k_c$, a meno di un fattore costante, ha la forma

$$\varphi(\omega, x) \sim \frac{e^{ik_c x}}{\sqrt{\omega - \omega_c}}; \quad (62,11)$$

per $\omega = \omega_c$ la funzione $\varphi(\omega, x)$ ha un polo da radice. Quanto all'integrale (62,2) calcolato ora nell'intorno del punto $\omega = \omega_c$ come funzione di t e x , esso ha la forma

$$\psi(t, x) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i(\omega_c t - k_c x)} \quad (62,12)$$

(poiché questa espressione asintotica è ottenuta per $t \rightarrow \infty$ e x fissato, essa è valida soltanto per $|k_c x| \ll |\omega_c t|$).

Sebbene la fusione delle radici dell'equazione di dispersione sia la fonte fondamentale di comparsa delle singolarità per la funzione $\varphi(\omega, x)$ (di solito essa determina il carattere dell'instabilità), ricordiamo un altro tipo di singolarità che compare alla frequenza, alla quale la radice dell'equazione di dispersione $|k| \rightarrow \infty$ ²⁾. La parte immaginaria di questa frequenza ω_c è difatti sempre negativa e perciò non può condurre a priori all'instabilità assoluta (la positività di ω_c in questo caso significherebbe l'instabilità del sistema rispetto alle oscillazioni con lunghezza d'onda infinitamente piccola). Tratteremo questo caso più avanti (si veda la (63,10)).

Come è stato già sottolineato, l'instabilità convettiva in un sistema di riferimento (quello del laboratorio) può diventare assoluta in un altro sistema. Proponiamoci di trovare la velocità V del sistema di riferimento, in cui l'instabilità sia assoluta con incremento massimo.

Il passaggio dal sistema di laboratorio al sistema di riferimento, che si muove con velocità V , si realizza con la sostituzione $\omega \rightarrow$

¹⁾ In alcuni casi può aver luogo la fusione di un numero più grande di radici, con la comparsa di una radice di ordine superiore. Questi casi, in generale, possono però corrispondere soltanto a valori speciali dei parametri del sistema in quanto impongono restrizioni supplementari ai punti ω_c, k_c : nello sviluppo di $\Delta(\omega, k)$ si devono annullare anche altri coefficienti (oltre a $(\partial \Delta / \partial k)_c$).

²⁾ Questa radice conduce a un punto sostanzialmente singolare della funzione $\varphi(\omega, x)$. Così, se $|k|$ tende all'infinito secondo la legge $k^{-n} = C(\omega - \omega_c)$, il contributo all'integrale (62,8) proveniente dall'intorno della singolarità vale

$$\varphi(\omega, x) \sim \exp \left\{ \frac{ix}{[C(\omega - \omega_c)]^{1/n}} \right\}.$$

→ $\omega - kV$ in tutte le formule. Come abbiamo visto sopra, il valore ω_c corrisponde al caso in cui al diminuire di ω'' sul contorno ω si fondono due poli della funzione $1/\Delta(\omega, k)$ nel piano k ; inoltre, questi poli devono raggiungere il punto di fusione partendo da parti opposte dell'asse reale, e perciò uno di essi deve intersecare preliminarmente questo asse. Indichiamo con ω''_{\max} il valore massimo (indipendente da V) di ω'' per k reali. Poiché $\omega''_c(k, V)$ è minore a priori di quel valore di ω'' per cui il polo ha intersecato l'asse reale, abbiamo quindi $\omega''_c(k, V) \leq \omega''_{\max}$ per tutti i V . Ciò vuol dire che il più grande valore ω''_c si ottiene se la fusione dei poli avviene sull'asse reale nel punto di massimo di $\omega''(k)$. Sostituendo nella (62,10) $\omega(k)$ con $\omega(k) - kV$ e separando le parti immaginaria e reale dell'uguaglianza (per k reali), troviamo le due equazioni

$$\frac{d\omega''}{dk} = 0, \quad (62,13)$$

$$V = \frac{d\omega'}{dk}. \quad (62,14)$$

Quindi, l'incremento più grande dell'instabilità è definito dal valore massimo di $\omega''(k)$ come funzione di k reale. Quanto alla velocità del sistema di riferimento in cui si verifica questa instabilità, essa è definita dal valore corrispondente della derivata $d\omega'/dk$. È naturale considerare questo valore di V come definizione della velocità di gruppo del pacchetto d'onde in un mezzo convettivamente instabile.

§ 63. Amplificazione e impenetrabilità

Abbiamo considerato finora problemi di stabilità, in cui si sviluppava nel tempo una perturbazione data nello spazio all'istante iniziale. Lo sviluppo di Fourier di questa perturbazione contiene le componenti con valori reali dei vettori d'onda \mathbf{k} , mentre la loro dipendenza temporale è definita dalle frequenze $\omega(\mathbf{k})$, ossia dalle radici complesse dell'equazione di dispersione.

È possibile però un'altra impostazione del problema della stabilità: il problema in cui figura una perturbazione creata in una regione dello spazio secondo una legge temporale data. Lo sviluppo di Fourier di questa perturbazione contiene componenti con frequenze reali ω , la cui propagazione nello spazio è definita dai vettori d'onda $\mathbf{k}(\omega)$, che si ottengono risolvendo questa volta l'equazione di dispersione rispetto a k . Ciò premesso, risultano complessi i vettori, anziché le frequenze (come al paragrafo precedente, abbiamo a che fare con un problema unidimensionale e perciò scriviamo $k \equiv k_x$ al posto del vettore \mathbf{k}).

La complessità dei vettori d'onda può avere significati diversi. In alcuni casi essa può significare semplicemente che le onde corri-

spondenti non possono propagarsi nel mezzo considerato (*impenetrabilità*). In altri casi, invece, la complessità di k può significare *amplificazione* delle onde che si propagano da una sorgente da parte del mezzo. Sottolineiamo immediatamente che il segno di $\text{Im } k$ non può servire a priori come criterio di distinzione tra queste due possibilità: le onde possono propagarsi in ambedue le direzioni dell'asse x e il cambiamento della direzione di propagazione equivale al cambiamento del segno di k .

Fisicamente è evidente che soltanto un mezzo instabile può godere di proprietà amplificatrici. Quindi è chiaro, per esempio, che per le onde elettromagnetiche trasversali in un plasma, che ubbidiscono alla legge di dispersione $\omega^2 = \Omega_e^2 + c^2 k^2$ (si veda il problema 1 del § 32) per frequenze $\omega < \Omega_e$ (quando $k(\omega)$ è immaginario) ha luogo l'impenetrabilità; infatti, la funzione $\omega(k)$ definita da questa equazione è reale per tutti i k reali in modo che il sistema è stabile a priori.

Per un'impostazione esatta del problema, consideriamo una sorgente puntiforme rispetto alla coordinata x (detta anche *segnale*) che si inserisce all'istante $t = 0$, creando così una perturbazione monocromatica ψ (di frequenza ω_0), ossia la *risposta* del sistema al segnale. Quindi, l'intensità della sorgente è

$$\begin{aligned} g(t, x) &= 0 & \text{per } t < 0, \\ g(t, x) &= \text{costante} \cdot \delta(x) e^{-i\omega_0 t} & \text{per } t > 0. \end{aligned} \quad (63,1)$$

Qui non concretizziamo la natura fisica né della perturbazione ψ , né dell'intensità della sorgente g . Quel che più importa è che le componenti ωk della perturbazione siano definite rispetto alla sua sorgente con un'espressione della forma

$$\psi_{\omega k} = g_{\omega k} / \Delta(\omega, k). \quad (63,2)$$

Questa espressione si deduce da un'« equazione del moto » linearizzata disomogenea del sistema, in cui $g(t, x)$ funge da « secondo membro » (così come la (62,4) era la soluzione di un'equazione omogenea con la condizione iniziale data dalla funzione $g(0, x)$). Per la sorgente (63,1) abbiamo ¹⁾

$$g_{\omega k} = \frac{\text{costante}}{i(\omega - \omega_0)}. \quad (63,3)$$

La funzione $\psi(t, x)$ si trova in seguito con la formula d'inversione

$$\psi(t, x) = \text{costante} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \Phi(\omega, x) \frac{e^{-i\omega t}}{i(\omega - \omega_0)} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (63,4)$$

$$\Phi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikhx}}{\Delta(\omega, k)} dk. \quad (63,5)$$

¹⁾ Calcolando $g_{\omega k}$ bisogna ricordare che nella formula della trasformazione inversa si integra su un contorno in cui $\text{Im } \omega > 0$; perciò $e^{i\omega t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

Questa espressione garantisce automaticamente l'uguaglianza $\psi(t, x) = 0$ per $t < 0$, in accordo con l'ipotesi del problema: la perturbazione proviene soltanto dalla sorgente che si inserisce all'istante $t = 0$.

Ora il problema è di trovare l'espressione asintotica di $\psi(t, x)$ lontano dalla sorgente ($|x| \rightarrow \infty$) in regime stazionario, cioè dopo che è trascorso molto tempo dall'inserimento della sorgente ($t \rightarrow \infty$). Se in questo regime la perturbazione tende a zero per $x \rightarrow \pm\infty$, siamo in presenza di impenetrabilità. Se, invece, la perturbazione cresce almeno da un lato della sorgente, si ha amplificazione. È evidente che in ambedue questi casi si può parlare soltanto di un sistema convettivamente instabile (o stabile). Per instabilità assoluta la perturbazione cresce infinitamente con il tempo in tutti i punti dello spazio, in modo che è impossibile in generale ottenere un regime stazionario.

Passando alla ricerca dell'asintotica richiesta, notiamo prima di tutto che il passaggio asintotico $t \rightarrow \infty$ deve essere realizzato prima del passaggio $|x| \rightarrow \infty$: poiché la perturbazione in un tempo finito non può propagarsi all'infinito, il passaggio $|x| \rightarrow \infty$ per t finito annulla ψ .

Come al § 62, per ottenere l'espressione asintotica quando $t \rightarrow \infty$, spostiamo in basso il cammino d'integrazione rispetto a ω nella (63,4). Le proprietà analitiche della funzione $\Phi(\omega, x)$ sono le stesse della funzione $\varphi(\omega, x)$ al § 62. Poiché il sistema è supposto soltanto convettivamente instabile, allora $\Phi(\omega, x)$ non ha singolarità nel semipiano superiore di ω e il polo $\omega = \omega_0$ sull'asse reale sarà il punto singolare più alto dell'espressione integranda nella (63,4). Perciò l'asintotica per $t \rightarrow \infty$ è

$$\psi(t, x) \sim e^{-i\omega_0 t} \Phi(\omega_0, x). \quad (63,6)$$

Per trovare l'asintotica della funzione $\Phi(\omega_0, x)$ per $|x| \rightarrow \infty$, si deve ora spostare il cammino d'integrazione rispetto a k in alto (per $x > 0$) o in basso (per $x < 0$) finché esso non si attaccherà al polo dell'espressione integranda nella (63,5) (la radice dell'equazione $\Delta(\omega_0, k) = 0$).

Indichiamo con $k_+(\omega)$ e $k_-(\omega)$ i poli che per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ si trovano rispettivamente nei semipiani k superiore e inferiore. Al diminuire di $\text{Im } \omega$ i poli si spostano e, per $\omega = \omega_0$ reale, possono restare nel « proprio » semipiano o finire in un altro semipiano. Nel primo caso il cammino d'integrazione in $\Phi(\omega_0, x)$ resta sull'asse reale (come nella fig. 22, a), e nel secondo si deforma, come nella fig. 22, b, aggirando i poli $k_+(\omega_0)$ e $k_-(\omega_0)$ (i punti A e C) « fuggiti » nel semipiano estraneo. In ambedue i casi spostandosi in alto o in basso il contorno « si attacca » ai poli k_+ o k_- , rispettivamente. L'espressione asintotica della funzione $\psi(t, x)$ per $x \rightarrow +\infty$ è definita dal contributo proveniente dal più basso dei poli $k_+(\omega_0)$, e per

$x \rightarrow -\infty$ dal più alto dei poli $k_-(\omega_0)$; in altre parole, questo è il polo più vicino all'asse reale (se tutti i poli di una data categoria restano nel « proprio » semipiano) o il polo più lontano dall'asse reale tra quelli passati al semipiano « estraneo ». Con questi valori di k_+ e k_- avremo

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &\sim \exp \{ik_+(\omega_0)x - i\omega_0 t\} & \text{per } x > 0, \\ \psi(t, x) &\sim \exp \{ik_-(\omega_0)x - i\omega_0 t\} & \text{per } x < 0.\end{aligned}\quad (63,7)$$

Nel caso di un sistema stabile tutti i poli restano per $\omega = \omega_0$ nei « propri » semipiani; infatti, per l'assenza di rami delle oscillazioni con $\text{Im } \omega(k) > 0$ (per k reali), il polo $k(\omega)$ potrebbe intersecare l'asse reale soltanto per $\text{Im } \omega < 0$. Perciò nella (63,7) abbiamo

$$\text{Im } k_+(\omega_0) > 0, \quad \text{Im } k_-(\omega_0) < 0,$$

in modo che le onde si smorzano da entrambi i lati della sorgente.

Nel caso di instabilità convettiva i poli $k(\omega)$ compaiono sull'asse reale già per $\text{Im } \omega > 0$. Perciò esistono a priori poli k_+ o k_- finiti per $\omega = \omega_0$ nel semipiano « estraneo », per i quali, cioè, $\text{Im } k_+(\omega_0) < 0$ o $\text{Im } k_-(\omega_0) > 0$. La presenza di un tale polo $k_+(\omega_0)$ conduce all'amplificazione dell'onda a destra dalla sorgente e la presenza del polo $k_-(\omega_0)$ all'amplificazione a sinistra dalla sorgente.

Riassumendo le considerazioni esposte, possiamo formulare il seguente criterio di distinzione tra i casi di impenetrabilità e di amplificazione delle onde emesse da una sorgente di frequenza ω_0 in un sistema convettivamente instabile.

Un'onda con valore complesso $k(\omega_0)$, per ω_0 reale, viene amplificata se la funzione $\text{Im } k(\omega)$ cambia di segno al variare di $\text{Im } \omega$ da $+\infty$ a 0 (per $\text{Re } \omega = \omega_0$ dato); se invece $\text{Im } k(\omega)$ non cambia di segno si verifica il caso di impenetrabilità.

È da notare che l'origine di questo criterio è legata alle ipotesi di causalità. Infatti, per un inserimento della sorgente rapido a piacere, la perturbazione deve comunque smorzarsi per $x \rightarrow \pm\infty$, semplicemente perché in un tempo finito essa non può propagarsi a distanza infinita. D'altra parte, un inserimento « rapido a piacere » si può realizzare secondo la legge $e^{-i\omega t}$ con $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$. Perciò è chiaro che onde amplificabili (per ω reale) da questo o quel lato della sorgente devono smorzarsi dallo stesso lato per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$, da cui nasce il criterio suindicato.

I risultati ottenuti hanno anche un altro aspetto, permettendo di definire la direzione di propagazione dell'onda in un mezzo con assorbimento o amplificazione. In un mezzo trasparente (quando cioè ω e k sono reali) il problema della direzione fisica della propagazione si risolve mediante la direzione del vettore velocità di gruppo. In particolare, nel caso unidimensionale un'onda con valore positivo

della derivata $d\omega/dk$ si muove nella direzione positiva dell'asse x , e con valore negativo, nella direzione opposta. In un mezzo con assorbimento o amplificazione, invece, si può affermare che nella direzione positiva si propagano le onde del gruppo k_+ e nella direzione negativa quelle del gruppo k_- . Nel caso di ω e k reali questa formulazione generale coincide con quella precedente. Infatti, piccole variazioni di ω e k sono legate mutuamente dalla relazione

$$\delta k = \frac{\delta \omega}{d\omega/dk}.$$

Di qui si vede che se in ω compare la parte immaginaria $\text{Im } \omega > 0$, allora k si sposta nel semipiano superiore per $d\omega/dk > 0$ e nel semipiano inferiore nel caso contrario.

A titolo di un semplice esempio di applicazione dei criteri ottenuti in questo e nei paragrafi precedenti, consideriamo l'instabilità di un fascio freddo di elettroni in un plasma freddo, di cui si è parlato al § 61. L'equazione di dispersione di questo sistema è

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2} = 1 \quad (63,8)$$

(si veda la (61,6); per le onde che si propagano nella direzione del fascio $kV = kV$). Le radici $k(\omega)$ di questa equazione per $|\omega| \rightarrow \infty$ hanno la forma ¹⁾

$$k = (\omega \pm \Omega_e')/V. \quad (63,9)$$

Per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ entrambe le radici giacciono nello stesso semipiano (superiore), cioè le due radici sono della categoria $k_+(\omega)$. Di conseguenza, esse non possono, spostandosi (al diminuire di $\text{Im } \omega$), restringere il contorno k in modo che l'instabilità sia convettiva. L'andamento asintotico della perturbazione creata all'istante iniziale è definita dalla frequenza $\omega = \Omega_e$, nell'intorno della quale le radici dell'equazione (63,8) tendono all'infinito secondo la legge

$$k^2 = \frac{\Omega_e \Omega_e'^2}{2V^2(\omega - \Omega_e)}. \quad (63,10)$$

Quindi, per $t \rightarrow \infty$ della perturbazione restano solo le onde di plasma non smorzantisi.

Per valori reali di $\omega < \Omega_e$ l'equazione (63,8) ha due radici complesse coniugate $k(\omega)$. La radice in cui $\text{Im } k(\omega) < 0$ è finita nel semipiano inferiore da quello superiore. In tal modo, al propagarsi delle onde da una sorgente con frequenza $\omega_0 < \Omega_e$, avviene la loro amplificazione nella direzione $x > 0$, cioè « in basso lungo la corrente » del fascio.

¹⁾ E da notare che la (63,9) coincide con l'equazione di dispersione del fascio di per sé, come se il plasma immobile non esistesse per niente.

§ 64. *Instabilità per legame debole di due rami dello spettro delle oscillazioni*

Applichiamo il metodo generale sviluppato ai §§ 62, 63 allo studio dell'instabilità che compare grazie all'« interazione » tra oscillazioni con valori vicini di ω e k , appartenenti a due rami dello spettro delle oscillazioni di un sistema non dissipativo; con tale sistema si intende l'assenza sia di dissipazione vera e propria sia dello smorzamento di Landau.

Se i due rami, $\omega = \omega_1(k)$ e $\omega = \omega_2(k)$, fossero completamente indipendenti, ciò significherebbe che l'equazione di dispersione si divide in due fattori:

$$[\omega - \omega_1(k)] [\omega - \omega_2(k)] = 0. \quad (64,1)$$

Nell'intorno del punto di intersezione di questi rami le funzioni $\omega_1(k)$ e $\omega_2(k)$ avrebbero nel caso generale la forma

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &= \omega_0 + v_1(k - k_0), \\ \omega_2(k) &= \omega_0 + v_2(k - k_0), \end{aligned} \quad (64,2)$$

dove v_1, v_2 sono delle costanti e ω_0 e k_0 i valori (reali!) di ω e k nel punto d'intersezione.

Questo caso, tuttavia, in generale è irrealistico. Il legame tra i due rami potrebbe rigorosamente mancare, nel caso migliore, per certi valori specifici dei parametri del sistema, ma comparirebbe già per una loro piccola variazione¹⁾. Per riflettere la situazione reale, è necessario perciò tener conto dell'esistenza di un legame debole tra i rami. Esso si manifesta nella sostituzione dello zero a secondo membro dell'equazione (64,1) con un valore piccolo ε . Allora l'equazione di dispersione nell'intorno di questo punto assume la forma

$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)] [\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)] = \varepsilon. \quad (64,3)$$

La sua soluzione rispetto a ω è

$$\omega(k) - \omega_0 = \frac{1}{2} \{ (v_1 + v_2)(k - k_0) \pm [(k - k_0)^2 (v_1 - v_2)^2 + 4\varepsilon]^{1/2} \}, \quad (64,4)$$

e rispetto a k ,

$$\begin{aligned} k(\omega) - k_0 &= \\ &= \frac{1}{2v_1v_2} \{ (v_1 + v_2)(\omega - \omega_0) \pm [(\omega - \omega_0)^2 (v_1 - v_2)^2 + 4\varepsilon v_1v_2]^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (64,5)$$

¹⁾ Fanno eccezione i casi in cui non esiste interazione in virtù delle condizioni di simmetria, per esempio, se un ramo si riferisce alle onde longitudinali e l'altro a quelle trasversali in un mezzo isotropo. Poiché in un mezzo isotropo una corrente longitudinale non può indurre un campo trasversale e viceversa, queste onde non interagiscono reciprocamente. La situazione è analoga a quella che si verifica nella meccanica quantistica per intersezione di termini di diversa simmetria (si veda III, § 79).

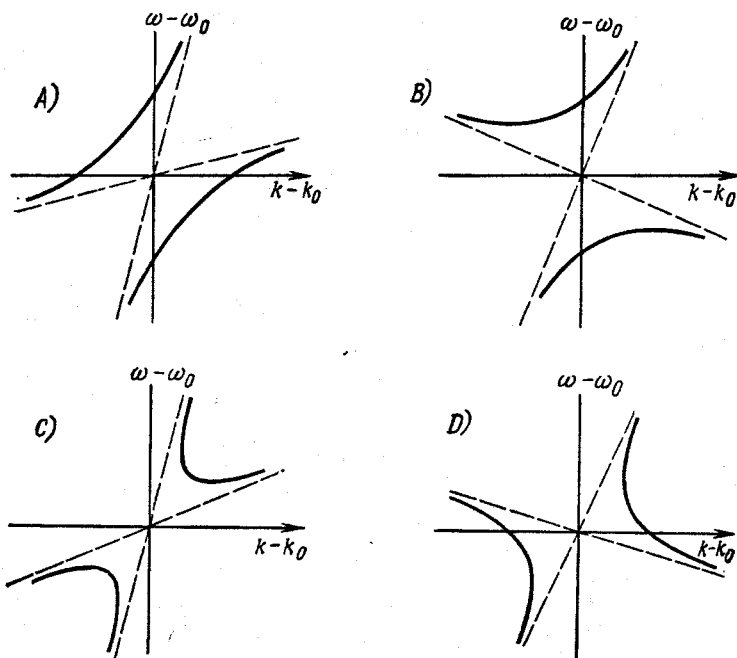


Fig. 23

L'esistenza del legame tra i rami sposta il punto della loro intersezione nella regione complessa. Le dipendenze di $\omega(k)$ per ω e k reali hanno carattere diverso a seconda del segno della costante ε e del segno relativo delle costanti v_1 e v_2 . Queste dipendenze sono rappresentate nella fig. 23 per i casi seguenti:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \varepsilon > 0, \quad v_1 v_2 > 0, \quad \text{B)} \quad \varepsilon > 0, \quad v_1 v_2 < 0, \\ \text{C)} \quad & \varepsilon < 0, \quad v_1 v_2 > 0, \quad \text{D)} \quad \varepsilon < 0, \quad v_1 v_2 < 0. \end{aligned} \quad (64,6)$$

Consideriamo uno dopo l'altro questi casi.

A) Qui le funzioni $\omega(k)$ sono reali per tutti i k (reali), in modo che il sistema è stabile. Le funzioni $k(\omega)$ sono anch'esse reali per tutti gli ω , in modo che le onde si propagano senza amplificazione per qualunque ω .

B) Le funzioni $\omega(k)$ sono reali per tutti i k , in modo che il sistema è stabile. Le funzioni $k(\omega)$, invece, sono complesse nella regione di frequenze

$$(\omega - \omega_0)^2 < \frac{4 |\varepsilon v_1 v_2|}{(v_1 - v_2)^2}. \quad (64,7)$$

Essendo il sistema stabile, in questa regione si ha impenetrabilità.

C) Per

$$(k - k_0)^2 < \frac{4|\varepsilon|}{(v_1 - v_2)^2} \quad (64,8)$$

le funzioni $\omega(k)$ sono complesse e, inoltre, per una di esse $\text{Im } \omega(k) > 0$, cioè si ha instabilità. Questa instabilità è convettiva; infatti, per $|\omega| \rightarrow \infty$, le radici $k(\omega)$ hanno la forma

$$k \approx \omega/v_1, \quad k \approx \omega/v_2 \quad (64,9)$$

e per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ tutte e due giacciono in un medesimo semipiano k . Sia $v_1, v_2 > 0$; allora il semipiano è quello superiore e le radici sono della categoria $k_+(\omega)$. Per ω reali, invece, le radici $k(\omega)$ nella regione (64,7) formano una coppia di grandezze complesse coniugate. La radice, per la quale $\text{Im } k(\omega) < 0$, è passata dal semipiano superiore a quello inferiore. Di conseguenza, nella banda di frequenze (64,7) si ha amplificazione delle onde che si propagano nella direzione $x > 0$.

Per questo caso è anche facile trovare la « velocità di gruppo » delle onde, definita dalla (62,14), ossia la velocità del sistema di riferimento in cui si ha instabilità assoluta con incremento massimo. Derivando l'equazione (64,3) rispetto a k e sostituendovi $d\omega/dk = V$ in accordo con le (62,13-14), abbiamo

$$\frac{V - v_1}{V - v_2} = - \frac{\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)}{\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)}. \quad (64,10)$$

Poiché il primo membro di questa uguaglianza è reale, deve essere reale (per ω complesso) anche il secondo membro. Da questa condizione ricaviamo $k = k_0$ e, in seguito, dalla (64,10) troviamo la velocità

$$V = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad (64,11)$$

e dalla (64,3) l'incremento massimo corrispondente

$$(\text{Im } \omega)_{\text{max}} = |\varepsilon|^{1/2}. \quad (64,12)$$

D) Le funzioni $k(\omega)$ sono reali per tutti gli ω (reali), ma le funzioni $\omega(k)$ sono complesse nella regione (64,8) in modo che il sistema è instabile. Per precisare il carattere di questa instabilità osserviamo che, in accordo con la (64,9) (per segni distinti di v_1 e v_2), le radici $k(\omega)$ per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ giacciono in semipiani diversi. Queste due radici hanno il punto di fusione nel semipiano superiore di ω per

$$\omega = \omega_c = \omega_0 + 2i \frac{\sqrt{v_1 v_2 \varepsilon}}{|v_1 - v_2|}. \quad (64,13)$$

Ciò vuol dire che l'instabilità è assoluta con incremento $\text{Im } \omega_c$. Per $v_1 = -v_2$, che corrisponde al quadro della perturbazione nel sistema di riferimento in moto con la velocità (64,11), l'incremento raggiunge il valore massimo (64,12).

P R O B L E M A

Precisare il carattere dell'instabilità delle onde elettromagnetiche trasversali « lente » ($\omega/k \ll c$) a bassa frequenza ($\omega \sim \omega_{Bi}$), che si propagano nella direzione di un campo magnetico costante in un plasma freddo magneticamente attivo; lungo la stessa direzione nel plasma si muove un fascio freddo di elettroni di piccola densità.

Soluzione. Per costruire l'equazione di dispersione, dapprima la scriviamo includendovi solo gli elettroni del fascio nel sistema di riferimento, in cui il fascio è a riposo. Secondo la (56,9) abbiamo in questo sistema

$$k^2 c^2 - \omega^2 = - \frac{\Omega_e'^2 \omega}{\omega \pm \omega_{Be}},$$

dove Ω_e' è la frequenza di plasma corrispondente alla densità del fascio. Tornando al sistema di laboratorio, in cui il fascio si muove con la velocità V (lungo la

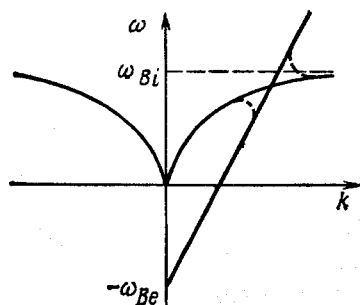


Fig. 24

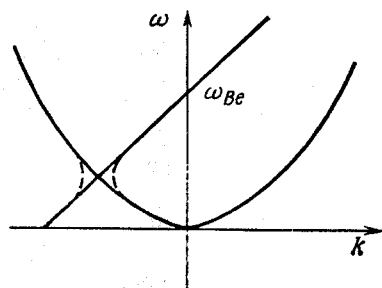


Fig. 25

quale è diretto l'asse x), bisogna sostituire $\omega \rightarrow \omega - kV$ a secondo membro dell'uguaglianza. Quanto alla differenza $k^2 c^2 - \omega^2$, essa è invariante rispetto al cambiamento del sistema di riferimento. Aggiungendo ora nel sistema di laboratorio i termini legati agli elettroni e agli ioni del plasma, otteniamo

$$k^2 c^2 - \omega^2 = - \frac{\Omega_e'^2 (\omega - kV)}{\omega - kV \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega \Omega_e^2}{\omega \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega \Omega_i^2}{\omega \mp \omega_{Bi}}.$$

Trascurando (in accordo con l'ipotesi del problema) ω rispetto a ck e a ω_{Be} e osservando anche che $\Omega_e^2/\omega_{Be} = \Omega_i^2/\omega_{Bi}$, riduciamo l'equazione di dispersione alla forma

$$\left[k^2 c^2 - \frac{\Omega_i^2 \omega^2}{\omega_{Bi} (\omega_{Bi} \mp \omega)} \right] (\omega - kV \pm \omega_{Be}) = - \Omega_e'^2 (\omega - kV). \quad (1)$$

Il primo fattore a primo membro corrisponde al ramo « fondamentale » dello spettro delle oscillazioni e il secondo al ramo del fascio; il secondo membro descrive l'« interazione » tra questi rami.

Per i segni superiori nella (1), le leggi di dispersione dei due rami indipendenti sono rappresentate dalle curve continue nella fig. 24 (come sempre, è sufficiente considerare solo i rami con $\omega > 0$). Nell'intorno del punto ω_0, k_0 della loro intersezione lo sviluppo dell'equazione (1) ha la forma

$$2k_0 c^2 \left[k - k_0 - \frac{\omega - \omega_0}{v_1} \right] [\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = \Omega_e'^2 \omega_{Be}$$

con il coefficiente positivo v_1 (come segue chiaramente dalla pendenza delle curve nella fig. 24). Il confronto con la (64,3) mostra che si verifica il caso C, ossia l'instabilità convettiva (nella fig. 24 il tratteggio rappresenta l'andamento dei rami dello spettro tenuto conto dell'interazione).

I grafici analoghi, per i segni inferiori nella (1), sono rappresentati nella fig. 25. Nell'intorno del punto d'intersezione l'equazione di dispersione ha la forma

$$2k_0 c^2 \left[k - k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_1} \right] [\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = -\Omega_e'^2 \omega_{Be},$$

dove di nuovo $v_1 > 0$. Ora si verifica il caso D, ossia l'instabilità assoluta (la seconda intersezione, che si ha in questo caso, si verifica, come si vede dalla figura, per $\omega \gtrless \omega_{Be}$, il che contraddice le ipotesi del problema).

§ 65. Instabilità di sistemi finiti

Tutta la teoria esposta ai §§ 61-63 si riferiva a mezzi omogenei e infinitamente estesi almeno in una direzione (l'asse x). La sua applicazione a sistemi reali limitati significa trascurare gli effetti dovuti alla riflessione delle onde da parte della frontiera; in altre parole, questa teoria è limitata a tempi dell'ordine di grandezza del tempo di propagazione della perturbazione lungo l'estensione del sistema.

Consideriamo ora il problema della stabilità nella situazione opposta, in cui è importante che il sistema sia finito e che lo spettro delle sue autooscillazioni sia definito dalle condizioni al contorno ai suoi estremi (ci limitiamo sempre al caso unidimensionale; indichiamo con L la lunghezza del sistema lungo l'asse x). Lo spettro di frequenze di un sistema finito è discreto e, se almeno una delle frequenze ha parte immaginaria positiva, il sistema è instabile. La distinzione tra i casi di instabilità assoluta e convettiva non ha senso.

In tal modo, il problema della stabilità di un sistema finito è equivalente a quello della ricerca dello spettro delle sue frequenze caratteristiche (complesse). L'equazione di dispersione che definisce queste frequenze può essere stabilita in forma generale per un sistema di dimensioni finite, ma sufficientemente grandi L : $\text{Im } |k| \cdot L \gg 1$ (A. G. Kulikovskij, 1966).

Sia $k(\omega)$ la soluzione dell'equazione di dispersione del mezzo illimitato; dividiamo di nuovo i rami di questa funzione polidroma nelle due categorie, $k_+(\omega)$ e $k_-(\omega)$, definite al § 63. Le autooscillazioni di un sistema finito si possono considerare come risultato della sovrapposizione delle onde che corrono, riflesse dalle sue due frontiere (in un mezzo senza assorbimento e amplificazione sarebbero le onde stazionarie ordinarie). In generale, la riflessione è accompagnata dalla mutua trasformazione delle onde che appartengono a rami distinti dello spettro. Perciò un'onda di frequenza data è una sovrapposizione di tutti i rami. Ma lontano dalle frontiere il contributo fondamentale a ogni onda proviene unicamente da uno dei termini

della sovrapposizione. Così, per un'onda che si propaga dalla frontiera sinistra, $x = 0$ (fig. 26), nella direzione positiva dell'asse x l'espressione asintotica, lontano da questa frontiera, si scrive

$$\psi = a \exp \{i [k_+ (\omega) x - \omega t]\}, \quad (65,1)$$

dove come $k_+ (\omega)$ va preso il ramo di questa categoria per il quale $\text{Im } k_+ (\omega)$ ha (per ω reale dato) il valore algebricamente più piccolo ¹⁾.

Dopo riflessione da parte della frontiera destra ($x = L$) l'onda si propaga a sinistra e, a distanze sufficientemente grandi da questa frontiera, ha la forma asintotica

$$\psi = R_2 a \exp \{i k_+ (\omega) L\} \exp \{i [k_- (\omega) \times \\ \times (x - L) - \omega t]\}, \quad (65,2)$$

dove $k_- (\omega)$ è il ramo di questa categoria per il quale $\text{Im } k_- (\omega)$ ha il valore algebricamente più grande. Il coefficiente R_2 dipende dalla legge di trasformazione delle onde su una data frontiera concreta.

Infine, dopo la seconda riflessione, questa volta da parte della frontiera sinistra, si ottiene di nuovo un'onda che si propaga a destra:

$$\psi = R_1 R_2 a e^{i (k_+ - k_-) L} e^{i (k_+ x - \omega t)}. \quad (65,3)$$

Poiché $\psi(t, x)$ è una funzione monodroma, l'espressione (65,3) deve coincidere con la (65,1). Di qui ricaviamo l'uguaglianza

$$R_1 R_2 \exp \{i [k_+ (\omega) - k_- (\omega)] L\} = 1. \quad (65,4)$$

Essa definisce lo spettro delle frequenze ω di un sistema finito, cioè ne è l'equazione di dispersione.

Calcolando il modulo di entrambi i membri di questa equazione abbiamo

$$|R_1 R_2| \exp \{-\text{Im} (k_+ - k_-) L\} = 1. \quad (65,5)$$

Per $L \rightarrow \infty$ il fattore esponenziale tende a 0 o a ∞ (a seconda del segno della differenza $\text{Im} (k_+ - k_-)$). Perciò per sistemi sufficientemente lunghi l'uguaglianza (65,5) è possibile solo se

$$\text{Im} [k_+ (\omega) - k_- (\omega)] = 0. \quad (65,6)$$

Quindi, in questo caso l'equazione di dispersione si riduce a una forma che dipende unicamente dalle proprietà del mezzo di per sé

¹⁾ Cioè il valore più piccolo positivo se tutti gli $\text{Im } k_+ (\omega) > 0$, o il valore negativo più grande in modulo se esistono rami per i quali $\text{Im } k_+ (\omega) < 0$. Nel primo caso la (65,1) è l'onda che si smorza (con la distanza x) meno rapidamente, e nel secondo caso l'onda che si amplifica più rapidamente.

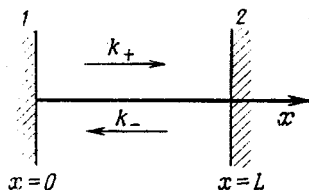


Fig. 26

e non dipende dal carattere concreto delle condizioni sulle due frontiere. L'equazione (65,6) definisce una curva nel piano ω ; su questa curva giacciono le frequenze caratteristiche discrete, molto vicine l'una all'altra (per grandi L). Se questa curva appartiene almeno in parte al semipiano superiore, il sistema è instabile. Siccome questa instabilità è condizionata dalle proprietà del sistema nel suo insieme, essa si chiama *globale*.

Facciamo ancora qualche osservazione sul legame che esiste tra l'instabilità globale di un sistema finito e l'instabilità del mezzo infinito. È facile vedere, prima di tutto, che in presenza dell'instabilità globale il sistema infinito è instabile a priori: esistono valori reali k tali che $\text{Im } \omega(k) > 0$. Infatti, per definizione delle funzioni $k_+(\omega)$ e $k_-(\omega)$, i valori per $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ giacciono in semipiani distinti di k . La condizione (65,6), invece, significa che al diminuire di $\text{Im } \omega$ i punti $k_+(\omega)$ e $k_-(\omega)$ possono finire in un medesimo semipiano, inoltre (nel caso dell'instabilità globale), ciò si verifica già per $\text{Im } \omega > 0$. Quindi, ancora prima (cioè per $\text{Im } \omega > 0$) almeno uno di questi punti interseca l'asse reale, come volevasi dimostrare.

L'inverso è valido, tuttavia, soltanto per l'instabilità assoluta (ma non convettiva) del mezzo infinito: la presenza dell'instabilità assoluta è sufficiente perché esista anche l'instabilità globale del sistema finito. Infatti, la condizione di instabilità assoluta consiste nell'esistenza di un punto di ramificazione della funzione $k(\omega)$ per $\text{Im } \omega > 0$, quando i rami che si fondono appartengono alle categorie k_+ e k_- ; in questo punto viene soddisfatta a priori anche la condizione (65,6).

Quanto a un mezzo convettivamente instabile, in presenza di frontiere esso può essere sia instabile che stabile.

DIELETTRICI

§ 66. Interazione tra fononi

La natura fisica dei fenomeni cinetici nei gas (conducibilità termica, conduttività elettrica) consiste nei processi di trasporto realizzati dal moto termico delle particelle del gas; nei fenomeni cinetici che si verificano nei solidi sono le quasi-particelle a svolgere il ruolo delle particelle. Passando allo studio di questi fenomeni, cominceremo dalla conducibilità termica dei dielettrici non magnetici. Il quadro relativamente semplice di questo fenomeno, rispetto ai processi cinetici in altri tipi di solidi, è dovuto al fatto che vi figurano quasi-particelle di una sola specie, ossia *fononi*.

Ricordiamo (si veda V, § 72) che la rappresentazione dei fononi liberi compare in seguito alla quantizzazione del moto oscillatorio degli atomi nel reticolo cristallino nell'approssimazione armonica, cioè tenendo conto solo dei termini quadratici (rispetto agli spostamenti degli atomi) nell'operatore di Hamilton. Quanto ai diversi processi di interazione tra fononi, essi compaiono se si includono i termini infinitesimi di ordine successivo, ovvero termini non armonici del terzo ordine e di ordine superiore rispetto agli spostamenti ¹⁾.

I primi termini non armonici, cioè quelli cubici, nell'energia classica del reticolo hanno la forma

$$H^{(3)} = \frac{1}{6} \sum_{(ns)} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{s_1s_2s_3} (n_1 - n_3, \quad n_2 - n_3) U_{s_1\alpha}(n_1) U_{s_2\beta}(n_2) U_{s_3\gamma}(n_3). \quad (66,1)$$

Qui $U_s(n)$ sono i vettori spostamento degli atomi nel reticolo; α, β, γ gli indici vettoriali che assumono i valori x, y, z ; s_1, s_2, s_3 i numeri atomici nella cella elementare; n_1, n_2, n_3 « vettori » numerici interi che definiscono la posizione della cella nel reticolo; il simbolo (ns) sotto il segno di somma significa che la sommatoria è estesa a tutti gli n e a tutti gli s ; per l'omogeneità del cristallo, le funzioni Λ dipendono unicamente dalle distanze reciproche $n_1 - n_3$ e $n_2 - n_3$ tra le celle e non dalle loro posizioni assolute nel reticolo.

L'operatore di Hamilton della seconda quantizzazione si ottiene grazie alla sostituzione nella (66,1) dei vettori spostamento con gli

¹⁾ La necessità di tener conto della non armonicità delle oscillazioni degli atomi nel reticolo per lo studio della conducibilità termica dei cristalli è stata indicata originariamente da P. Debye (1914) e da M. Born (1914).

operatori $\hat{U}_s(\mathbf{n})$, espressi in funzione degli operatori di creazione $\hat{c}_{\mathbf{k}g}^+$ e di annichilazione $\hat{c}_{\mathbf{k}g}$ dei fononi della specie g (cioè del ramo dello spettro fononico) con quasi-quantità di moto \mathbf{k} , mediante la formula

$$\hat{U}_s(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{gk}} [2M\mathcal{N}\omega_g(\mathbf{k})]^{-1/2} \{ \hat{c}_{\mathbf{k}g} e_s^{(g)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}} + \hat{c}_{\mathbf{k}g}^* e_s^{(g)*}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}} \}, \quad (66,2)$$

dove \mathcal{N} è il numero di celle nel reticolo, M la massa atomica totale nella cella, $e_s^{(g)}(\mathbf{k})$ i vettori polarizzazione dei fononi, $\omega_g(\mathbf{k})$ l'energia di un fonone della specie g ¹⁾. Con la sostituzione compaiono termini contenenti gli operatori \hat{c} e \hat{c}^+ nelle diverse combinazioni triple. Questi termini descrivono i processi cui partecipano tre fononi. I prodotti della forma $\hat{c}^+\hat{c}^+\hat{c}$ sono la disintegrazione di un fonone in due e i prodotti della forma $\hat{c}^+\hat{c}\hat{c}$ sono la fusione di due fononi collidenti in uno solo (i termini $\hat{c}\hat{c}\hat{c}$ e $\hat{c}^+\hat{c}^+\hat{c}^+$ corrispondono a processi interdetti dalla legge di conservazione dell'energia).

Scriviamo, ad esempio, i termini corrispondenti alla disintegrazione del fonone $(\mathbf{k}_1 g_1)$ in due fononi: $(\mathbf{k}_2 g_2)$ e $(\mathbf{k}_3 g_3)$. Passando nella (66,1) dalla sommatoria su $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ alla sommatoria su $\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_3, \mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_3$, scriviamo questi termini nella forma

$$\hat{H}_{\text{disintegr}}^{(3)} = \Omega \frac{\hat{c}_1 \hat{c}_2^+ \hat{c}_3^+}{\mathcal{N}^{3/2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{n}_3} \exp \{ i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \mathbf{r}_{\mathbf{n}_3} \}, \quad (66,3)$$

dove

$$\Omega = (2M)^{-3/2} \sum_{\langle \mathbf{v}_3 \rangle} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) e_{1\alpha} e_{2\beta}^* e_{3\gamma}^* \exp \{ i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_{\mathbf{v}_1} - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_{\mathbf{v}_2}) \}, \quad (66,4)$$

$$\hat{c}_1 \equiv \hat{c}_{\mathbf{k}_1 g_1}, \quad \omega_1 = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1), \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{s_1}^{(g_1)}(\mathbf{k}_1), \quad \dots$$

Nella (66,3) figura un fattore esponenziale dipendente dalla posizione assoluta \mathbf{n}_3 della cella nel reticolo. La sommatoria di questo fattore su tutti gli \mathbf{n}_3 dà \mathcal{N} se $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ coincide con qualche periodo del reticolo inverso \mathbf{b} , o zero in caso contrario. Perciò

$$\hat{H}_{\text{disintegr}}^{(3)} = \Omega \frac{\hat{c}_1 \hat{c}_2^+ \hat{c}_3^+}{\mathcal{N}^{1/2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/2}}, \quad (66,5)$$

inoltre, le quasi-quantità di moto dei fononi soddisfano la legge di conservazione

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{b}. \quad (66,6)$$

¹⁾ In questo capitolo usiamo il sistema di unità in cui $\hbar = 1$. In questo sistema le dimensioni della quantità di moto e del vettore d'onda coincidono, così come le dimensioni dell'energia e della frequenza.

La condizione (66,6) si deve considerare come un'equazione che definisce il valore, diciamo, di k_3 rispetto ai valori dati k_1 e k_2 . Inoltre bisogna prendere i valori k_1 e k_2 all'interno di una sola cella elementare del reticolo inverso (contenente tutti i valori fisicamente diversi della quasi-quantità di moto) e osservare che k_3 appartenga anch'esso a questa cella. L'ultima condizione definisce il valore necessario b nella (66,6), in modo univoco. Infatti, se per k_1 , k_2 , b assegnati il vettore k_3 si trova nella cella elementare, qualsiasi variazione di b farebbe uscire a priori k_3 da questa cella. I processi (la disintegrazione del fonone nel caso in esame), per i quali la legge di conservazione della quasi-quantità di moto contiene un vettore b non nullo, si chiamano processi *umklapp* ¹⁾, a differenza dei processi *normali* con $b = 0$. Bisogna dire che la distinzione tra queste due categorie di processi è, in un certo senso, convenzionale: ogni processo concreto può essere normale o umklapp a seconda della cella fondamentale considerata. È fondamentale, tuttavia, che con nessuna scelta sia possibile annullare contemporaneamente b per tutti i processi possibili. È opportuno scegliere la cella fondamentale del reticolo inverso in modo tale che il punto $k = 0$ (lunghezza d'onda infinita) si trovi al suo centro; ciò verrà supposto ovunque più avanti. Con questa scelta a tutti i fononi a bassa frequenza corrispondono valori piccoli della quasi-quantità di moto ($k \ll 1/d$, d è la costante del reticolo) e tutti i processi, cui partecipano solo i fononi a bassa frequenza, sono normali ²⁾. I grandi valori della quasi-quantità di moto ($k \sim 1/d$) corrisponderanno ai fononi ad onde corte, con grande energia (dell'ordine di grandezza della temperatura di Debye Θ).

Torniamo al processo di disintegrazione del fonone. Secondo le regole generali della meccanica quantistica (si veda III, (43,1)) la probabilità di una disintegrazione, per cui la quasi-quantità di moto di uno dei due nuovi fononi apparsi giace nell'intervallo d^3k_2 , è data dal quadrato dell'elemento corrispondente di matrice dell'operatore di perturbazione (66,5), in base alla formula

$$dW = 2\pi |\langle N_1 - 1, N_2 + 1, N_3 + 1 | H^{(3)} | N_1, N_2, N_3 \rangle|^2 \times \\ \times \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{\sqrt{2} d^3k_2}{(2\pi)^3}, \quad (66,7)$$

dove $N_1 \equiv N_{k_{1g1}}$, N_2 , N_3 sono i numeri di riempimento dei fononi nello stato iniziale del cristallo. Gli elementi di matrice degli operatori fononici di creazione e di annichilazione sono dati dalle formule

$$\langle N - 1 | \hat{c} | N \rangle = \langle N | \hat{c}^+ | N - 1 \rangle = \sqrt{N}. \quad (66,8)$$

¹⁾ Secondo la terminologia tedesca.

²⁾ Se, ad esempio, consideriamo una cella fondamentale tale che il punto $k = 0$ appartenga a uno dei suoi vertici, alle piccole frequenze corrisponderanno anche gli intorni degli altri vertici, in prossimità dei quali k non è più piccolo.

Come risultato otteniamo la probabilità di disintegrazione nella forma

$$dW = w N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}, \quad (66,9)$$

dove

$$w = w(g_2 \mathbf{k}_2, g_3 \mathbf{k}_3; g_1 \mathbf{k}_1) = \frac{2\pi v}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} |\Omega|^2 \quad (66,10)$$

($v = \mathcal{V}/\mathcal{N}$ è il volume della cella del reticolo cristallino). In tal modo la probabilità dei processi è proporzionale al numero N_1 di fononi iniziali nello stato iniziale del cristallo e anche ai numeri di fononi finali ($N_2 + 1$ e $N_3 + 1$) nello stato finale del cristallo. L'ultima proprietà è legata alla statistica di Bose, cui ubbidiscono i fononi e, in generale, è caratteristica per tutti i processi cui partecipano dei bosoni¹⁾.

Il processo inverso della disintegrazione è la « fusione » di due fononi \mathbf{k}_2 e \mathbf{k}_3 in un fonone \mathbf{k}_1 . È facile stabilire che i termini responsabili di questo processo nell'operatore di Hamilton differiscono dalla (66,5) per la sostituzione del prodotto di operatori c al numeratore con $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2 \hat{c}_3$ e per la sostituzione di Ω con Ω^* . Perciò la probabilità di questo processo è data da una formula che differisce dalla (66,9) solo per i fattori N :

$$dW = w N_2 N_3 (N_1 + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}. \quad (66,11)$$

Le funzioni w , invece, sono identiche qui e nella (66,9). L'ultima circostanza corrisponde alla regola generale: nell'approssimazione di Born (la prima approssimazione della teoria delle perturbazioni) le probabilità degli atti di diffusione elementari diretto e inverso sono uguali (si veda III, § 126).

Tra i vari rami dello spettro fononico ne esistono sempre tre *acustici*, nei quali l'energia tende a zero per $\mathbf{k} \rightarrow 0$; per i fononi acustici a onda lunga (\mathbf{k} piccoli) la dipendenza $\omega(\mathbf{k})$ è lineare. Per lo studio ulteriore sarà fondamentale il comportamento della funzione w (66,10) per questi fononi.

Si può precisare tale comportamento osservando la proprietà dei coefficienti Λ nell'operatore di Hamilton (66,1), che esprime il fatto che un semplice spostamento del cristallo come un tutt'uno non ne cambia l'energia, a prescindere dalla sua eventuale deformazione. Ciò vuol dire che l'energia $H^{(3)}$ non deve cambiare se sostituiamo in essa uno qualsiasi dei fattori $U_s(\mathbf{n})$ con $U_s + \mathbf{a}$, il vettore

¹⁾ La funzione di distribuzione dei fononi $N_{\mathbf{k}}$ (o $N(\mathbf{k})$) sarà definita come numeri di riempimento degli stati quantistici, con diversi valori della quasi-quantità di moto \mathbf{k} . Il numero di stati per un elemento $d^3 k$ dello spazio \mathbf{k} è $d^3 k / (2\pi)^3$, in modo che la distribuzione, riferita a $d^3 k$, vale $N_{\mathbf{k}} / (2\pi)^3$.

a indipendente da n , s . A tal fine è necessario che si abbia

$$\sum_{n_1 s_1} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{s_1 s_2 s_3} (n_1, n_2, n_3) = 0, \quad (66,12)$$

dove la sommatoria è estesa almeno a una coppia di variabili $n_1 s_1$.

Dei tre fononi che partecipano al processo possono essere acustici a onda lunga uno solo o tutti e tre (con due di tali fononi e il terzo a onda corta non si possono verificare le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia). Per un fonone acustico nel limite $k \rightarrow 0$ i vettori polarizzazione $e_s(k)$ tendono a una costante indipendente da s , in quanto tutti gli atomi nella cella oscillano insieme; i fattori $\exp(ikr_n)$, invece, tendono a 1. In virtù della proprietà (66,12) la grandezza Ω (66,4), di conseguenza, tende a zero e per k piccoli è proporzionale a k o (il che è lo stesso per un fonone acustico) a ω . Come risultato troviamo che

$$w \propto k_1 \quad (66,13)$$

se uno dei fononi è a onda lunga, ossia

$$w \propto k_1 k_2 k_3 \quad (66,14)$$

se tutti e tre i fononi sono a onda lunga.

Al risultato (66,13-14) si può arrivare anche in modo intuitivo, ricordando che i fononi acustici a onda lunga corrispondono alle onde acustiche macroscopiche, che si possono studiare con la teoria macroscopica dell'elasticità. In questa teoria l'energia di un cristallo deformato si esprime in funzione del tensore di deformazione

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad (66,15)$$

dove $U(r)$ è il vettore spostamento macroscopico dei punti del mezzo elastico. Sono le componenti di questo tensore a rappresentare le piccole grandezze rispetto alle quali si sviluppa l'energia elastica. Per la seconda quantizzazione il vettore U va sostituito con l'operatore \hat{U} analogo a quello (66,2). La derivazione di \hat{U} rispetto alle coordinate per la costruzione degli operatori $\hat{U}_{\alpha\beta}$ dà il fattore supplementare k che conduce alle leggi (66,13-14).

§ 67. Equazione cinetica per i fononi in un dielettrico

In un cristallo solido i fononi formano un gas rarefatto e, quindi, l'equazione cinetica per essi si costruisce così come per un gas ordinario.

Sia $N \equiv N_g(t, r, k)$ la funzione di distribuzione dei fononi della g -esima specie. Le equazioni cinetiche (per ogni specie) fonono-

nica) si scrivono nella forma

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} = \text{St } N, \quad (67,1)$$

dove $\mathbf{u} = \partial \omega / \partial \mathbf{k}$ è la velocità dei fononi.

La situazione, tuttavia, differisce sostanzialmente da quella nei gas ordinari, per il fatto che gli urti nel gas fononico non conservano, in generale, né il numero di fononi (in quanto si verificano processi umklapp), né la loro quasi-quantità di moto totale. L'unica legge di conservazione resta la legge di conservazione dell'energia, che è espressa dalla relazione

$$\sum_g \int \omega \text{St } N \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = 0. \quad (67,2)$$

Moltiplicando l'equazione (67,1) per ω , integrando rispetto a $d^3 k$ e sommando su g , otteniamo la legge di conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad (67,3)$$

dove la densità dell'energia termica E del cristallo e la densità del suo flusso \mathbf{q} sono definite dalle espressioni naturali

$$E = \sum_g \int \omega N \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{q} = \sum_g \int \omega \mathbf{u} N \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (67,4)$$

L'integrale degli urti nella (67,1) deve, in teoria, tener conto di tutti i processi che si possono verificare in seguito all'interazione dei fononi della specie g con tutti gli altri fononi. In realtà, tuttavia, il contributo principale all'integrale proviene dai processi a tre fononi studiati al paragrafo precedente. I processi cui partecipa un numero di fononi più grande sono dovuti ai termini successivi dello sviluppo dell'operatore di Hamilton in potenze degli spostamenti degli atomi; questi termini decrescono rapidamente all'aumentare dell'ordine. La causa della diminuzione risiede nel fatto che è piccolo il rapporto tra l'ampiezza delle oscillazioni ξ e la costante del reticolo d ; nei cristalli solidi esso resta piccolo per tutte le temperature fino a quella di fusione ¹⁾. Per una stima grossolana si può partire dalla relazione classica $M\omega^2 \xi^2 \sim T$; stimando il valore caratteristico della frequenza come $\omega \sim u/d$ ²⁾, troviamo

$$(\xi/d)^2 \sim T/Mu^2 \ll 1. \quad (67,5)$$

¹⁾ Fa eccezione il « cristallo quantistico », cioè l'elio solido.

²⁾ Nelle stime intenderemo con u la velocità del suono benché, ovviamente, questa identificazione possa avere significato letterale soltanto per i fononi acustici a onda lunga.

Come sempre, l'integrale degli urti è la differenza tra il numero di processi (nell'unità di tempo), che implicano la comparsa di fononi in un dato stato ($g\mathbf{k}$), e il numero di processi che fanno uscire fononi da questo stato. Tenendo conto solo dei processi a tre fononi abbiamo

$$\begin{aligned} \text{St } N = & \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2} w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \times \right. \\ & \times [(N+1) N_1 N_2 - N(N_1+1)(N_2+1)] + \\ & + \sum_{g_1 g_2} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2) \delta(\omega_3 - \omega - \omega_1) \times \\ & \left. \times [(N+1)(N_1+1) N_3 - N N_1 (N_3+1)] \right\} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}, \quad (67,6) \end{aligned}$$

dove $N_1 \equiv N_{g_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_1 = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1)$, ... Il primo termine tra parentesi graffe corrisponde ai processi diretto e inverso

$$(g\mathbf{k}) \rightleftharpoons (g_1 \mathbf{k}_1) + (g_2 \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{b}; \quad (67,7)$$

il fattore 1/2 in questo termine significa che, data l'identità dei fononi, si devono sommare solo su metà degli stati finali. Il secondo termine corrisponde ai processi

$$(g_3 \mathbf{k}_3) \rightleftharpoons (g\mathbf{k}) + (g_1 \mathbf{k}_1), \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{b}; \quad (67,8)$$

in questo termine non c'è bisogno del fattore 1/2 in quanto uno dei due fononi di disintegrazione è dato. Sottolineiamo che nell'espressione integranda della (67,6) i prodotti tripli $NN_1 N_2$ e $NN_1 N_3$ si eliminano.

L'integrale degli urti è annullato identicamente dalla distribuzione d'equilibrio dei fononi, ossia dalla distribuzione di Planck

$$N_0 = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}. \quad (67,9)$$

Per l'integrale (67,6) ciò si dimostra facilmente con una verifica diretta: il prodotto dei fattori dà

$$N_0 (N_{01} + 1) (N_{02} + 1) = (N_0 + 1) N_{01} N_{02} \exp \frac{\omega_1 + \omega_2 - \omega}{T}, \quad (67,10)$$

e in virtù della legge di conservazione dell'energia il fattore esponenziale a secondo membro si trasforma in 1.

Se non esistessero processi umklapp, si conserverebbe non solo l'energia totale ma anche la quasi-quantità di moto totale dei fononi. Allora sarebbe d'equilibrio non soltanto la distribuzione (67,9), ma anche le funzioni

$$N_0 = \left[\exp \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}{T} - 1 \right]^{-1}, \quad (67,11)$$

corrispondenti al moto traslatorio (*di deriva*) del gas fononico come un tutt'uno, con velocità arbitraria V rispetto al reticolo. Questa affermazione corrisponde ai principi generali della statistica. La sua validità si prova anche direttamente: con le funzioni (67,11) come N_0 a secondo membro dell'uguaglianza (67,10) comparirà ancora un fattore

$$\exp \frac{V(k - k_1 - k_2)}{T}$$

che si riduce all'unità per processi normali, quando $k = k_1 + k_2$.

Ma la distribuzione della forma (67,11) conduce, evidentemente, a un flusso di energia q non nullo. In tal modo, in assenza di processi umklapp, nel cristallo sarebbe possibile l'esistenza di un flusso di calore, pur con una temperatura costante lungo tutto il corpo; in altre parole, il cristallo avrebbe conducibilità termica infinita. Una conducibilità termica finita compare soltanto in seguito ai processi umklapp ¹⁾.

Per il calcolo della conducibilità termica si deve scrivere l'equazione cinetica per il cristallo con la temperatura lentamente variabile lungo il suo volume. Come al solito, cerchiamo la distribuzione fononica nella forma

$$N(r, k) = N_0(k) + \delta N(r, k), \quad (67,12)$$

dove δN è una piccola correzione alla funzione d'equilibrio. Allora l'equazione cinetica assume la forma

$$(u \nabla T) \frac{\partial N_0}{\partial T} = I(\delta N), \quad (67,13)$$

dove $I(\delta N)$ è l'integrale degli urti linearizzato.

Le funzioni δN devono soddisfare anche la condizione supplementare

$$\sum_g \int \omega \delta N \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = 0, \quad (67,14)$$

la quale significa che le funzioni di distribuzione perturbate devono condurre allo stesso valore per la densità dell'energia nel reticolo delle funzioni d'equilibrio. Come è stato detto al § 6, con questa condizione si stabilisce il senso della definizione di temperatura in un corpo non in equilibrio. Quanto alle altre condizioni imposte alle δN al § 6, esse mancano nel caso di gas fononico (a differenza del gas ordinario). Il numero di particelle in un gas fononico non è,

¹⁾ La teoria quantistica della conducibilità termica dei dielettrici, basata sull'equazione cinetica per i fononi, è stata costruita da R. Peierls (1929). È stato lui a indicare il ruolo dei processi umklapp per i fenomeni cinetici nei solidi.

in generale, una grandezza data, bensì viene stabilita dalla temperatura. La quantità di moto totale effettiva (non la quasi-quantità di moto!) dei fononi nel cristallo è automaticamente nulla; in caso contrario vi sarebbe una corrente del solido, il che è impossibile a priori per un reticolo cristallino perfetto (senza difetti). Ogni atomo del reticolo compie solo un moto finito, ossia un'oscillazione nell'intorno dei vertici del reticolo; la quantità di moto media di questo movimento è identicamente nulla. Quindi, il flusso di fononi (legato al flusso di energia) in un cristallo solido non è accompagnato da trasporto di massa¹⁾.

Scriviamo in forma esplicita l'integrale degli urti linearizzato (67,6). In questo caso è opportuno introdurre al posto delle δN le nuove funzioni incognite χ secondo la definizione

$$\delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} \chi = \frac{N_0 (N_0 + 1)}{T} \chi. \quad (67,15)$$

La linearizzazione si rende più semplice se osserviamo che

$$\delta \frac{N}{1+N} = \frac{N_0}{1+N_0} \frac{\chi}{T}. \quad (67,16)$$

Scriviamo l'espressione tra parentesi quadre (nel primo integrale della (67,6), ad esempio) nella forma

$$(N+1)(N_1+1)(N_2+1) \left[\frac{N_1}{N_1+1} \frac{N_2}{N_2+1} - \frac{N}{N+1} \right].$$

Nei fattori che precedono l'espressione tra parentesi si può porre direttamente $N = N_0$. La differenza tra parentesi quadre dà

$$\frac{1}{T} \frac{N_0}{N_0+1} (\chi_1 + \chi_2 - \chi),$$

dove si è tenuto conto dell'uguaglianza

$$\frac{N_{01}}{N_{01}+1} \frac{N_{02}}{N_{02}+1} = \frac{N_0}{1+N_0}.$$

In tal modo, l'integrale degli urti si riduce alla forma

$$\begin{aligned} \text{St } N \approx I(\chi) = & \frac{1}{T} \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2} w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) N_0 (N_{01}+1) (N_{02}+1) \times \right. \\ & \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) (\chi_1 + \chi_2 - \chi) + \sum_{g_1 g_3} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_3) N_0 N_{01} (N_{03}+1) \times \\ & \left. \times \delta(\omega + \omega_1 - \omega_3) (\chi_3 - \chi_1 - \chi) \right\} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}. \quad (67,17) \end{aligned}$$

¹⁾ A differenza di un fluido dove la quantità di moto del fonone è una quantità di moto propria e il flusso fononico è legato al trasporto di massa. Il moto degli atomi in un fluido è infinito: in un tempo sufficiente ogni atomo può raggiungere qualsiasi punto del volume.

Sottolineiamo che la funzione $\chi(k)$ entra nell'espressione integranda sotto forma di semplici somme dei suoi valori per diversi k (così come abbiamo visto nell'integrale degli urti classico nei gas (6,4-5)).

Alla soluzione dell'equazione (67,13) si può sempre aggiungere la soluzione dell'equazione omogenea

$$\chi = \text{costante} \cdot \omega \quad (67,18)$$

che annulla identicamente l'integrale (67,17), in virtù della conservazione dell'energia in seguito a urto. Come è stato detto al § 6, questa soluzione « parassita » corrisponde semplicemente alla variazione della temperatura di una piccola costante e si elimina con l'impostazione della condizione supplementare (67,14).

L'altra soluzione « parassita »

$$\chi = k\delta V \quad (67,19)$$

(δV è la costante), corrispondente a una piccola variazione della velocità del moto del gas fononico come un tutt'uno (cfr. la (6,6)), è eliminata già dall'esistenza di processi umklapp, che violano la conservazione della quasi-quantità di moto fononica totale.

§ 68. Conducibilità termica dei dielettrici.

Alte temperature

L'equazione (67,13) consente di determinare immediatamente la dipendenza dalla temperatura del coefficiente di conducibilità termica di un dielettrico per temperature grandi rispetto alla temperatura di Debye $\Theta \sim u/d$ ($\hbar u/d$ in unità ordinarie).

Il valore massimo dell'energia dei fononi su tutti i rami del loro spettro è dell'ordine di grandezza di Θ . Perciò per $T \gg \Theta$ le energie di tutti i fononi sono in generale $\omega \ll T$, inoltre, per la loro massa fondamentale $\omega \sim \Theta$. In questo caso la distribuzione d'equilibrio (67,9) si riduce a

$$N_0 \approx T/\omega \gg 1. \quad (68,1)$$

Nell'integrale degli urti (67,17) la temperatura è espressa nella forma del fattore T^2 ; la funzione w , considerata per le frequenze $\omega \sim \Theta$, non incide sulla dipendenza dell'integrale dalla temperatura. A primo membro dell'equazione (67,13) la derivata $\partial N_0/\partial T \approx 1/\omega$ non contiene la temperatura. Di qui concludiamo che

$$\chi \sim \frac{\nabla T}{T^2}, \quad \delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} \chi \sim \frac{\nabla T}{T},$$

e perciò il flusso termico è ¹⁾

$$q = \sum_g \int \omega u \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sim \frac{\nabla T}{T}.$$

Quindi, il coefficiente di conducibilità termica è inversamente proporzionale alla temperatura

$$\kappa \sim 1/T, \quad T \gg \Theta \quad (68,2)$$

(nella teoria classica questo risultato è stato ottenuto da *P. Debye*). In un cristallo anisotropo le direzioni q e ∇T non coincidono in generale, per cui il coefficiente di conducibilità termica non è uno scalare, bensì un tensore di secondo rango; parliamo della sua dipendenza dalla temperatura a prescindere da questa circostanza.

Stimiamo la lunghezza del cammino libero dei fononi nella regione di temperature considerata. In accordo con la relazione cinetica elementare dei gas (7,10) abbiamo $\kappa \sim C \bar{v} l$, dove C è il calore specifico (riferito all'unità di volume), \bar{v} la velocità media dei portatori di energia e l la lunghezza del loro cammino libero. Il calore specifico di un cristallo alle alte temperature è costante; è costante anche la velocità dei fononi, che si può stimare come la velocità del suono u . Allora vediamo che la lunghezza del cammino $l \sim 1/T$. La lunghezza l dovrebbe essere dell'ordine di grandezza della costante del reticolo d , a temperature così alte che l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi sia anch'essa $\sim d$. In accordo con la stima (67,5) questa temperatura $\sim Mu^2$ e troviamo così le seguenti stime per la lunghezza del cammino libero e la frequenza efficace degli urti $v \sim u/l$:

$$l \sim Mu^2 d/T, \quad v \sim T/Mud. \quad (68,3)$$

Di qui si vede che in effetti $l \gg d$ per tutte le temperature inferiori al punto di fusione.

Nelle considerazioni esposte abbiamo supposto infatti che il meccanismo a tre fononi della resistenza termica del reticolo cristallino in esame sia efficace per tutti i fononi. I flussi di energia portata da gruppi diversi di fononi sono additivi, in modo che i loro contributi al coefficiente di conducibilità termica sono anch'essi additivi. Se questo meccanismo fosse insufficiente almeno per un gruppo di fononi, sarebbe anche insufficiente, in generale, per garantire una con-

¹⁾ L'annullamento di q in equilibrio è evidente a priori e formalmente deriva dall'annullarsi dell'integrale in d^3k per essere dispari l'espressione integranda come funzione di k : la frequenza $\omega(k)$, e con essa $N_0(\omega)$, sono funzioni pari di k , e la velocità $u = \partial\omega/\partial k$ è una funzione dispari. Ricordiamo (si veda V, § 69) che la parità della funzione $\omega(k)$ è legata alla simmetria rispetto all'inversione del tempo e si verifica qualunque sia la simmetria del reticolo cristallino.

ducibilità termica finita. Ciò premesso, i fononi acustici a onda lunga richiedono un esame particolare.

Consideriamo anzitutto i processi cui partecipano solo i fononi acustici a onda lunga, con piccole quasi-quantità di moto di grandezza comparabile (indicheremo queste quasi-quantità di moto con le lettere f e gli indici corrispondenti). Valutiamo l'integrale degli urti (67,17) per tali processi nel senso della sua dipendenza da f . In questo caso, in accordo con la (66,14), la funzione $w \sim ff_1 f_2 \sim f^3$. I fattori $N_0 \sim T/\omega \sim 1/f$. Si integra nello spazio k sul volume $\sim f^3$, ma la funzione delta separa all'interno di questo volume soltanto una superficie di area $\sim f^2$. Troviamo così l'integrale degli urti

$$I(\chi) \sim f^2 \chi \sim f^4 \delta N$$

(nell'ultima espressione si tiene conto che secondo la definizione (67,15) $\delta N \sim \chi/f^2$). Questo risultato si può formulare in termini della frequenza efficace degli urti:

$$v(f) \sim f^4. \quad (68,4)$$

A primo membro dell'equazione cinetica (67,13), invece, il fattore u non dipende (per i fononi acustici) da f e $\partial N_0/\partial t \sim 1/f$. Perciò

$$\delta N \sim 1/fv.$$

Il contributo dei fononi a onda lunga al flusso di energia q è dato dall'integrale (67,4) calcolato sul volume $\sim f^3$. Ma questo integrale

$$\int \omega u \delta N \frac{d^3 f}{(2\pi)^3} \sim \int \frac{d^3 f}{v(f)} \quad (68,5)$$

diverge, per f piccoli, come $1/f$. Quindi, i processi a tre fononi, cui partecipano solo fononi acustici a onda lunga implicherebbero una conducibilità termica infinita; per garantire una resistenza termica finita è necessario che questi fononi urtino contro fononi a onda corta (I. Ja. Pomerančuk, 1941).

Supponiamo che un fonone a onda corta, con quasi-quantità di moto k , si disintegri in un fonone acustico a onda lunga f e in un fonone a onda corta $k - f - b$ appartenente allo stesso ramo dello spettro $\omega(k)$ del fonone k (per le considerazioni ulteriori è importante non tanto il valore assoluto k quanto il fatto che $k \gg f$). Poiché la funzione $\omega(k)$ è periodica nel reticolo inverso, allora $\omega(k - f - b) = \omega(k - f)$ e la legge di conservazione dell'energia dà

$$\omega(k) = \omega(k - f) + u(n)f. \quad (68,6)$$

Il secondo termine a secondo membro, ossia la frequenza del fonone acustico, è una funzione lineare di f ($u(n) = \omega(f)/f$ è la velocità di fase del suono dipendente dalla direzione $n = f/f$). Sviluppando $\omega(k - f)$ in potenze di f piccolo, riscriviamo l'uguaglianza nella

forma

$$\hbar \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \hbar \mathbf{u}(\mathbf{n}). \quad (68,7)$$

Questa uguaglianza può essere verificata soltanto se la velocità del fonone a onda corta supera la velocità del suono:

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right| < u(\mathbf{n}). \quad (68,8)$$

In questo senso è più « pericoloso » il ramo acustico con la più grande velocità del suono; parlando di fononi acustici alludiamo a questo ramo ¹⁾.

Altre possibilità per processi a tre fononi compaiono se nello spazio \mathbf{k} esistono punti di degenerazione, nei quali le energie di due

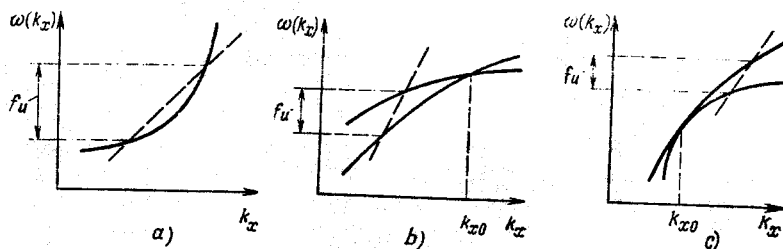


Fig. 27

o più rami dello spettro fononico coincidono (C. Herring, 1954); l'esistenza di questi punti (isolati o che riempiono una linea o un piano) in molti casi deriva necessariamente dalla simmetria del reticolo cristallino. Queste possibilità si possono illustrare con una costruzione grafica, che eseguiamo dapprima per il caso già considerato di emissione da parte di un fonone a onda corta « supersonico ».

Prendiamo la direzione x come asse x ; nella fig. 27, a la curva continua rappresenta la funzione $\omega(k_x)$ (essendo dati k_y e k_z) per i fononi a onda corta. Scrivendo la condizione (68,7) nella forma

$$v_x \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = u(\mathbf{n}),$$

vediamo che l'emissione di un fonone acustico è possibile se in un punto della curva la sua pendenza coincide con la velocità del suono. Allora nell'intorno di questo punto le frequenze $\omega(\mathbf{k})$ e $\omega(\mathbf{k} - \mathbf{f})$

¹⁾ In un solido isotropo un ramo dello spettro acustico corrisponde alle oscillazioni longitudinali e gli altri due a quelle trasversali; la velocità delle onde acustiche longitudinali è superiore a quelle delle onde trasversali. In un cristallo anisotropo la divisione in onde longitudinali e trasversali, in generale, non ha senso. Tuttavia, nella letteratura spesso si chiama convenzionalmente « longitudinale » il ramo con la più grande velocità del suono.

dei fononi a onda corta sono determinate dai punti d'intersezione della curva con la retta tratteggiata di pendenza $u(\mathbf{n}_x)$; la differenza tra le ordinate di questi punti fornisce la frequenza uf .

Se, invece, in un punto $k_x = k_{x_0}$ le curve di due rami $\omega(k_x)$ si intersecano, allora nell'intorno di questo punto è sempre possibile un processo a tre fononi, qualunque sia la pendenza delle curve $\omega(k_x)$ e a prescindere dal fatto che nel punto k_{x_0} si abbia semplice intersezione (fig. 27, b) o tangenza (fig. 27, c). Inoltre entrambi i fononi a onda corta appartengono a diversi rami dello spettro.

Stimiamo il numero efficace d'urti del fonone acustico a onda lunga in presenza di punti di degenerazione. Dobbiamo trattare i processi di assorbimento e di emissione di questo fonone, ossia i processi (67,8) (per disintegrazione del fonone, cioè nel caso dei processi (67,7), i due fononi che si formano saranno anch'essi a onda lunga e si tornerebbe così alla situazione precedente). Perciò dobbiamo stimare il secondo termine nella (67,17) supponendo che

$$\omega_1, \omega_3 \gg \omega \propto f \rightarrow 0.$$

Inoltre si tiene conto che $w \propto f$, $N_0 \propto 1/f$, e gli altri fattori sotto il segno d'integrale si possono sostituire con valori medi indipendenti da f , poiché si integra soltanto nell'intorno dei punti di degenerazione. Introducendo nuovamente $\delta N \propto \chi/f^2$, otteniamo una stima della dipendenza dell'integrale degli urti da f , nella forma $I(\chi) \sim v(f) \delta N$, dove

$$v(f) \propto f^2 \int \delta[\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k})] d^3k. \quad (68,9)$$

Questo integrale si può trasformare in un integrale di superficie nello spazio \mathbf{k} , definita dall'equazione

$$\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k}) = 0 \quad (68,10)$$

secondo la formula ¹⁾

$$\int \delta(F) d^3k = \oint \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} F|}, \quad (68,11)$$

dove l'integrale si calcola sulla superficie $F(\mathbf{k}) = 0$. Allora otteniamo

$$v(f) \propto f^2 \Delta S(f) \left\langle \left| \frac{\partial \omega_3(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial \omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f})}{\partial \mathbf{k}} \right|^{-1} \right\rangle, \quad (68,12)$$

dove $\Delta S(f)$ è l'area della superficie (68,10) e le parentesi angolari significano il calcolo della media sulla superficie.

¹⁾ Si può dedurre immediatamente questa formula tenendo conto che

$$d^3k = dS dl = dS dF / |\nabla_{\mathbf{k}} F|,$$

dove l è la distanza sulla normale alla superficie.

Consideriamo un caso tipico, in cui i punti di degenerazione formano una linea nello spazio k . Allora per $f \rightarrow 0$ la superficie (68,10) si trasforma in una linea sulla quale giacciono i punti di degenerazione e, per f piccoli, è rappresentata da un tubo sottile che abbraccia questa linea; la dipendenza dell'area ΔS da f coincide perciò con la dipendenza di f dal diametro del tubo.

Se le superfici energetiche si intersecano su una linea di degenerazione senza tangenza (si veda la fig. 27, *b*), la distanza del punto k dal punto di degenerazione dipende da f linearmente, in modo che anche $\Delta S \sim f$. Poiché la differenza tra le derivate in questo caso è finita nel punto d'intersezione, allora

$$v(f) \sim f^3. \quad (68,13)$$

L'integrale (68,5) diverge ora soltanto logaritmicamente. Questa divergenza va eliminata, così come in assenza di degenerazione (si veda più avanti). Essendo debole, essa di solito non conduce a un cambiamento sostanziale della legge (68,2).

Supponiamo ora che le superfici energetiche abbiano nel punto di degenerazione una tangenza quadratica. Allora, come è chiaro dalla fig. 27, *c*, f è proporzionale al quadrato della distanza dal punto di tangenza. L'area ΔS , proporzionale a questa distanza, risulta essere $\sim f^{1/2}$. Ma in questo caso è identica la dipendenza da f anche della differenza tra le derivate nella (68,12), in quanto le curve delle derivate si intersecano senza tangenza. Perciò in questo caso

$$v(f) \sim f^2 \quad (68,14)$$

e non compare divergenza nella conducibilità termica.

Analogamente si possono studiare altri tipi di degenerazione ¹⁾.

Se non esistono punti di degenerazione nello spettro fononico, allora per garantire una conducibilità termica finita da parte dei processi a tre fononi, la condizione (68,6) deve essere soddisfatta (almeno per un ramo dello spettro $\omega(k)$) per tutte le direzioni n . In caso contrario la conducibilità termica finita si stabilisce unicamente in seguito a processi di ordine superiore (a quattro fononi) e la legge (68,2) non sussiste. Osserviamo che a temperature basse, alle quali la lunghezza del cammino libero cresce tanto che può essere paragonata con dimensioni del campione L , la divergenza dell'integrale (68,5) può essere tagliata su $f \sim 1/L$, il che condurrebbe alla dipendenza del coefficiente di conducibilità termica dalle dimensioni L .

¹⁾ Per il loro studio si veda l'articolo originale di *C. Herring* in *Phys. Rev.*, 1954, v. 95, pag. 954.

§ 69. *Conducibilità termica dei dielettrici.
Basse temperature*

Alle basse temperature ($T \ll \Theta$) il carattere del trasporto di calore nei dielettrici cambia radicalmente. Infatti, in queste condizioni il numero di processi umklapp diventa esponenzialmente piccolo, come risulta con chiarezza dalle considerazioni seguenti.

La conservazione delle quasi-quantità di moto in un processo a tre fononi umklapp, espressa dall'uguaglianza $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{b}$, richiede che almeno una delle tre quasi-quantità di moto sia grande; lo sia $k_1 \sim b$. Allora anche l'energia $\omega_1 \sim \Theta$, e in conseguenza di ciò la conservazione dell'energia ($\omega = \omega_1 + \omega_2$) impone che sia grande anche l'energia $\omega \sim \Theta$. Ma per $T \ll \Theta$ la maggioranza dei fononi ha energia $\sim T$, mentre il numero di fononi con energie $\sim \Theta$ è esponenzialmente piccolo. Quindi, sia per il processo di disintegrazione di un fonone che per il processo inverso, di fusione di due fononi, i numeri di fononi iniziali, così come i numeri di processi, sono esponenzialmente piccoli. È facile notare che il carattere a tre fononi del processo è inessenziale in queste considerazioni. Lo stesso si riporta a processi con numero di fononi più grande.

In questa situazione il quadro fisico della trasmissione del calore è il seguente. I numerosi urti normali tra fononi, che conservano la quasi-quantità di moto totale, contribuiscono a stabilire solo l'equilibrio « interno » nel gas fononico, che inoltre può muoversi relativamente al reticolo con una velocità arbitraria V . I rari urti umklapp non fanno altro che modificare debolmente la funzione di distribuzione, ma essi stabiliscono un determinato valore V (proporzionale al gradiente della temperatura); questo valore, a sua volta, definisce il flusso di calore. Mostriamo ora in che modo questo quadro è espresso nella soluzione matematica del problema ¹⁾.

Scriviamo l'equazione cinetica nella forma

$$\frac{\partial N_0}{\partial T} \mathbf{u} \nabla T = I_N(\chi) + I_U(\chi), \quad (69,1)$$

separando nell'integrale degli urti le parti legate agli urti normali (indice N) e a quelli umklapp (indice U). La funzione di distribuzione d'equilibrio, corrispondente al moto del gas come un tutt'uno con velocità V , si ottiene dalla funzione $N_0(\omega)$ sostituendo il suo argomento ω con $\omega - \mathbf{kV}$; per V piccolo abbiamo

$$N_0(\omega - \mathbf{kV}) \approx N_0(\omega) - \mathbf{kV} \frac{\partial N_0}{\partial \omega}. \quad (69,2)$$

¹⁾ Sottolineiamo che la separazione univoca dei processi umklapp come un effetto piccolo si ottiene proprio grazie alla scelta della cella fondamentale nel reticolo inverso, concordata al § 66, in seguito alla quale tutti gli urti tra i soli fononi a onda lunga di piccola energia sono normali.

In accordo con il quadro suindicato cerchiamo la soluzione dell'equazione (69,1) nella forma

$$\chi = \chi_U + \chi_N, \quad \chi_N = kV; \quad (69,3)$$

χ_U è la parte della variazione della funzione di distribuzione legata ai processi umklapp. Quest'ultima parte è piccola rispetto a χ_N . Se indichiamo con v_U e v_N gli ordini di grandezza delle frequenze efficaci degli urti umklapp e normali ($v_U \ll v_N$), allora

$$\chi_U/\chi_N \sim v_U/v_N. \quad (69,4)$$

Sostituendo questa relazione nella (69,1) otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial N_0}{\partial T} u \nabla T = I_N(\chi_U) + I_U(\chi_N), \quad (69,5)$$

dove gli operatori lineari agenti sulla funzione χ sono definiti dall'espressione (67,17). Nella (69,5) si è tenuto conto che $I_N(\chi_N) = 0$ e si è ommesso il piccolo termine $I_U(\chi_U)$; gli altri due termini a secondo membro sono dello stesso ordine di grandezza per la relazione (69,4).

Sottolineiamo soprattutto che, trascurando i processi umklapp, per un gradiente della temperatura non nullo, l'equazione cinetica in generale non avrebbe soluzione. Moltiplichiamo infatti per k l'equazione (69,5), integriamo rispetto a $d^3k/(2\pi)^3$ e sommiamo su tutti i rami dello spettro fononico. Poiché gli urti normali conservano la quasi-quantità di moto totale, come risultato il termine $I_N(\chi_U)$ si annulla, in modo che resta

$$\sum_g \int k(u \nabla T) \frac{\partial N_0}{\partial T} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \sum_g \int k I_U(\chi_N) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (69,6)$$

Se trascurassimo i processi umklapp il secondo membro di questa equazione sarebbe zero, mentre il primo membro è non nullo a priori (la funzione integranda è una funzione pari di k poiché $\omega(k)$ è funzione pari e $u = \partial\omega/\partial k$ è dispari); questa contraddizione significa che l'equazione cinetica non ha soluzione.

Se si tiene conto dei processi umklapp, allora l'uguaglianza (69,6) definisce la grandezza incognita V , che figura nella soluzione (69,3). Per rendere più semplice la scrittura delle formule supponiamo che il cristallo abbia simmetria cubica; allora l'anisotropia del cristallo non si manifesta negli integrali della (69,6)¹⁾ e l'uguaglianza (69,6), dopo la sostituzione di χ_N dalla (69,3), diventa

$$\beta_1 \nabla T = -v_U \beta_2 TV, \quad (69,7)$$

¹⁾ Per simmetria cubica ogni tensore di secondo rango si riduce a uno scalare: $a_{\alpha\beta} = 1/3 a \delta_{\alpha\beta}$, $a = a_{\alpha\alpha}$.

dove si sono introdotte le notazioni

$$\beta_1 = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial T} \sum_g \int \mathbf{k} u N_0 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial T} \sum_g \int \frac{k^2}{\omega} N_0 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

$$T v_U \beta_2 = -\frac{1}{3} \sum_g \int \mathbf{k} I_U(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (69,8)$$

(il fattore β_2 è presente per rendere più facile la scrittura delle formule ulteriori).

L'uguaglianza (69,7) definisce \mathbf{V} e in seguito il flusso di energia si calcola come l'integrale (67,4), nel quale si deve sostituire a N la funzione

$$\delta N_N = -\mathbf{k} \mathbf{V} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} = \mathbf{k} \mathbf{V} \frac{T}{\omega} \frac{\partial N_0}{\partial T}.$$

Allora otteniamo $\mathbf{q} = T \beta_1 \mathbf{V}$; assieme con la (69,7) ciò dà $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ con il coefficiente di conducibilità termica

$$\kappa = \beta_1^2 / v_U \beta_2. \quad (69,9)$$

È interessante che nel caso considerato il calcolo di κ non richiede la soluzione dell'equazione cinetica (69,5) e si riduce al calcolo dell'integrale (69,8).

Gli integrali β_1 e β_2 sono definiti dalla regione di frequenze $\omega \sim T$, in cui si trova la maggioranza dei fononi. Questi integrali dipendono da T , come una potenza. Poiché solo i fononi acustici possono avere energia piccola, allora è sufficiente in pratica sommare in β_1 e β_2 sui soli tre rami acustici dello spettro. È facile vedere che

$$\beta_1, \beta_2 \sim T^3. \quad (69,10)$$

La dipendenza esponenziale, invece, è inclusa nell'integrale v_U . La sua espressione concreta si può ottenere mediante la formula (67,17). Per i processi umklapp abbiamo

$$\chi_{N_1} + \chi_{N_2} - \chi_N = \mathbf{V} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) = \mathbf{V} \mathbf{b}.$$

Per la maggioranza dei fononi $\omega \sim T$ e la funzione di distribuzione $N_0 \sim 1$; per i fononi con $\omega \gg T$, invece, la funzione $N_0 \ll 1$. Perciò si può fare a meno dei fattori $N_0 + 1 \sim 1$ anche nella stima dell'integrale. Quanto alle funzioni

$$N_0 = e^{-\omega/T} (N_0 + 1)$$

esse contengono i fattori $\exp(-\omega/T)$, che possono essere esponenzialmente piccoli; sono questi fattori a giocare il ruolo determinante per la stima dell'integrale.

Quindi, trattando solo la dipendenza esponenziale di v_U dalla temperatura, abbiamo

$$v_U \propto \sum_{(gb)} \int e^{-\omega/T} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3k d^3k_1; \quad (69,11)$$

la sommatoria è estesa a tutti i rami g, g_1, g_2 dello spettro e a tutti i valori non nulli di b che compaiono nei processi umklapp. L'equazione

$$\omega_g(\mathbf{k}) = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1) + \omega_{g_2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (69,12)$$

definisce una superficie a cinque dimensioni nello spazio a sei dimensioni \mathbf{k}, \mathbf{k}_1 . Sia $\Delta(g, g_1, g_2)$ il valore minimo di $\omega_g(\mathbf{k})$ su questa ipersuperficie; poiché sono grandi le energie dei fononi che partecipano ai processi umklapp, allora questi valori sono $\sim \Theta$. Ciascuno degli integrali sotto il segno di somma rispetto a (g) nella (69,11) è proporzionale a $\exp[-\Delta(g, g_1, g_2)/T]$. Conservando solo il più grande abbiamo

$$v_U \propto \exp(-\Delta_{\min}/T), \quad (69,13)$$

dove Δ_{\min} è il più piccolo dei valori $\Delta(g, g_1, g_2)$.

Concludiamo così che il coefficiente di conducibilità termica dipende in generale dalla temperatura secondo la legge esponenziale

$$\kappa \propto \exp(\Delta_{\min}/T), \quad (69,14)$$

dove $\Delta_{\min} \sim \Theta$ (R. Peierls, 1929).

I processi d'ordine superiore, con partecipazione di un numero più grande di fononi, conducono a una dipendenza dalla temperatura dello stesso carattere, dove Δ è il valore più piccolo possibile dell'energia dei fononi iniziali in ciascun processo (o, il che è lo stesso, la metà del valore minimo dell'energia totale di tutti i fononi, iniziali e finali, che partecipano al processo). È possibile, in via teorica, che questo valore sia più piccolo di quello dei processi a tre fononi, e allora il contributo dei processi d'ordine superiore alla conducibilità termica può essere prevalente, malgrado il fatto che il fattore davanti all'esponente diminuisce, ovviamente, all'aumentare dell'ordine del processo.

A differenza della frequenza v_U dei processi umklapp la frequenza efficace v_N degli urti normali diminuisce con la temperatura come una potenza; tenendo conto dell'applicazione al § 71, definiamo questa legge.

Gli urti normali interessano i fononi acustici con $\omega \sim T$, che costituiscono la maggioranza. Le loro quasi-quantità di moto $k \sim \omega/u \sim T/u$. Nell'integrale degli urti (67,17) l'integrazione è estesa a una superficie di area $\sim k^2$, isolabile con una funzione δ nel volume $\sim k^3$. In questa regione le funzioni $N_0 \sim 1$ e la funzione $w \sim k^3$ (secondo la (66,14)). Perciò $v_N \propto T^5$. È più facile definire il coefficiente di

proporzionalità con la condizione che per $T \sim \Theta$ questa espressione e la stima (68,3) devono condurre allo stesso risultato; di qui

$$v_N \sim T^5/\Theta^4 \text{ Mud.} \quad (69,15)$$

§ 70. Diffusione di fononi su impurità

Nei due paragrafi precedenti il reticolo cristallino è stato supposto perfetto, senza difetti. Soffermiamoci ora sul ruolo che può giocare nella conducibilità termica di un dielettrico la diffusione di fononi su atomi di impurità.

Nel caso dei fononi acustici a onda lunga, un atomo di impurità rappresenta un difetto puntiforme del reticolo. La proprietà caratteristica della diffusione su questi difetti consiste nell'elasticità (la frequenza fononica non varia); inoltre, la sezione di diffusione decresce rapidamente al diminuire della frequenza ω , il che è lo stesso, del vettore d'onda come k^4 ¹⁾.

L'integrale degli urti per la diffusione dei fononi sulle impurità ha la forma

$$\begin{aligned} \text{St } N_k = N_{\text{imp}} \int w(k, k') \{N_{k'} (1 + N_k) - N_k (1 + N_{k'})\} \times \\ \times \delta(\omega' - \omega) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (70,1) \end{aligned}$$

Come al solito, il primo termine tra parentesi graffe dà il numero di atti di diffusione (nell'unità di tempo) che conducono un fonone, dagli stati con tutti gli altri valori k' corrispondenti alla stessa energia, allo stato con la quasi-quantità di moto k . Analogamente, il secondo termine dà il numero degli atti di diffusione che fanno uscire il fonone dal dato stato in tutti gli altri stati. Se gli atomi di impurità sono disposti in modo caotico e se la distanza media tra essi è molto superiore all'ampiezza di diffusione, allora atomi diversi diffondono indipendentemente e le probabilità vanno sommate. Per queste ipotesi (ciò che è stato proposto nella (70,1)) il numero generale di atti di diffusione è proporzionale alla densità degli atomi di impurità N_{imp} . Per diffusione in un mezzo anisotropo la funzione $w(k, k')$ dipende dalle direzioni dei due vettori k e k' ; quanto alla dipendenza dal valore assoluto k , essa è data dalla legge $w \propto k^4$. Nella (70,1) si è posto $w(k, k') = w(k', k)$. Ricordiamo che nell'approssimazione di Born questa uguaglianza deriva dalla condizione di unitarietà, tenendo conto della limitatezza dell'ampiezza di diffusione e trascurando i termini del secondo ordine (si veda III,

¹⁾ Questa è una proprietà generale della diffusione delle onde acustiche su ostacoli di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda (cfr. VI, § 76). Confrontare anche la situazione analoga della diffusione delle onde elettromagnetiche lunghe; II, § 79.

§ 126). L'approssimazione di Born è in generale inapplicabile alla diffusione di un fonone su un atomo di impurità. Ma alle basse temperature, quando si parla di fononi con k piccolo, esiste un'altra causa per una piccola ampiezza di diffusione, ossia la proporzionalità a k^2 ; trascurando i termini $\propto k^4$ riotteniamo l'uguaglianza richiesta.

I prodotti $N_k N_{k'}$ tra parentesi graffe nella (70,1) si elidono e dopo la sostituzione $N = N_0 + \delta N$ l'integrale degli urti assume immediatamente la forma linearizzata

$$\text{St } N \equiv I_{\text{imp}} (\delta N) = N_{\text{imp}} \int w (\delta N_{k'} - \delta N_k) \delta(\omega' - \omega) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (70,2)$$

Assieme alla funzione w , questo integrale è proporzionale a k^4 . Poiché al tempo stesso la derivata $\partial N_0 / \partial T \propto 1/\omega \propto 1/k$ per $\omega \ll T$, allora in questa regione di frequenze

$$\delta N \propto k^{-5}. \quad (70,3)$$

Abbiamo avuto già a che fare con questa situazione al § 68 (cfr. la (68,4)): la dipendenza (70,3) implica la divergenza dell'integrale che definisce il flusso termico. Quindi, di per sé la presenza di impurità nel cristallo non può garantire che la resistenza termica del dielettrico sia finita.

Ciò non significa, tuttavia, che le impurità in generale non incidano sullo stabilirsi di questa resistenza. Il fatto è che la diffusione sugli atomi di impurità non conserva la quasi-quantità di moto dei fononi e, in questo senso, può svolgere il ruolo dei processi umklapp. In campioni sufficientemente puri può esistere una regione di basse temperature, in cui la frequenza efficace v_{imp} di diffusione sulle impurità (per i fononi con $\omega \sim T$) occupa una posizione intermedia tra le frequenze degli urti fonone-fonone normali e umklapp, cioè

$$v_N \gg v_{\text{imp}} \gg v_U. \quad (70,4)$$

In queste condizioni il ruolo dei processi umklapp passa alla diffusione sulle impurità e le formule (69,6-8) restano valide sostituendo I_U con I_{imp} . Come risultato il coefficiente di conducibilità termica sarà definito dalla formula (69,9) con v_{imp} al posto di v_U :

$$\kappa = \beta_1^2 / \beta_2 v_{\text{imp}}.$$

Secondo la (70,2), $v_{\text{imp}} \propto \omega^4 \sim T^4$. Quanto alle grandezze β_1 e β_2 , per i fononi acustici esse sono proporzionali a T^3 (si veda la (69,10)). Perciò nella situazione considerata arriviamo alla legge $\kappa \propto 1/T$.

§ 71. Idrodinamica del gas fononico in un dielettrico

La conservazione approssimata della quasi-quantità di moto per l'ipotesi che la lunghezza del cammino libero l_N per gli urti normali sia piccola rispetto alla lunghezza del cammino libero l_U per i pro-

cessi umklapp,

$$l_N/l_U \sim v_U/v_N \ll 1, \quad (71,1)$$

rende il sistema fononico in un cristallo alle basse temperature sotto molti aspetti simile a un gas ordinario. Gli urti normali stabiliscono l'equilibrio intrinseco in ogni elemento di volume del gas (più grande di l_N), che può muoversi inoltre con velocità arbitraria V . Se la velocità V e la temperatura T variano notevolmente soltanto a distanze maggiori di l_N (e in tempi più lunghi di $1/v_N$), allora si può ottenere per queste grandezze un sistema di equazioni « idrodinamiche ». Costruiamole nell'approssimazione lineare rispetto alla velocità V e al gradiente della temperatura, che supporremo infinitesimi dello stesso ordine. Inoltre, per rendere più facile la scrittura delle formule supporremo nuovamente (come al § 69) che il cristallo abbia simmetria cubica.

Una delle equazioni cercate esprime la legge di conservazione dell'energia e si ottiene sostituendo nelle formule (67,3-4) la funzione di distribuzione (69,2). Gli integrali rispetto a ω (kV) $\partial N_0/\partial \omega$ e $\omega \mathbf{u} N_0$ si annullano per integrazione estesa alle direzioni \mathbf{k} (cfr. la nota a pag. 345). La funzione $N_0(\omega)$ dipende dalle coordinate e dal tempo soltanto mediante T . Trascurando i termini con il prodotto $V \nabla T$ otteniamo

$$\beta_3 \frac{\partial T}{\partial t} + \beta_1 T \operatorname{div} V = 0, \quad (71,2)$$

dove

$$\beta_3 = \partial E_0 / \partial T, \quad (71,3)$$

E_0 è la densità d'equilibrio dell'energia e β_1 è definito dalla (69,8).

L'altra equazione esprime la conservazione (approssimata) della quasi-quantità di moto e si deduce dall'equazione cinetica

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla N = \operatorname{St}_N N + \operatorname{St}_U N \quad (71,4)$$

sostituendo N nella forma (69,2), moltiplicando per \mathbf{k} , integrando rispetto a d^3k e sommando sui diversi tipi di fononi. L'integrale rispetto a \mathbf{k} $\operatorname{St}_N N$ si annulla in virtù della conservazione della quasi-quantità di moto per urti normali. Come risultato otteniamo

$$\beta_2 T \frac{\partial V}{\partial t} + \beta_1 \nabla T = -v_U \beta_2 T V \quad (71,5)$$

con β_2 e v_U definiti dalla (69,8). Sono le equazioni (71,2) e (71,5) a costituire il sistema cercato di equazioni idrodinamiche per il gas fononico in un dielettrico.

Il termine esponenzialmente piccolo (con v_U) a secondo membro dell'equazione (71,5) rappresenta l'influsso dei processi umklapp. Se questo termine viene trascurato, la quasi-quantità di moto si conserva rigorosamente. In queste condizioni in un gas fononico si

possono propagare onde non smorzantisi, analoghe alle onde del secondo suono in un superfluido (V. P. Peškov, 1946). Escludendo infatti V dalle (71,2) e (71,5) otteniamo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\beta_1^2}{\beta_2 \beta_3} \Delta T, \quad (71,6)$$

cioè l'equazione d'onda che descrive la propagazione delle oscillazioni della temperatura con la velocità

$$u_2 = (\beta_1^2 / \beta_2 \beta_3)^{1/2}. \quad (71,7)$$

Come si è detto, i contributi agli integrali $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ alle basse temperature provengono principalmente solo dai rami acustici dello spettro. Per le leggi lineari della dispersione di $\omega(\mathbf{k})$ gli integrali sono proporzionali a T^3 ; inoltre la velocità (71,7) non dipende dalla temperatura e ha l'ordine di grandezza della velocità del suono ¹).

Abbiamo supposto finora illimitate le dimensioni del cristallo. Alle basse temperature, quando la lunghezza del cammino libero dei fononi cresce rapidamente, può essere reale una situazione in cui essa sia commensurabile o persino superiore alle dimensioni del cristallo L . Ciò si riferisce soprattutto alla lunghezza l_U che cresce esponenzialmente.

Consideriamo la trasmissione di calore in un dielettrico nell'ipotesi che sia $l_U \gg L$ (questa condizione sarà precisata più avanti) e al tempo stesso $l_N \ll L$; quest'ultima condizione consente di ricorrere alle equazioni dell'idrodinamica dei fononi (J. A. Sussmann, A. Thellung, 1963; R. N. Gurzi, 1964).

Grazie alle disomogeneità microscopiche della superficie del cristallo, la riflessione dei fononi da parte della superficie avviene, di solito, in modo disordinato (*in modo diffusionale*, come si suole dire); ciò vuol dire che la velocità macroscopica V del gas fononico si annulla sulla frontiera. Ma le equazioni (71,2) e (71,5) non ammettono questa condizione al contorno; le loro soluzioni possono soddisfare solo la condizione che si annulli la componente della velocità normale alla superficie. Come nell'idrodinamica dei fluidi ordinari, la condizione al contorno di annullamento della componente tangenziale della velocità richiede di tener conto della viscosità.

Nel caso stazionario dall'equazione (71,2) ricaviamo $\text{div } \mathbf{V} = 0$. L'inclusione della viscosità conduce alla comparsa al secondo membro dell'equazione (71,5) di un termine contenente ΔV , che è simile al termine analogo nell'equazione di Navier-Stokes dell'idrodinamica di un fluido viscoso ordinario. Nel caso stazionario questa equa-

¹ In un liquido isotropo con spettro energetico fononico (l'elio superfluido alle basse temperature) esiste sempre un ramo acustico in cui $\omega = uk$. In questo caso $\beta_1/\beta = u^2$, $\beta_1/\beta_s = 1/3$ e la velocità del secondo suono $u_2 = u/\sqrt{3}$.

zione assume la forma

$$\frac{\beta_1}{\beta_2 T} \nabla T = \mu \Delta V - v_U V. \quad (71,8)$$

La grandezza μ ha dimensione cm^2/s e svolge il ruolo di viscosità cinematica del gas fononico ¹⁾. Il suo calcolo richiede in teoria di risolvere l'equazione cinetica corrispondente. Per stimarne l'ordine di grandezza, invece, si può ricorrere all'ordinaria formula cinetica dei gas, secondo la quale

$$\mu \sim l_N \bar{v} \sim u^2/v_N. \quad (71,9)$$

Gli effetti dimensionali giocano un ruolo prevalente quando nell'equazione (71,8) si può trascurare il termine $v_U V$ rispetto a $\mu \Delta V$. Supponiamo, ad esempio, che il calore si trasmetta lungo una sbarra cilindrica di spessore R . Quest'ultimo definisce la lunghezza caratteristica per la variazione della velocità V in modo che $\Delta V \sim V/R^2$. Vediamo che si può trascurare il termine $v_U V$ se $\mu/R^2 \gg v_U$. Con la stima (71,9) questa condizione si scrive $l_U \gg l_{\text{eff}}$, dove

$$l_{\text{eff}} \sim R^2/l_N \quad (71,10)$$

svolge il ruolo di lunghezza efficace del moto dei fononi in un corpo limitato. Viceversa, per $l_{\text{eff}} \gg l_U$ le dimensioni del corpo sono insensibili e sussiste la legge (69,14).

Il processo di trasmissione del calore lungo la sbarra, per $l_U \gg l_{\text{eff}}$, assume il carattere della corrente di Poiseuille di gas fononico viscoso. La si può caratterizzare mediante il coefficiente efficace di conducibilità termica che definisce la densità del flusso d'energia come $-\kappa_{\text{eff}} \nabla T$, dove ∇T è il gradiente della temperatura lungo la sbarra. Questo flusso si può stimare sostituendo la (71,10) nell'espressione $\kappa_{\text{eff}} \sim C u l_{\text{eff}}$. Alle basse temperature il calore specifico del reticolo è $C \propto T^3$. La lunghezza, invece, è $l_N \sim u/v_N \propto T^{-5}$ (secondo la (69,15)). Perciò la conducibilità termica efficace è

$$\kappa_{\text{eff}} \propto R^2 T^8 \quad \text{per} \quad R^2/l_U \ll l_N \ll R; \quad (71,11)$$

essa decresce al diminuire della temperatura.

Infine, a temperature ancora più basse, quando anche la lunghezza $l_N \gg R$, gli urti reciproci tra i fononi diventano, in generale, insensibili (alla pari della situazione di Knudsen nei gas ordinari fortemente rarefatti). Allora il ruolo della lunghezza del cammino libero

¹⁾ Pensando solo all'analisi qualitativa del problema, trascuriamo qui completamente l'anisotropia del cristallo. Si deve tenere presente che, anche in presenza di simmetria cubica, la viscosità è descritta non da un coefficiente scalare di viscosità, bensì da un tensore di quarto rango, con più di una componente indipendente.

passa alle dimensioni del corpo R e la conducibilità termica efficace vale

$$\kappa_{\text{eff}} \sim CuR \propto T^3 R \quad (71,12)$$

(H. B. G. Casimir, 1938).

§ 72. Assorbimento del suono in un dielettrico. Onde lunghe

Il carattere dell'assorbimento del suono in un cristallo dielettrico dipende sostanzialmente dal rapporto tra la lunghezza dell'onda e la lunghezza del cammino libero l dei fononi termici. Se la lunghezza d'onda è grande rispetto a l ($fl \ll 1$, dove f è il vettore d'onda dell'onda sonora), allora è applicabile la teoria macroscopica basata sulle equazioni della teoria dell'elasticità (si veda VII, § 35). Secondo questa teoria il coefficiente di assorbimento del suono è composto di due termini definiti dalla conducibilità termica e dalla viscosità del mezzo, rispettivamente. Entrambi questi termini sono proporzionali al quadrato della frequenza. Ci proponiamo qui di determinarne la dipendenza dalla temperatura.

Il contributo proveniente dalla conducibilità termica al coefficiente di assorbimento del suono si esprime, come ordine di grandezza, mediante la formula ¹⁾

$$\gamma_{\text{term}} \sim \omega^2 \frac{\kappa T \alpha^2 \rho}{u C^2}, \quad (72,1)$$

dove α è il coefficiente di dilatazione termica del corpo, C la capacità termica dell'unità di volume, ρ la densità. Ad alte temperature, $T \gg \Theta$, la conducibilità termica $\kappa \sim 1/T$, mentre C e α sono indipendenti dalla temperatura (si veda V, §§ 65, 67). Perciò in questa regione γ_{term} non dipende dalla temperatura. Alle basse temperature la dipendenza di γ_{term} dalla temperatura è definita in primo luogo (nel reticolo perfetto) dalla conducibilità termica, che cresce esponenzialmente al diminuire di T .

Consideriamo ora la parte del coefficiente di assorbimento del suono legata alla viscosità (A. I. Achiezer, 1938).

Un campo esterno sonoro, poiché deforma macroscopicamente il reticolo cristallino, modifica la legge di dispersione dei fononi. La lunghezza d'onda dei fononi termici è piccola rispetto alla lunghezza d'onda del suono; perciò rispetto a un fonone termico si può ritenere omogenea la deformazione, cioè supporre che il fonone si trovi in un reticolo sempre regolare, ma con periodi cambiati. In prima approssimazione rispetto alla piccola deformazione, la frequenza $\omega(\mathbf{k})$ del fonone in questo reticolo è legata alla frequenza $\omega^{(0)}(\mathbf{k})$ nel reticolo

¹⁾ Per fissare le idee, scriviamo il coefficiente di assorbimento per l'unità di cammino. Le dipendenze dalla frequenza e dalla temperatura restano le stesse per il coefficiente di assorbimento nell'unità di tempo, in quanto ambedue le definizioni differiscono per un solo fattore costante, la velocità del suono.

non deformato, mediante la formula

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega^{(0)}(\mathbf{k}) (1 + \lambda_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}), \quad (72,2)$$

dove

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

è il tensore di deformazione (U è il vettore spostamento). Il tensore $\lambda_{\alpha\beta}$, che caratterizza il cristallo, in generale dipende da \mathbf{k} ; per i fononi acustici a onda lunga, che ubbidiscono a una legge di dispersione lineare esso non dipende, però, dal valore assoluto di \mathbf{k} .

L'espressione tra parentesi nella (72,2) dovrebbe contenere anche un termine della forma $\lambda \text{rot } U$, che esprime la seguente circostanza banale: se la deformazione implica la rotazione dell'elemento di volume del reticolo ($\text{rot } U \neq 0$), allora gli assi (del reticolo inverso), rispetto ai quali deve essere definita la quasi-quantità di moto del fonone nella legge di dispersione, cambiano di direzione; il termine $\lambda \text{rot } U$ esprimerebbe il calcolo corrispondente di \mathbf{k} . Non scriviamo questo termine nella (72,2), poiché è evidente a priori che esso non inciderà sulla dissipazione dell'energia nell'onda sonora in questione: l'effetto fisico reale, ossia la dissipazione, non può dipendere dal vettore $\text{rot } U$, non nullo già per una semplice rotazione del corpo come un tutt'uno.

La variazione della funzione di distribuzione dei fononi causata dalla deformazione del reticolo è definita dall'equazione cinetica

$$\frac{\partial N}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial N}{\partial T} \dot{T} = \text{St } N, \quad (72,3)$$

dove $\text{St } N$ è l'integrale degli urti fonone-fonone (67,6) e \dot{T} la velocità di variazione della temperatura in un dato punto del cristallo legata inevitabilmente alla deformazione. Linearizzando nel modo abituale questa equazione e introducendo la funzione χ , definita dalla (67,15), la riduciamo alla forma

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \left(\lambda_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} - \frac{\dot{T}}{T} \right) = I(\chi), \quad (72,4)$$

dove $I(\chi)$ è l'integrale degli urti linearizzato (67,17). La derivata $\dot{\omega}$ a primo membro è espressa mediante la (72,2); qui e più avanti omettiamo l'indice (0) nella frequenza imperturbata.

La derivata \dot{T} può essere espressa, in linea di principio, mediante lo stesso tensore $\lambda_{\alpha\beta}$. Dopo aver moltiplicato ambedue i membri dell'equazione (72,4) per ω , integrato sullo spazio \mathbf{k} e sommato su tutti i rami dello spettro fononico, il secondo membro dell'equazione si annulla in virtù della conservazione dell'energia in seguito ad urti. Il primo membro, invece, dà

$$\frac{\dot{T}}{T} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}, \quad (72,5)$$

dove $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ è il valore medio del tensore $\lambda_{\alpha\beta}$, calcolato rispetto a $\omega^2 \partial N_0 / \partial \omega$. In ambedue i casi limite, ossia ad alte e basse temperature, il valore $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ è indipendente dalla temperatura. Infatti, per $T \gg \Theta$ nel calcolo della media sono i fononi con quasi-quantità di moto indipendente dalla temperatura, $k \sim k_{\max} \sim 1/d$, a svolgere il ruolo essenziale. Per $T \ll \Theta$ sono importanti i fononi acustici a onda lunga, per i quali $\lambda_{\alpha\beta}$ è indipendente da k e perciò il calcolo della media non implica la dipendenza dalla temperatura.

Ponendo $\lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$, scriviamo l'equazione cinetica nella forma

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \tilde{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} = I(\chi). \quad (72,6)$$

In seguito, deduciamo la formula che definisce la dissipazione dell'energia in un gas fononico non in equilibrio. A tal fine partiamo dall'espressione dell'entropia nell'unità di volume del gas di Bose

$$S = \sum_g \int \{ (N+1) \ln(N+1) - N \ln N \} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (72,7)$$

(si veda V, § 55). Derivando questa espressione rispetto al tempo, troviamo

$$\dot{S} = \sum_g \int \dot{N} \ln \frac{N+1}{N} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (72,8)$$

Sostituendo qui \dot{N} con l'integrale St N (si veda il § 4) e realizzando determinate ridefinizioni delle variabili \mathbf{k} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 nei due termini dell'espressione (67,6), riduciamo \dot{S} alla forma

$$\begin{aligned} \dot{S} = \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \ln \frac{(N_1+1) N_2 N_3}{N_1 (N_2+1) (N_3+1)} \times \\ \times [(N_1+1) N_2 N_3 - N_1 (N_2+1) (N_3+1)] \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}. \end{aligned}$$

Moltiplicando questa espressione per T , otteniamo la funzione di dissipazione, ossia l'energia dissipata nell'unità di tempo nell'unità di volume. Sostituendovi $N = N_0 + \delta N$ (con δN rappresentato nella forma (67,15)) e limitandoci ai primi termini quadratici dello sviluppo in δN , otteniamo

$$\begin{aligned} T \dot{S} = \frac{1}{2T} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\ \times (N_{01}+1) N_{02} N_{03} (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3)^2 \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}. \quad (72,9) \end{aligned}$$

Le formule scritte sono sufficienti per la definizione della dipendenza del coefficiente di assorbimento del suono dalla temperatura. Consideriamo dapprima la regione delle alte temperature.

In questo caso l'integrale degli urti $I(\chi)$ contiene la temperatura sotto forma del fattore T^2 (si veda l'inizio del § 68). A primo membro dell'equazione cinetica (72,6) abbiamo $\omega \partial N_0 / \partial \omega \approx -T/\omega$ e, inoltre, per la massa fondamentale dei fononi la frequenza $\omega \sim \Theta$ è indipendente dalla temperatura. Troviamo così per queste frequenze

$$\chi \sim \frac{1}{T} \lambda_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}.$$

Dall'espressione (72,9), nella quale si deve porre $N_0 \approx T/\omega \gg 1$, concludiamo ora che la funzione di dissipazione non dipende dalla temperatura. Lo stesso vale anche per il coefficiente di assorbimento, che si ottiene dividendo la funzione di dissipazione per una grandezza indipendente dalla temperatura, cioè per la densità del flusso di energia nell'onda sonora. Quindi, per $T \gg \Theta$ le parti del coefficiente di assorbimento del suono dovute alla viscosità e alla conducibilità termica sono indipendenti dalla temperatura.

Alle basse temperature è necessario sottolineare soprattutto la distinzione teorica col problema della conducibilità termica: un valore finito del coefficiente di assorbimento del suono si ottiene già trascurando i processi umklapp (la frequenza dei quali alle basse temperature è piccola). Ricordiamo che nel caso della conducibilità termica la mancanza di soluzioni dell'equazione cinetica, senza tener conto dei processi umklapp, si manifestava moltiplicando questa equazione per \mathbf{k} e integrandola su tutto lo spettro fononico: il secondo membro dell'equazione si annulla, mentre il primo membro è diverso da zero a priori (cfr. la (69,6)). Per l'equazione (72,6) questa contraddizione non si rivela: poiché il suo primo membro è una funzione pari di \mathbf{k} , dopo la moltiplicazione per \mathbf{k} diventa una funzione dispari e l'integrazione rispetto a d^3k lo annulla. Si intende inoltre che si annulla anche l'integrale del termine che contiene l'operatore dei processi umklapp, ossia l'integrale $\mathbf{k}I_U(\chi)$. Poiché ciò non avviene automaticamente, in forza di una qualsiasi legge di conservazione, con questo si impone una determinata condizione alla soluzione dell'equazione cinetica, vale a dire che la funzione $\chi(\mathbf{k})$ deve essere pari rispetto a \mathbf{k} (allora $\mathbf{k}I_U(\chi)$ è una funzione dispari; si vede facilmente che l'operatore I non cambia la parità della funzione χ). Questa condizione elimina l'arbitrio dovuto all'esistenza (in assenza di processi umklapp) di una soluzione « parassita », dispari rispetto a \mathbf{k} , della forma $\chi = k\delta V$ e viene garantito il passaggio al limite corretto in caso di assenza di questi processi.

Per $T \ll \Theta$ sono i fononi con energia $\omega \sim T$ a svolgere il ruolo fondamentale nell'integrale degli urti (e nella funzione di dissipazione). Si tratta dei fononi a onda lunga dei rami acustici dello spet-

tro; le loro frequenze dipendono linearmente da \mathbf{k} e perciò $k \sim T/u$. Secondo la (66,14), per gli urti di questi fononi la funzione w nell'integrale (67,17) è proporzionale a kk_1k_2 . La funzione di distribuzione N_0 dipende unicamente dal rapporto ω/T , in modo che per $\omega \sim T$ abbiamo $N_0 \sim 1$. Si integra rispetto a $d^3k_1 = k_1^2 dk_1 d\Omega_1$, inoltre, rispetto a k_1 nella regione $\sim T$. Ciascun fattore k, k_1, k_2 , quindi, porta nell'integrale il fattore T e la funzione delta il fattore $1/T$. In tal modo, troviamo che tutto l'integrale, nel senso della sua dipendenza dalla temperatura, si stima come χT^4 . Il primo membro dell'equazione cinetica (72,6) per $\omega \sim T$ è indipendente dalla temperatura. Di qui troviamo che per $\omega \sim T$

$$\chi \sim T^{-4} \tilde{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}.$$

Dopo questa operazione, una stima analoga dell'integrale (72,9) conduce al risultato che la funzione di dissipazione e con essa la parte del coefficiente di assorbimento del suono proveniente dalla viscosità sono inversamente proporzionali a T . Quindi,

$$\gamma_{\text{visc}} \sim \omega^2/T \text{ per } T \ll \Theta. \quad (72,10)$$

La possibilità di fare a meno dei processi umklapp fa sì che questa parte del coefficiente di assorbimento cresce al diminuire della temperatura soltanto come una potenza e non come un esponenziale.

L'uso della funzione di dissipazione nella deduzione esposta ha consentito di evitare il problema di esprimere il tensore degli sforzi viscosi nel cristallo mediante la funzione di distribuzione dei fononi; la non banalità di questo problema è legata al fatto che si tratta del tensore di densità del flusso della quantità di moto effettiva, che non coincide affatto con la quasi-quantità di moto dei fononi. Mostriamo in che modo è possibile ottenere questa espressione dalla forma della funzione di dissipazione.

A tal fine partiamo nuovamente dall'integrale (72,8), rappresentando questa volta la derivata \dot{N} sotto forma dell'espressione che figura a primo membro dell'equazione cinetica (72,6). Quanto al logaritmo nell'espressione integranda, lo riscriviamo nella forma (si veda la (67,16))

$$-\ln \frac{N}{N+1} = -\ln \left[\frac{N_0}{N_0+1} \left(1 + \frac{\chi}{T} \right) \right] \approx \frac{\omega - \chi}{T}.$$

Come risultato otteniamo

$$T \dot{S} = \sum_g \int \omega \tilde{\lambda}_{\alpha\beta} \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \dot{U}_{\alpha\beta}, \quad (72,11)$$

dove $\delta N = -\chi \partial N_0 / \partial \omega$ (il termine contenente il fattore ω al posto di χ si annulla identicamente in virtù della definizione di $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$).

Qui si può scrivere semplicemente $\lambda_{\alpha\beta}$ al posto di $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta}$, poiché l'integrale con il fattore costante $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}$ si annulla in accordo con la condizione supplementare (67,14) che si impone a δN .

D'altra parte, la funzione di dissipazione (riferita all'unità di volume) si esprime attraverso il tensore degli sforzi viscosi $\sigma_{\alpha\beta}$ come $-\sigma'_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta}$ (cfr. VII, § 34). Il confronto con la (72,11) conduce, quindi, alla seguente espressione per il tensore degli sforzi viscosi:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{k}} \int \omega \lambda_{\alpha\beta} \delta N \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (72,12)$$

(V. L. Gurevič, 1980).

§ 73. Assorbimento del suono in un dielettrico. Onde corte

Nel caso inverso delle onde corte, $fl \gg 1$, il processo di smorzamento dell'onda sonora si può considerare come risultato dell'assorbimento di quanti separati di suono in seguito al loro urto con i fononi termici (L. D. Landau, Ju. B. Rumer, 1937). La possibilità di un tale approccio richiede che l'energia e la quantità di moto dei fononi termici siano definiti con sufficiente precisione: nel variare, in seguito all'assorbimento di un quanto sonoro, l'energia e la quantità di moto devono cadere in una regione all'esterno dell'indeterminazione quantistica, legata al fatto che la lunghezza del cammino libero è finita; questa condizione è garantita dalla disuguaglianza $fl \gg 1$. Questa situazione in effetti può verificarsi soltanto alle basse temperature, quando la lunghezza del cammino libero diventa sufficientemente grande.

In prima approssimazione, cioè con l'inclusione dei processi cui partecipa il numero più piccolo di fononi, si ha a che fare con i processi a tre fononi

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{f} = \mathbf{k}_2, \quad \omega_1 + \omega = \omega_2, \quad (73,1)$$

dove ω e \mathbf{f} sono l'energia e la quasi-quantità di moto del quanto sonoro, mentre ω_1 , \mathbf{k}_1 e ω_2 , \mathbf{k}_2 si riferiscono ai fononi termici. Le energie e le quasi-quantità di moto dei fononi termici sono $\omega_1, \omega_2 \sim T$; $k_1, k_2 \sim T/u$. Supporremo nel seguito che

$$\hbar\omega \ll T. \quad (73,2)$$

Allora ω_1 , ω_2 e k_1 , k_2 saranno grandi rispetto a ω e \mathbf{f} .

Come abbiamo visto al § 68, le leggi di conservazione (73,1) possono essere verificate soltanto se la velocità del fonone termico supera quella dei quanti sonori assorbiti (o emessi). Senza soffermarci sulla discussione dei diversi casi possibili, supporremo che l'onda sonora non sia « longitudinale » (cioè non corrisponda al ramo acustico dello spettro fononico con la velocità più elevata), in

modo che la condizione suindicata può essere soddisfatta. Essendo piccoli ω e f , i fononi termici iniziale e finale appartengono, in generale, a un medesimo ramo acustico dello spettro fononico; alle basse temperature essi sono a onda lunga.

Le probabilità di emissione o di assorbimento di un fonone nei processi a tre fononi sono date dalle formule (66,9) o (66,11). In questo caso i numeri di riempimento $N_1 \equiv N(\mathbf{k}_1)$ e $N_2 \equiv N(\mathbf{k}_2)$ sono definiti dalla funzione di distribuzione d'equilibrio di Planck (67,9). L'onda sonora macroscopica corrisponde a un numero di riempimento molto grande di un dato stato fononico f ; è ovvio che si può trascurare l'unità rispetto a questo numero. Omettendo il fattore $N(f)$ otteniamo la probabilità riferita a un quanto sonoro.

Quindi, la probabilità di assorbimento di un quanto sonoro, in seguito ai suoi urti con i fononi termici con tutti i valori possibili \mathbf{k}_1 , è data dall'integrale

$$\int A_{k_1 k_2} f N_1 (N_2 + 1) \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}. \quad (73,3)$$

Quanto alla possibilità del processo inverso, di emissione di un fonone f da parte di tutti i fononi possibili \mathbf{k}_2 , essa è

$$\int A_{k_1 k_2} f N_2 (N_1 + 1) \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}. \quad (73,4)$$

Nelle formule (66,9) e (66,11) figura la funzione w scritta, secondo la (66,14), nella forma $A_{k_1 k_2} f$ e si è tenuto conto del fatto che tutti e tre i fononi sono a onda lunga (A è funzione delle direzioni di tutti i fononi).

L'assorbimento di fononi (la velocità relativa di diminuzione del loro numero) è definito dalla differenza tra queste due probabilità. Poiché la frequenza ω è piccola rispetto a ω_1 e ω_2 , allora

$$N_1 (N_2 + 1) - (N_1 + 1) N_2 = N_1 - N_2 = - \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1} \omega.$$

In tal modo, il coefficiente di assorbimento è

$$\gamma \propto \omega f \int A_{k_1 k_2} \left| \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1} \right| \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) d^3 k_1. \quad (73,5)$$

Vediamo come questa grandezza dipende dalla frequenza del suono ω e dalla temperatura del cristallo T . Questa dipendenza è determinata completamente dal fatto che tutte le frequenze che figurano nella (73,5) sono funzioni omogenee del primo ordine dei vettori d'onda. Per rendere più facili le considerazioni si può ritenere che $\omega = Uf$, $\omega_1 = uk_1$, $\omega_2 = uk_2$, dove U e u sono velocità indipendenti dalla direzione.

Essendo piccolo f , si può porre $k_1 \approx k_2$. Per la stessa ragione

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} f = u f \cos \theta = \omega \frac{u}{U} \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo tra f e k . Allora abbiamo

$$\delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) = \frac{1}{\omega} \delta\left(1 - \frac{u}{U} \cos \theta\right)$$

e l'integrale (73,5) assume la forma

$$\gamma \approx \omega \int A k_1^2 \left| \frac{\partial N_1}{\partial \omega} \right| \delta\left(1 - \frac{u}{U} \cos \theta\right) k_1^2 dk_1 d\cos \theta, \quad (73,6)$$

ossia, dopo l'eliminazione della funzione δ ,

$$\gamma \approx \omega \int k_1^4 \left| \frac{\partial N}{\partial k_1} \right| dk_1.$$

Poiché N_1 è funzione soltanto del rapporto $\omega_1/T = uk_1/T$ (per convergenza rapida si può estendere l'integrazione rispetto a k_1 fino a ∞), l'integrale restante è proporzionale a T^4 . Quindi,

$$\gamma \approx \omega T^4. \quad (73,7)$$

Notiamo che il coefficiente di assorbimento del suono risulta essere proporzionale alla prima potenza della frequenza.

È da notare anche che con la condizione suindicata (73,2) il meccanismo studiato di smorzamento del suono è completamente analogo allo smorzamento di Landau in un plasma. In questo caso gli « elettroni di risonanza » sono i fononi che si muovono in fase con l'onda sonora. È naturale perciò la similitudine tra la (73,6) e la formula (30,1), che esprime lo smorzamento di Landau.

LIQUIDI QUANTISTICI

§ 74. Equazione cinetica delle quasi-particelle nel liquido di Fermi

L'equazione cinetica per le quasi-particelle in un liquido di Fermi ordinario è stata già considerata in un altro volume del Corso in relazione al problema della propagazione delle oscillazioni in esso (si veda IX, §§ 4, 5); a tal fine l'integrale degli urti nell'equazione era inessenziale. Continuiamo ora lo studio dell'equazione cinetica, tenendo conto della sua applicazione ai processi dissipativi dovuti proprio agli urti.

Le quasi-particelle nel liquido di Fermi hanno spin $1/2$. Corrispondentemente, la loro funzione di distribuzione è, nel caso generale, una matrice rispetto alle variabili di spin. Ma in una larga categoria di problemi è sufficiente considerare le distribuzioni indipendenti dalle variabili di spin. In questi casi la funzione di distribuzione si riduce alla funzione scalare $n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, normalizzata in modo tale che $n d^3p / (2\pi\hbar)^3$ è il numero di quasi-particelle (nell'unità di volume) con quantità di moto nell'intervallo d^3p e con la proiezione dello spin data; si supporrà ciò più avanti ai §§ 74-76.

La proprietà caratteristica dello spettro del liquido di Fermi è che l'energia delle quasi-particelle ε è un funzionale della funzione di distribuzione. Quando quest'ultima varia di poco,

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (74,1)$$

(n_0 è la distribuzione d'equilibrio), l'energia cambia di

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (74,2)$$

dove $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ è la funzione d'interazione delle quasi-particelle. In tal modo alla distribuzione (74,1) corrisponde l'energia delle quasi-particelle

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (74,3)$$

dove $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ è l'energia corrispondente alla distribuzione d'equilibrio.

L'equazione cinetica dice che

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \text{St } n. \quad (74,4)$$

La sua particolarità è che in un liquido disomogeneo il primo membro dell'equazione contiene un termine con la derivata $\partial \epsilon / \partial r$ anche in assenza di campo esterno, a causa della dipendenza di ϵ dalle coordinate, introdotta dall'espressione (74,3).

L'integrale degli urti a secondo membro dell'equazione (74,4) ha la forma

$$\text{St } n = \int w(p, p_1; p', p'_1) [n' n'_1 (1-n)(1-n_1) - n n_1 (1-n') \times \\ \times (1-n'_1)] \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon' - \epsilon'_1) \frac{d^3 p_1 d^3 p'_1}{(2\pi\hbar)^6}, \quad (74,5)$$

dove n, n_1, n', n'_1 sono funzioni delle quantità di moto p, p_1, p', p'_1 delle quasi-particelle collidenti. La legge di conservazione della quantità di moto in seguito agli urti si intende inclusa, in modo che $p + p_1 = p' + p'_1$; perciò nella (74,5) si integra soltanto rispetto a due (e non a tre) quantità di moto. La conservazione dell'energia, invece, è garantita dalla funzione delta scritta in forma esplicita. Infine, w è la funzione delle quantità di moto che definisce la probabilità d'urto. Il primo e il secondo termine tra parentesi quadre definiscono rispettivamente i numeri di quasi-particelle che arrivano in uno stato quantistico e che lo lasciano in seguito agli urti. Questi termini differiscono dai termini analoghi nell'integrale degli urti per il gas di Boltzmann per i fattori $(1-n), \dots$. La comparsa di questi fattori è legata alla statistica di Fermi, per la quale gli urti possono condurre le quasi-particelle soltanto in stati non ancora occupati.

L'approssimazione di Born è in generale inapplicabile agli urti tra le quasi-particelle nel liquido di Fermi. Cionondimeno le probabilità dei processi di diffusione diretto e inverso si possono ritenere uguali. Consideriamo ora le medie delle grandezze rispetto alle direzioni degli spin delle quasi-particelle. In queste condizioni la probabilità di diffusione risulta dipendente solo dalle quantità di moto iniziali e finali delle quasi-particelle collidenti. Questa circostanza permette di applicare qui le stesse considerazioni sfruttate al § 2, per la deduzione del principio dell'equilibrio dettagliato nella forma (2,8). Quello che più importa in questo caso è che nel liquido di Fermi si abbia sempre invarianza rispetto all'inversione spaziale. Quindi, siamo giunti all'uguaglianza

$$w(p', p'_1; p, p_1) = w(p, p_1; p', p'_1),$$

che abbiamo già usato nell'integrale degli urti (74,5). La funzione w dipende in generale dai numeri di riempimento degli stati e, quindi, dalla temperatura. Ma essendo piccola la temperatura (essenziale per tutta la teoria del liquido di Fermi), nell'integrale degli urti con w si deve intendere la funzione calcolata per $T = 0$.

Così come deve essere, l'integrale (74,5) si annulla identicamente sostituendo ad n la funzione di distribuzione d'equilibrio di Fermi

$$n_0(\varepsilon) = \left[\exp \frac{\varepsilon - \mu}{T} + 1 \right]^{-1}. \quad (74,6)$$

Osservando infatti che

$$\frac{n_0}{1 - n_0} = \exp \left(- \frac{\varepsilon - \mu}{T} \right),$$

vediamo immediatamente che per la legge di conservazione dell'energia si ha l'uguaglianza

$$\frac{n_0 n_{01}}{(1 - n_0)(1 - n_{01})} = \frac{n'_0 n'_{01}}{(1 - n'_0)(1 - n'_{01})}. \quad (74,7)$$

Precisiamo, con l'aiuto dell'equazione cinetica, in che modo si esprimono nei termini della funzione di distribuzione le leggi di conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto per il liquido di Fermi. La dipendenza dell'energia delle quasi-particelle dalla loro distribuzione conferisce a questo problema una specificità determinata.

Integriamo rispetto a $2d^3p/(2\pi\hbar)^3$ i due membri dell'equazione (74,4), dove il fattore 2 tiene conto delle due direzioni possibili dello spin. In virtù della conservazione del numero di quasi-particelle in seguito ad urti, l'integrale di $\text{St } n$ si annulla. Integriamo per parti l'integrale del termine $-(\partial n / \partial p)(\partial \varepsilon / \partial r)$ a primo membro dell'equazione, per cui quest'ultima assume la forma

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i} = 0,$$

dove N è la densità del numero di quasi-particelle,

$$\mathbf{i} = \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (74,8)$$

e $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ è la velocità delle quasi-particelle ¹⁾. Questa è l'equazione di continuità per le quasi-particelle, in modo che \mathbf{i} rappresenta la densità del loro flusso. Poiché il numero di quasi-particelle nel liquido di Fermi coincide con il numero di particelle proprie, \mathbf{i} rappresenta al tempo stesso la densità di flusso delle particelle proprie in modo che $\mathbf{i} = \langle \mathbf{p} / m \rangle$.

Applichiamo ora le stesse operazioni all'equazione (74,4) moltiplicando preliminarmente per \mathbf{p} ambedue i suoi membri. L'integrale di $\mathbf{p} \text{ St } n$ si annulla a causa della conservazione della quantità di

¹⁾ Qui e più avanti in questo paragrafo il simbolo $\langle \dots \rangle$ esprime l'integrazione rispetto alla distribuzione n :

$$\langle \dots \rangle = \int \dots n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

moto totale delle quasi-particelle in seguito ad urti. Quanto al primo membro, scritto nelle componenti vettoriali dà

$$\frac{\partial \langle p_\alpha \rangle}{\partial t} + \int p_\alpha \left(\frac{\partial n}{\partial x_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta} - \frac{\partial n}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} \right) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Riscriviamo l'espressione integranda nel secondo termine nella forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta} n \right) + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left(p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} n \right).$$

L'integrazione annulla il terzo termine e il secondo termine dà la derivata $\partial E / \partial x_\alpha$ della densità di energia del liquido E ; ricordiamo che l'energia delle quasi-particelle nel liquido di Fermi è definita precisamente in base alla variazione dell'energia interna:

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (74,9)$$

Otteniamo così l'equazione di conservazione della quantità di moto nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_\alpha \rangle + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

dove il tensore della densità di flusso della quantità di moto è

$$\Pi_{\alpha\beta} = \langle p_\alpha v_\beta \rangle + \delta_{\alpha\beta} (\langle \varepsilon \rangle - E). \quad (74,10)$$

Infine, moltiplicando per ε i due membri dell'equazione (74,4) e integrando, otteniamo analogamente l'equazione della conservazione dell'energia

$$\partial E / \partial t + \text{div } \mathbf{q} = 0,$$

dove la densità del flusso d'energia è

$$\mathbf{q} = \langle \varepsilon \mathbf{v} \rangle. \quad (74,11)$$

In equilibrio tutti i flussi \mathbf{i} , \mathbf{q} , $\Pi_{\alpha\beta}$ si annullano. Per essi otteniamo espressioni lineari rispetto alla piccola correzione δn nella distribuzione perturbata (74,1).

La funzione d'equilibrio n_0 dipende unicamente dall'energia della quasi-particella ε , inoltre, questa stessa energia corrisponde proprio alla distribuzione d'equilibrio. Indicando questa circostanza con l'indice zero in ε , scriviamo la definizione (74,1) nella seguente forma più precisa:

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\varepsilon_0) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (74,12)$$

Se invece esprimiamo n_0 in funzione dell'energia reale ε della quasi-particella, allora si deve scrivere

$$n_0(\varepsilon_0) = n_0(\varepsilon) - \delta \varepsilon \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

e la distribuzione perturbata sarà rappresentata nella forma

$$n(r, p) = n_0(\varepsilon) + \tilde{\delta n}(r, p), \quad (74,13)$$

$$\tilde{\delta n} = \delta n - \delta\varepsilon \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f(p, p') \delta n(r, p') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Poiché negli integrali (74,8-11) ε e $v = \partial\varepsilon/\partial p$ sono già l'energia e la velocità reali della quasi-particella, è sufficiente sostituirvi n nella forma (74,13) e otteniamo immediatamente

$$i = \int v \tilde{\delta n} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad q = \int \varepsilon v \tilde{\delta n} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (74,14)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int p_\alpha v_\beta \tilde{\delta n} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(nell'ultima espressione abbiamo usato anche la (74,9)). Ora, quando sono separati i termini del primo ordine in $\tilde{\delta n}$, negli integrali (74,14) si può intendere, ovviamente, ε come $\varepsilon_0(p)$.

Rappresentiamo δn , così come l'abbiamo fatto più volte, nella forma

$$\delta n = -\psi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}. \quad (74,15)$$

In questo caso la separazione del fattore $\partial n_0/\partial \varepsilon$ ha un significato particolare. La perturbazione δn è concentrata nella zona in cui si smussa la distribuzione di Fermi. Nella stessa zona la derivata $\partial n_0/\partial \varepsilon$ è anch'essa non nulla; dopo la separazione di questo fattore la funzione rimanente sarà una funzione lentamente variabile. Accanto alla (74,15) scriviamo

$$\tilde{\delta n} = -\varphi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \frac{n_0(1-n_0)}{T} \varphi, \quad (74,16)$$

dove

$$\varphi = \psi - \int f(p, p') \frac{\partial n_0(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \psi(r, p') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (74,17)$$

Nell'approssimazione zero rispetto al piccolo rapporto T/ε_F , si può sostituire la funzione $n_0(\varepsilon)$ con una funzione a gradini che si interrompe sull'energia di frontiera ε_F . Allora

$$\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \quad (74,18)$$

e l'integrazione in $d^3 p$ si riduce a quella estesa alla superficie di Fermi $\varepsilon = \varepsilon_F$. L'elemento di volume tra due superfici isoenergetiche infinitamente vicine nello spazio dei vettori quantità di moto vale

$$\frac{dS \, d\varepsilon}{|\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}|}, \quad (74,19)$$

dove dS è l'elemento d'area della superficie isoenergetica. Perciò l'integrazione rispetto a d^3p si trasforma in quella estesa alla superficie di Fermi mediante la formula

$$\int \dots \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) d^3p = \int \dots \frac{dS_F}{v_F}, \quad (74,20)$$

dove v_F è il valore della velocità sulla superficie di Fermi. L'espressione (74,20) non tiene ancora conto della sfericità della superficie; sulla sfera $dS_F = p_F^2 do$ con p_F costante.

Dopo questa trasformazione la definizione (74,17) assume la forma

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{dS'_F}{v'_F (2\pi\hbar)^3}, \quad (74,21)$$

dove \mathbf{p}_F è la quantità di moto (con direzione variabile!) sulla superficie di Fermi. Il flusso di particelle si esprime nel seguente modo:

$$\mathbf{i} = \int \frac{\mathbf{v}_F}{v_F} \varphi \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \quad (74,22)$$

e analogamente per il flusso della quantità di moto. Per il flusso di energia, invece, l'approssimazione (74,18) è insufficiente a priori: essa ridurrebbe \mathbf{q} semplicemente al trasporto convettivo dell'energia, $\varepsilon_F \mathbf{i}$, ossia al primo termine nell'espressione

$$\mathbf{q} = \varepsilon_F \mathbf{i} - \int \mathbf{v} (\varepsilon - \varepsilon_F) \varphi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varphi \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (74,23)$$

Per rendere lineare l'integrale degli urti si deve osservare che esso si annulla per la distribuzione d'equilibrio $n_0(\varepsilon)$, come funzione dell'energia reale ε ¹⁾. Perciò la linearizzazione si esegue con la sostituzione di n nella forma (74,13), (74,16). I calcoli sono simili a quelli eseguiti per il passaggio dalla (67,6) alla (67,17). Riscriviamo l'espressione tra parentesi quadre nella (74,5) nella forma

$$(1-n)(1-n_1)(1-n')(1-n'_1) \left[\frac{n'}{1-n'} \frac{n'_1}{1-n'_1} - \frac{n}{1-n} \frac{n_1}{1-n_1} \right]$$

e osserviamo che

$$\delta \frac{n}{1-n} = \frac{n_0}{1-n_0} \frac{\varphi}{T}.$$

Come risultato otteniamo

$$\begin{aligned} \text{St } n \equiv I(\varphi) &= \frac{1}{T} \int w n_0 n_{01} (1-n'_0) (1-n'_{01}) \times \\ &\times (\varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1) \delta(\varepsilon' + \varepsilon'_1 - \varepsilon - \varepsilon_1) \frac{d^3p_1 d^3p'}{(2\pi\hbar)^6}. \end{aligned} \quad (74,24)$$

¹⁾ Sottolineiamo il carattere generale di questa osservazione, che si riferisce a qualsiasi integrale degli urti con la partecipazione delle quasi-particelle di Fermi e non soltanto all'integrale (74,5).

Sottolineiamo che la perturbazione cercata (nel risolvere l'equazione cinetica) della funzione di distribuzione entra nell'integrale degli urti sotto forma della stessa $\tilde{\delta n}$, che figura nelle espressioni dei flussi (74,14). Se al primo membro dell'equazione cinetica (74,4) in generale si possono trascurare i termini con δn (come nei problemi del calcolo dei coefficienti di conducibilità termica e di viscosità; si veda il § 75), allora la funzione d'interazione delle quasi-particelle $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ non figura in modo esplicito nel sistema di equazioni ottenuto: le equazioni con la funzione f per l'incognita δn sono le stesse che per $f \equiv 0$ e l'incognita δn . In altre parole, in questi problemi gli effetti del « liquido di Fermi » non si manifestano e formalmente i problemi sono identici a quelli del gas di Fermi.

Mostriamo che la stessa situazione si verifica anche per una categoria di casi, in cui al primo membro dell'equazione cinetica si devono conservare i termini del primo ordine in δn . Per una funzione n_0 indipendente dalle coordinate questi termini sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial \mathbf{r}} = \\ = \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Con $\tilde{\delta n}$ dalla (74,13) essi si riducono alla forma

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \tilde{\delta n}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (74,25)$$

Se si può trascurare la derivata rispetto al tempo, allora anche qui figurerà soltanto $\tilde{\delta n}$.

Queste affermazioni sono valide non soltanto per il liquido di Fermi elettricamente neutro, qui trattato, ma anche per il liquido elettronico nei metalli, che sarà studiato nel prossimo capitolo. Tenendo presente questo oggetto e per non tornare più sulla questione, facciamo qui qualche osservazione in più.

Se le quasi-particelle portano la carica elettrica $-e$, allora in presenza di campo elettromagnetico, nella derivata $\dot{\mathbf{p}} = -\partial \epsilon / \partial \mathbf{r}$ compare un termine supplementare, ossia la forza di Lorentz agente sulla carica. Corrispondentemente, a primo membro dell'equazione cinetica compare il termine

$$-e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}.$$

Di solito il campo elettrico è supposto debole, per cui nel termine $-e \mathbf{E} \partial n / \partial \mathbf{p}$ è sufficiente porre $n = n_0$. Quanto al termine con il campo magnetico, esso si annulla identicamente per una funzione

$n_0(\varepsilon)$ dipendente unicamente da ε . Ma se il campo è forte, allora può essere necessaria la conservazione anche dei termini del primo ordine in δn . Questi termini sono i seguenti:

$$-\frac{e}{c} [\mathbf{vB}] \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B} \right] \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} =$$

$$= -\frac{e}{c} [\mathbf{vB}] \left\{ \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\}$$

(dove $\mathbf{v} = \partial \varepsilon_0 / \partial \mathbf{p}$). Nell'espressione tra parentesi graffe si può introdurre il fattore $\partial n_0 / \partial \varepsilon$, dipendente unicamente da ε , sotto il segno $\partial / \partial \mathbf{p}$ (la sua derivata è diretta lungo \mathbf{v} e dà zero moltiplicandola per $[\mathbf{vB}]$). Come risultato questi termini assumono la forma

$$-\frac{e}{c} [\mathbf{vB}] \frac{\partial \tilde{\delta n}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (74,26)$$

che contiene di nuovo soltanto $\tilde{\delta n}$.

§ 75. Conducibilità termica e viscosità del liquido di Fermi

La dipendenza dalla temperatura dei coefficienti di viscosità e di conducibilità termica del liquido di Fermi può essere stabilita già con semplici considerazioni qualitative (*I. Ja. Pomerančuk*, 1950).

Secondo la formula elementare della cinetica dei gas (8,11), il coefficiente di viscosità è $\eta \sim m \bar{N} \bar{v} l$, dove m è la massa delle particelle, N la densità del loro numero, \bar{v} la velocità termica media e l la lunghezza del cammino libero. In questo caso da particelle fungono le quasi-particelle, ma, poiché i numeri delle une e delle altre coincidono, il prodotto mN è una grandezza indipendente dalla temperatura, ossia la densità del liquido ¹⁾. La velocità $\bar{v} \sim v_F$, dove v_F è la velocità indipendente dalla temperatura sulla superficie di Fermi. La lunghezza del cammino libero è $l \sim v_F \tau$, dove τ è il tempo tra gli urti delle quasi-particelle. Quest'ultimo varia con la temperatura come T^{-2} (si veda IX, § 1) in modo che anche la viscosità

$$\eta \sim T^{-2}. \quad (75,1)$$

Il coefficiente di conducibilità termica è valutato mediante la formula (7,10): $\kappa \sim c \bar{N} \bar{v} l$, dove c è il calore specifico (riferito a una sola particella). Per il liquido di Fermi $c \sim T$ e perciò

$$\kappa \sim T^{-1}. \quad (75,2)$$

¹⁾ Poiché stiamo cercando la legge limite della funzione $\eta(T)$ alle basse temperature, allora per tutte le grandezze, che per $T \rightarrow 0$ tendono a un limite finito, si sottintende ovviamente proprio questo limite.

Per una definizione precisa di η e κ si deve ricorrere all'equazione cinetica. Indichiamo l'andamento dei calcoli sull'esempio della conducibilità termica.

La trasformazione del primo membro dell'equazione (74,4) è analoga a quella realizzata al § 7 per il problema della conducibilità termica di un gas classico.

Supponiamo che lungo il liquido esista un gradiente della temperatura e che, inoltre, il liquido sia, dal punto di vista macroscopico, fermo. In virtù dell'ultima condizione la pressione è costante e la distribuzione della temperatura stazionaria. A primo membro dell'equazione (74,4) sostituiamo a n e ε le loro espressioni d'equilibrio locale, con la temperatura variabile lungo il liquido. Allora $\partial\varepsilon/\partial r = 0$ e resta il solo termine $v \partial n_0/\partial r$ (omettiamo l'indice 0 in ε e v). La funzione n contiene solo la combinazione $(\varepsilon - \mu)/T$ e, poiché cerchiamo solo le leggi limite (per $T \rightarrow 0$), il potenziale chimico $\mu(T)$ si può porre uguale al suo valore per $T = 0$ (coincidente con l'energia di frontiera ε_F). Allora

$$v \frac{\partial n_0}{\partial r} = \frac{\partial n_0}{\partial T} (v \nabla T) = \frac{n_0 (1 - n_0)}{T} \frac{\varepsilon - \mu}{T} v \nabla T$$

e l'equazione cinetica assume la forma

$$n_0 (1 - n_0) \frac{\varepsilon - \mu}{T^2} v \nabla T = I(\varphi) \quad (75,3)$$

con $I(\varphi)$ dalla (74,24). Ma alla soluzione di questa equazione deve essere imposta una condizione ulteriore, che esprime l'assenza di trasporto macroscopico di massa, cioè

$$\int v \varphi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \quad (75,4)$$

In virtù di questa condizione nel flusso d'energia (74,23) resta solo il secondo termine.

Come abbiamo già detto al paragrafo precedente, il sistema di equazioni (75,3-4) non contiene esplicitamente la funzione di interazione delle quasi-particelle, in modo che il problema della conducibilità termica del liquido di Fermi (così come il problema della viscosità) coincide formalmente con lo stesso problema per il gas di Fermi.

In tutti gli integrali il ruolo decisivo spetta alla regione di smusamento della distribuzione di Fermi, nella quale $\varepsilon - \mu \sim T$ e le quantità di moto delle quasi-particelle sono vicine al raggio p_F della sfera di Fermi. In questa regione $\varepsilon - \mu = v_F (p - p_F)$. Laddove le quantità di moto non figurano sotto forma della differenza $p - p_F$, si può porre $p = p_F$ e ovunque si può porre la velocità uguale a v_F . In particolare, ciò si può fare nella funzione w , che diventa funzione solo degli angoli che definiscono l'orientazione relativa dei vettori p , p_1, p', p_1' . Per p e p_1 dati la conservazione della quantità di moto fissa

l'angolo formato dai vettori \mathbf{p}' e $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'$; l'integrazione rispetto a questo angolo elimina la funzione delta nell'integrale degli urti. Dopo questa operazione resta da integrare rispetto ai valori assoluti p_1 e p' (oltre alle integrazioni rispetto alle altre variabili angolari). Sostituiamo l'integrazione rispetto ai valori assoluti con quella rispetto a $T^2 du, du'$, dove $u = (\epsilon - \mu)/T = v_F (p - p_F)/T$ sono le variabili dalle quali dipendono le funzioni di distribuzione n_0 ; in forza della convergenza rapida, queste integrazioni si possono estendere da $-\infty$ a ∞ . Come risultato troviamo che tutto l'integrale $I(\varphi)$ è proporzionale a T e la soluzione dell'equazione (75,3) avrà la forma

$$\varphi = -T^{-2}g(u)\mathbf{v}\nabla T.$$

Dopo la sostituzione di questa funzione nella (74,23) e l'integrazione rispetto alle direzioni \mathbf{v} il flusso di calore assume la forma $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, dove

$$\kappa = \frac{8\pi v_F p_F^2}{3T} \int_{-\infty}^{\infty} u g(u) \left| \frac{\partial n_0}{\partial u} \right| du.$$

Di qui si vede nuovamente che $\kappa \propto T^{-1}$.

Le semplificazioni suindicate dell'integrale degli urti sono sufficienti, affinché l'equazione cinetica (e anche il problema della viscosità) abbia soluzione esatta. Come risultato otteniamo per i coefficienti κ e η formule, che li esprimono in funzione dei parametri p_F e v_F e mediante il valore medio della funzione w , calcolato in modo definito, rispetto alle direzioni ¹⁾.

§ 76. Assorbimento del suono nel liquido di Fermi ²⁾

Ricordiamo (si veda IX, § 4) che il carattere delle onde che si propagano nel liquido di Fermi dipende sostanzialmente dalla grandezza del prodotto $\omega\tau$, dove τ è la durata del cammino libero.

Per $\omega\tau \ll 1$ abbiamo a che fare con le onde sonore idrodinamiche ordinarie. La dipendenza dalla frequenza e dalla temperatura del coefficiente γ di assorbimento (per unità di percorso) si può trovare mediante la nota formula $\gamma \sim \omega^2 \eta / \rho u^3$, dove η è il coefficiente di viscosità, ρ la densità del liquido e u la velocità del suono (si veda VI, § 77). Poiché nel liquido di Fermi $\eta \propto T^{-2}$, allora

$$\gamma \propto \omega^2 / T^2. \quad (76,1)$$

Questo risultato si può ottenere in modo più formale, osservando che l'assorbimento è descritto dal primo termine correttivo, rispetto al

¹⁾ Si veda G. A. Brooker, J. Sykes, Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 279.

²⁾ I risultati di questo paragrafo appartengono a L. D. Landau (1957).

piccolo parametro, nella legge di dispersione del suono:

$$k = \frac{\omega}{u} (1 + i\alpha\omega\tau) \quad (76,2)$$

(α è una costante). La parte immaginaria di questa espressione (per una frequenza reale) dà γ ; poiché $\tau \sim T^{-2}$, ritorniamo alla (76,1).

Per $\omega\tau \sim 1$ l'assorbimento diventa così forte da rendere impossibile la propagazione delle onde sonore.

Per $\omega\tau \gg 1$ è possibile di nuovo la propagazione di onde, che si smorzano debolmente, il cosiddetto *suono nullo*. Il suo assorbimento è descritto dal termine correttivo nella legge della dispersione, ma questa volta rispetto al piccolo parametro $1/i\omega\tau$:

$$k = \frac{\omega}{u_0} \left(1 + \frac{i\alpha}{\omega\tau} \right) \quad (76,3)$$

(u_0 è la velocità di propagazione del suono nullo). Il coefficiente di questo assorbimento è proporzionale, quindi, alla frequenza degli urti: $\gamma \sim 1/\tau$. Quest'ultima, a sua volta, è proporzionale al quadrato della larghezza della regione di affievolimento della distribuzione delle quasi-particelle. Per $\hbar\omega \ll T$ questa larghezza è definita dalla temperatura, in modo che $1/\tau \sim T^2$ e il coefficiente di assorbimento

$$\gamma = aT^2, \quad T \gg \hbar\omega \gg \hbar/\tau. \quad (76,4)$$

Se, invece, $\hbar\omega \gg T$ (ma al tempo stesso $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ come condizione necessaria di applicabilità di tutta la teoria), allora la distribuzione è smussata in una regione di larghezza $\sim \hbar\omega$. In questo caso l'assorbimento del suono nullo vale

$$\gamma = b\omega^2, \quad \hbar\omega \gg T. \quad (76,5)$$

A questo caso si riferisce, in particolare, il suono nullo di tutte le frequenze per $T = 0$. Più avanti verrà mostrato che le costanti a e b nelle formule (76,4-5) sono legate tra loro.

La differenza nel carattere di assorbimento del suono ordinario e nullo è dovuta alla loro natura fisica. Nell'onda del suono normale in ogni elemento di volume piccolo (rispetto alla lunghezza d'onda) la distribuzione delle quasi-particelle in prima approssimazione corrisponde all'equilibrio per temperatura e velocità locali del liquido date. In questa approssimazione non esiste dissipazione e l'assorbimento del suono si verifica soltanto se si tiene conto dell'influenza dei gradienti di temperatura e di velocità sulla distribuzione delle quasi-particelle. Per quanto riguarda l'onda del suono nullo, le oscillazioni già di per sé implicano la mancanza di equilibrio della funzione di distribuzione in ogni elemento di volume e l'inclusione degli urti conduce all'assorbimento del suono.

In accordo con le rappresentazioni fondamentali della teoria del liquido di Fermi normale, si può considerare una quasi-particella

in esso, in un senso noto, come una particella posta nel campo auto-compatibile delle particelle circostanti. In un'onda del suono nullo questo campo è periodico nel tempo e nello spazio. Secondo le regole generali della meccanica quantistica, l'urto tra due quasi-particelle in questo campo è accompagnato dalla variazione della loro energia e della quantità di moto totali di $\hbar\omega$ e $\hbar\mathbf{k}$, rispettivamente; si può dire che in seguito all'urto si produce l'emissione o l'assorbimento di un « quanto di suono nullo » ¹⁾. L'effetto totale di questi urti implica la diminuzione del numero generale di quanti sonori; il coefficiente di assorbimento del suono è proporzionale alla velocità di tale diminuzione.

In questa impostazione del problema, il coefficiente di assorbimento del suono nullo è dato da un'espressione della forma

$$\gamma = \int W \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \hbar\omega) \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \times \\ \times \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2}{(2\pi\hbar)^{12}}. \quad (76,6)$$

Nell'espressione integranda si sono scritte in forma esplicita le funzioni delta, che garantiscono la conservazione dell'energia e della quantità di moto in seguito agli urti. Il primo termine tra parentesi graffe corrisponde agli urti $p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2$, accompagnati dall'assorbimento di un quanto, e il secondo termine agli urti $p'_1, p'_2 \rightarrow p_1, p_2$ accompagnati dall'emissione di un quanto. La funzione W , legata alla probabilità di urti « radioattivi », è definita dalle proprietà dell'onda del suono nullo; si può considerare quest'onda stessa come propagantesi per $T = 0$ (si veda IX, § 4) e allora W è indipendente dalla temperatura ²⁾.

Tuttavia, non c'è bisogno di conoscere la funzione W , se ci si propone unicamente di esprimere il coefficiente di assorbimento in funzione del suo valore nel caso limite $\hbar\omega \ll T$. A questo scopo osserviamo che nell'integrale (76,6) sono importanti i valori delle energie delle quasi-particelle, solo nella regione di affievolimento della distribuzione di Fermi. In questa regione variano molto nell'espressione integranda solo i fattori che contengono le funzioni $n(\epsilon)$. Inoltre, si deve tener conto che gli integrali angolari nella (76,6) praticamente non variano passando dalla regione $\hbar\omega \ll T$ a quella $\hbar\omega \gg T$. Ciò

¹⁾ Quanto all'emissione (o all'assorbimento) del « quanto di suono nullo » da parte di una sola quasi-particella, ciò è impossibile in quanto la velocità del suono nullo supera la velocità di Fermi v_F .

²⁾ A scanso di equivoci, sottolineiamo che la funzione W non coincide con la funzione w nell'integrale degli urti (74,5).

premesso, sarà sufficiente calcolare l'integrale

$$J = \int \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon'_1 d\varepsilon'_2, \quad (76,7)$$

esteso solo alle energie. Quanto al coefficiente di proporzionalità tra γ e J , esso dipende soltanto da ω e non da T , in modo che lo si potrà definire in base al valore limite di γ per $\hbar\omega/T \ll 1$.

È ovvio che nell'integrale (76,7) si può trascurare una piccola alterazione della funzione di distribuzione nell'onda, cioè porre

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}.$$

Introducendo le notazioni

$$x = \frac{\varepsilon - \mu}{T}, \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{T},$$

otteniamo

$$J = T^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\xi}) \delta(x'_1 + x'_2 - x_1 - x_2 - \xi) dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x'_1})(1 + e^{-x'_2})}.$$

Poiché l'integrale è rapidamente convergente, la regione d'integrazione può essere estesa da $-\infty$ a ∞ .

Per realizzare l'integrazione passiamo alle variabili y_1, y_2, u_1, u_2 , dove $y = x - x', u = e^x$. L'integrazione rispetto a u_1 e u_2 è elementare e dà

$$T^{-3}J = (1 - e^{-\xi}) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi) du_1 du_2 dy_1 dy_2}{(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_1 + e^{y_1})(u_2 + e^{y_2})} = \\ = (1 - e^{-\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1 + y_2 + \xi) dy_1 dy_2}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} y (\xi + y) \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1} \right\} dy.$$

Per calcolare la differenza così ottenuta tra due integrali divergenti, introduciamo preliminarmente il limite inferiore finito $-\Lambda$ e scriviamo

$$T^{-3}J = \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y (\xi + y) dy}{e^y - 1} - \int_{-\Lambda + \xi}^{\infty} \frac{y (y - \xi) dy}{e^y - 1} = \\ = 2\xi \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} - \int_{-\Lambda + \xi}^{-\Lambda} \frac{y (y - \xi) dy}{e^y - 1}.$$

In quanto ci proponiamo di passare al limite per $\Lambda \rightarrow \infty$, nel secondo degli integrali che qui figurano trascuriamo e^y al denominatore. Il primo integrale, invece, lo riscriviamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y \, dy}{e^y - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{y \, dy}{e^y - 1} + \int_{-\Lambda}^0 \frac{y \, dy}{e^y - 1} = \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_{-\Lambda}^0 \left(\frac{y}{1 - e^{-y}} - y \right) dy = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\Lambda} \frac{y \, dy}{e^y - 1} + \frac{\Lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Dopo aver semplificato ed eseguito il passaggio al limite per $\Lambda \rightarrow \infty$, otteniamo infine

$$J = \frac{2\pi^2 \xi T^3}{3} \left(1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2} \right).$$

Il coefficiente di proporzionalità tra γ e J è definito, come è stato già detto, dalla condizione che per $\xi \ll 1$ si abbia $\gamma = aT^2$ dalla (76,4). Troviamo così

$$\gamma = a \left[T^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi} \right)^2 \right]. \quad (76,8)$$

In particolare, nel limite delle grandi frequenze, $\hbar\omega \gg T$ e se ne deduce che

$$\gamma = \frac{a}{4\pi^2} (\hbar\omega)^2, \quad (76,9)$$

il che stabilisce un legame tra i coefficienti nelle (76,4) e (76,5).

§ 77. Equazione cinetica per le quasi-particelle nel liquido di Bose

Se la lunghezza del cammino libero delle quasi-particelle in un liquido di Bose superfluido è piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema, il moto del liquido è descritto dalle equazioni dell'idrodinamica a due velocità di Landau (si veda VI, capitolo XVI). I termini dissipativi in queste equazioni contengono più coefficienti cinetici (un coefficiente di conducibilità termica e quattro coefficienti di viscosità). Il calcolo di questi coefficienti richiede l'esame dettagliato dei diversi processi di diffusione, la cui varietà è dovuta all'esistenza di due tipi di quasi-particelle, fononi e rotoni. Nell'elio liquido reale la situazione è resa ancora più complicata dall'instabilità della regione iniziale dello spettro fononico. Ma questi problemi non verranno qui considerati.

La lunghezza del cammino libero delle quasi-particelle cresce al diminuire della temperatura (almeno a causa della diminuzione della densità del numero di quasi-particelle). Perciò a temperature sufficientemente basse è facile che il sistema di quasi-particelle sia essenzialmente in non equilibrio. In queste condizioni le equazioni dell'i-

drodinamica a due velocità sono inapplicabili. Per di più, in generale perdono senso le nozioni di temperatura e di velocità normale v_n , che si possono definire soltanto rispetto alla distribuzione d'equilibrio delle quasi-particelle; assieme a v_n perde senso anche la divisione della densità del liquido nelle parti superfluida e normale. Quanto alla densità totale ρ e alla velocità superfluida v_s , queste nozioni conservano il loro senso, essendo sotto questo aspetto variabili meccaniche. Il sistema di equazioni completo, che descrive un liquido superfluido, deve ora essere riformato da un'equazione cinetica per la distribuzione delle quasi-particelle $n(t, r, p)$, da un'equazione di continuità per la densità ρ e da un'equazione per la velocità v_s .

L'equazione cinetica ha la forma ordinaria ¹⁾

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} = St n, \quad (77,1)$$

dove $\tilde{\varepsilon}$ è l'energia della quasi-particella, dipendente dalla velocità del moto superfluido v_s , come da un parametro; conserviamo la notazione ε per l'energia della quasi-particella nel liquido a riposo. Il legame tra ε e $\tilde{\varepsilon}$ viene precisato mediante le seguenti considerazioni.

Per definizione, $\varepsilon(p)$ è la legge di dispersione delle quasi-particelle nel sistema di riferimento K_0 , in cui $v_s = 0$. In altre parole, se esiste una sola quasi-particella l'energia del liquido (calcolata a partire dall'energia per $T = 0$) è $\varepsilon(p)$ e la sua quantità di moto coincide con quella p della quasi-particella. Passiamo, mediante una trasformazione galileiana, al sistema di riferimento fisso K , in cui la velocità superfluida vale v_s . In questo sistema l'energia e la quantità di moto della massa M sono

$$E = \varepsilon(p) + p v_s + \frac{M v_s^2}{2}, \quad P = p + M v_s. \quad (77,2)$$

Si vede di qui che nel liquido che compie un moto superfluido l'energia della quasi-particella è

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \varepsilon(p) + p v_s. \quad (77,3)$$

(cfr. le considerazioni per la deduzione della condizione di superfluidità in IX, § 23).

¹⁾ È supposta, ovviamente, soddisfatta la condizione di quasi-classicità, ossia la variazione lenta di tutte le grandezze, a distanze dell'ordine della lunghezza d'onda della quasi-particella \hbar/p .

In tal modo le derivate che figurano nell'equazione cinetica sono ¹⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s, \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{p} \mathbf{v}_s) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla \rho + (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_s.\end{aligned}\quad (77,4)$$

Nella seconda eguaglianza si è tenuto conto che l'energia ε può dipendere dalle coordinate, attraverso la variabile di densità ρ , dalla quale ε dipende come da un parametro. Si è tenuto anche conto (trasformando la derivata rispetto a $\mathbf{p} \mathbf{v}_s$) che il moto superfluido è sempre potenziale,

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0. \quad (77,5)$$

L'equazione di continuità per la densità si scrive

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i} = 0, \quad (77,6)$$

dove \mathbf{i} , per definizione, è la quantità di moto dell'unità di volume del liquido. L'espressione per \mathbf{i} si può ricavare direttamente dalla seconda formula (77,2), sommandola su tutte le quasi-particelle in questo volume:

$$\mathbf{i} = \rho \mathbf{v}_s + \langle \mathbf{p} \rangle. \quad (77,7)$$

Qui e più avanti in questo paragrafo le parentesi angolari significano integrazione rispetto alla distribuzione delle quantità di moto:

$$\langle \dots \rangle = \int \dots n \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Resta da trovare l'equazione per la velocità superfluida. A tal fine partiamo dalla legge di conservazione della quantità di moto espressa dall'equazione

$$\frac{\partial i_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (77,8)$$

dove \mathbf{i} è definito dalla formula (77,7) e $\Pi_{\alpha\beta}$ è il tensore del flusso della quantità di moto.

¹⁾ A rigore, la formula (77,2) è stata dedotta per un flusso superfluido omogeneo, $\mathbf{v}_s = \text{costante}$. In un flusso disomogeneo nell'energia potrebbero comparire altri termini, con le derivate spaziali rispetto a \mathbf{v}_s . Tuttavia, supponendo lenta la variazione di \mathbf{v}_s , questi termini condurrebbero nell'equazione cinetica a correzioni infinitesime di ordine superiore.

Sia $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ il valore di questo tensore nel sistema di riferimento K_0 . Passando con una trasformazione al sistema K , otteniamo ¹⁾

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta} &= \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha} i_{\beta}^{(0)} + v_{s\beta} i_{\alpha}^{(0)} = \\ &= \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha} \langle p_{\beta} \rangle + v_{s\beta} \langle p_{\alpha} \rangle\end{aligned}\quad (77,9)$$

($i^{(0)} = \langle p \rangle$) è la quantità di moto dell'unità di volume del liquido nel sistema K_0 . Con ciò si determina la dipendenza del tensore $\Pi_{\alpha\beta}$ dalla velocità v_s .

Per la trasformazione ulteriore dell'equazione (77,8) torniamo all'equazione cinetica (77,1), moltiplichiamola per p_{α} e integriamo rispetto a $d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Dato che la quantità di moto totale delle quasi-particelle si conserva in seguito agli urti, il secondo membro dell'equazione si annulla. Quanto all'integrale a primo membro dell'equazione, lo trasformiamo allo stesso modo del § 74 (per la deduzione della (74,10)) e troviamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p_{\alpha} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left\langle p_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{\beta}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{\alpha}} \right\rangle = 0. \quad (77,10)$$

Poniamo ora nella (77,8) le espressioni (77,7) e (77,9) per i e $\Pi_{\alpha\beta}$ e in seguito escludiamo $\partial\rho/\partial t$ e $\partial\langle p \rangle/\partial t$ mediante le formule (77,6) e (77,10). Come risultato otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{s\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{v_s^2}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_{\beta}} - \\ - \frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right\rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left\langle p_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{\beta}} \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Dalla condizione $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ (della quale si è già tenuto conto nel secondo termine) deriva che la somma dei tre ultimi termini deve rappresentare il gradiente di una funzione. Inoltre, il tensore $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$ in assenza di quasi-particelle deve valere $P_0 \delta_{\alpha\beta}$, dove P_0 (ρ) è la pressione del liquido per $T = 0$. Da queste condizioni segue univocamente la seguente forma del tensore $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \left\langle p_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{\beta}} \right\rangle + \delta_{\alpha\beta} \left[P_0 + \rho \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right\rangle \right]. \quad (77,11)$$

L'equazione per \mathbf{v}_s ora assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left[\frac{v_s^2}{2} + \frac{\mu_0}{m} + \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right\rangle \right] = 0, \quad (77,12)$$

¹⁾ È facile trovare la formula della trasformazione galileiana per $\Pi_{\alpha\beta}$, considerando il sistema classico di particelle, per il quale $\Pi_{\alpha\beta} = \sum p_{\alpha} v_{\beta} = = \sum m v_{\alpha} v_{\beta}$ dove la sommatoria è estesa a tutte le particelle nell'unità di volume.

dove μ_0 è il potenziale chimico del liquido (per $T = 0$) legato alla pressione P_0 dalla relazione termodinamica $d\mu_0 = m dP_0/\rho$ (m è la massa della particella del liquido, m/ρ il volume molecolare).

Le equazioni (77,1), (77,6), (77,12) costituiscono il sistema completo di equazioni, che descrive il liquido superfluido nello stato di non equilibrio (I. M. Chalatnikov, 1952).

Per completare il quadro soffermiamoci ancora sulla legge di conservazione dell'energia. Essa è espressa da un'equazione della forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad (77,13)$$

dove \mathbf{q} è la densità del flusso d'energia del liquido. Secondo la (77,2),

$$E = E_0(\rho) + \langle \varepsilon \rangle + \mathbf{v}_s \cdot \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{\rho v_s^2}{2}, \quad (77,14)$$

dove $E_0(\rho)$ è l'energia per $T = 0$, legata al potenziale chimico dalla relazione $dE_0 = \mu_0 d\rho/m$. Derivando rispetto al tempo l'espressione (77,14) e usando le equazioni già trovate per tutte le grandezze, si può trovare la densità del flusso di energia. Omettendo i calcoli diamo il risultato definitivo:

$$\mathbf{q} = \langle \langle \mathbf{p} \rangle + \rho \mathbf{v}_s \rangle \left[\frac{\mu_0}{m} + \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right\rangle + \frac{v_s^2}{2} \right] + \left\langle \left(\varepsilon + \rho \mathbf{v}_s \cdot \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}_s \right) \right\rangle. \quad (77,15)$$

La funzione di distribuzione d'equilibrio delle quasi-particelle, nel sistema di riferimento in cui il « gas di quasi-particelle » nel suo insieme si trova a riposo (cioè la velocità normale $\mathbf{v}_n = 0$), è la distribuzione di Bose ordinaria con l'energia della quasi-particella $\tilde{\varepsilon}$ data dall'espressione (77,3). Quanto alla distribuzione nel sistema di riferimento, in cui la velocità normale è non nulla, essa si ottiene con la sostituzione di $\tilde{\varepsilon}$ con $\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{p}$. In tal modo, la distribuzione d'equilibrio delle quasi-particelle in presenza di ambedue i moti è

$$n(\mathbf{p}) = \left[\exp \frac{\varepsilon + (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{p}}{T} - 1 \right]^{-1}. \quad (77,16)$$

Calcolando i valori medi delle equazioni dedotte sopra rispetto a questa distribuzione, si può ottenere un sistema di equazioni idrodinamiche a due velocità (in questa approssimazione senza termini dissipativi); non ci soffermiamo qui su questa deduzione.

PROBLEMA

Determinare il coefficiente di assorbimento del suono nel liquido di Bose per frequenze $\omega \gg v$, dove v è la frequenza degli urti tra le quasi-particelle. La temperatura viene supposta così bassa che praticamente le quasi-particelle sono fononi (A. F. Andreev, I. M. Chalatnikov, 1963).

Soluzione. Nelle condizioni considerate si può trascurare l'integrale degli urti nell'equazione (77,1). Poniamo $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $n = n_0 + \delta n$ (dove $\delta\rho$ e δn sono piccole correzioni alla densità d'equilibrio del liquido e alla funzione di distribuzione dei fononi) e linearizziamo le equazioni (77,1), (77,6) e (77,12) rispetto alle piccole grandezze $\delta\rho$, δn , v_s . Supponendo tutte queste grandezze proporzionali a $\exp(-i\omega t + ikr)$ otteniamo le equazioni

$$(kv - \omega) \delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} vk \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta\rho + p v_s \right), \quad (1)$$

$$\omega \delta\rho - kv_s \rho = \int k p \delta n \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2)$$

$$\omega v_s - k u_0^2 \frac{\delta\rho}{\rho} = k \int \left\{ n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \delta\rho + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta n \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3)$$

Qui abbiamo usato le relazioni termodinamiche

$$d \frac{\mu_0}{m} = \frac{dP_0}{\rho} = \frac{u_0^2}{\rho} d\rho,$$

dove u_0 è la velocità del suono per $T = 0$; l'indice 0 in ρ e n sarà omissso qui e più avanti.

Essendo piccolo il numero di fononi alle temperature prossime allo zero, le espressioni a secondo membro delle equazioni (1-3) sono piccole correzioni. Omettendo queste ultime deduciamo dalle equazioni (2) e (3)

$$\omega = u_0 k, \quad v_s = u_0 \frac{\delta\rho}{\rho} \frac{k}{k}. \quad (4)$$

Nell'approssimazione successiva sostituiamo la (4) nel secondo membro dell'equazione (1) e troviamo

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{v \cos \theta}{v \cos \theta - \omega/k} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{p u_0}{\rho} \cos \theta \right) \delta\rho \quad (5)$$

(θ è l'angolo tra \mathbf{p} e \mathbf{k}). Scriviamo la legge di dispersione dei fononi nella forma

$$\varepsilon(p) = u_0 p (1 + \alpha p^2), \quad v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = u_0 (1 + 3\alpha p^2)$$

includendo il termine dello sviluppo successivo a quello lineare (per l'elio liquido alle pressioni normali $\alpha > 0$, il che significa l'instabilità dei fononi rispetto alla disintegrazione spontanea).

L'esistenza nella (5) del denominatore « di risonanza » implica (si veda più avanti) la comparsa per integrazione di un grande fattore logaritmico. Limitandoci alla precisione « logaritmica », trascuriamo a secondo membro dell'equazione (3) il termine con $\delta\rho$ che non contiene questo denominatore. Escludendo in seguito v_s dalle equazioni (2) e (3), otteniamo infine la seguente equazione di dispersione:

$$\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 = A \frac{u_0^2}{\rho} \int \frac{p^2}{\cos \theta - 1 + 3\alpha p^2 - i0} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6)$$

dove

$$A = \left(1 + \frac{\rho}{u_0} \frac{du_0}{d\rho} \right)^2.$$

La parte immaginaria dell'integrale rispetto a $\cos \theta$ è definita dall'aggramento del polo (il polo si trova nella regione d'integrazione se $\alpha > 0$). La parte reale,

invece, si calcola con precisione logaritmica, tagliando l'integrazione in basso per $1 - \cos \theta \sim \alpha p^2 \sim \alpha T^2/u_0^2$ e in alto per $1 - \cos \theta \sim 1$. Scriviamo il primo membro dell'equazione (6) nella forma

$$2u_0 \left(\delta u - i \frac{u_0}{\omega} \gamma \right),$$

dove γ è il decremento dello smorzamento e δu la correzione alla velocità del suono ($u = u_0 + \delta u$). Il calcolo dell'integrale dà

$$\delta u = \frac{3\rho_n u_0 A}{4\rho} \ln \frac{u_0^2}{\alpha T^2}, \quad \gamma = \frac{3\pi\omega\rho_n A}{4\rho}, \quad (7)$$

dove $\rho_n = 2\pi^2 T^4 / 45 \hbar^3 u_0^5$ è la parte fononica della densità normale del liquido. La dipendenza di γ dalla frequenza e dalla temperatura coincide, naturalmente, con quella stabilita al § 73.

METALLI

§ 78. Resistenza residua

Le proprietà cinetiche dei metalli sono di gran lunga più complicate che nei dielettrici, già per l'esistenza in essi di quasi-particelle di specie diverse: elettroni di conduttività e fononi.

È ovvio che sono gli elettroni di conduttività a trasportare la carica elettrica. Il trasporto di calore, invece, è realizzato sia dagli elettroni che dai fononi. Tuttavia, nei metalli sufficientemente puri sono in pratica gli elettroni a svolgere il ruolo principale nella conduzione termica, soprattutto per il fatto che la loro velocità (la velocità v_F sulla superficie di Fermi) è grande rispetto a quella dei fononi (la velocità del suono). Inoltre, alle basse temperature il calore specifico elettronico è notevolmente superiore a quello fononico.

Gli elettroni di conduttività sono soggetti ad urti di tipi diversi: urti reciproci, con fononi, con atomi di impurità (e con altri difetti del reticolo). La frequenza degli urti dei primi due tipi decresce al diminuire della temperatura. Perciò a temperature sufficientemente basse la diffusione degli elettroni sulle impurità ha un ruolo decisivo nei fenomeni cinetici. Questa regione di temperature si chiama regione della *resistenza residua* e da essa iniziamo lo studio della fisica cinetica dei metalli.

Il legame tra la corrente elettrica j e il flusso di dissipazione d'energia q' , in un metallo con campo elettrico E e gradiente della temperatura, viene scritto sotto forma delle relazioni (44,12-13):

$$E + \nabla \frac{\mu}{e} = \frac{1}{\sigma} j + \alpha \nabla T, \quad (78,1)$$

$$q' = q - \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) j = \alpha T j - \kappa \nabla T. \quad (78,2)$$

Queste grandezze scritte così si riferiscono ai cristalli a simmetria cubica, il che per semplicità verrà supposto ovunque più avanti. Per i cristalli a simmetria non cubica i coefficienti σ , κ , α vanno sostituiti da tensori di secondo rango. Sarà più comodo usare la relazione (78,2) esprimendo j in funzione di E ottenuto dalla prima uguaglianza:

$$q' = \sigma \alpha T \left(E + \nabla \frac{\mu}{e} \right) - (\kappa + T \sigma \alpha^2) \nabla T. \quad (78,3)$$

Quanto detto al § 74 a proposito dell'equazione cinetica per il liquido di Fermi resta valido, in misura notevole, anche per il liquido elettronico nel metallo. Ora la quantità di moto delle quasi-particelle è la loro quasi-quantità di moto e la superficie di Fermi, in generale, ha una forma complicata propria di ogni metallo concreto.

I coefficienti cinetici del metallo si calcolano in teoria mediante l'equazione cinetica linearizzata

$$-eE\mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} + \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} = I(\delta\tilde{n}),$$

dove $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ e l'integrale degli urti è linearizzato rispetto alla funzione piccola cercata $\delta\tilde{n}$ definita dalla (74,13). La derivazione di n_0 rispetto a \mathbf{r} si può eseguire convenzionalmente per $\mu = \text{costante}$, in quanto il gradiente μ figurerebbe lo stesso nella combinazione $eE + \nabla\mu$, come deve essere secondo la (78,1). Allora

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

e l'equazione cinetica assume la forma

$$-\left(eE + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \nabla T\right) \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = I(\delta\tilde{n}). \quad (78,4)$$

La densità di corrente e la densità del flusso di dissipazione d'energia sono date dagli integrali

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta\tilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \mathbf{q}' = \int (\varepsilon - \mu) \mathbf{v} \delta\tilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (78,5)$$

(calcolando \mathbf{q}' come flusso dell'energia cinetica $\varepsilon - \mu$, non c'è bisogno di sottrarre da esso il trasporto convettivo dell'energia potenziale ϕ).

Una caratteristica della diffusione degli elettroni di conduttività sugli atomi di impurità è l'elasticità. Essendo grande la massa degli atomi e il loro « attaccamento » al reticolo, si può supporre invariabile l'energia dell'elettrone in seguito all'urto. Mostriamo che la sola ipotesi di diffusione elastica è sufficiente, affinché la conduttività elettrica e termica del metallo siano legate da una semplice formula.

A tal fine osserviamo che l'operatore degli urti elastici non incide sulla dipendenza della funzione $\delta\tilde{n}$ dall'energia ε ; gli urti non fanno altro che spostare le particelle lungo una superficie isoenergetica. Ciò vuol dire che qualunque fattore in $\delta\tilde{n}$, dipendente unicamente da ε , può essere portato fuori dal segno I . A sua volta, ciò consente di cercare la soluzione dell'equazione cinetica nella forma

$$\delta\tilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left(eE + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \nabla T \right) 1(\mathbf{p}), \quad (78,6)$$

dove $\mathbf{l}(\mathbf{p})$ verifica l'equazione

$$\mathbf{l}(\mathbf{l}) = -\mathbf{v}. \quad (78,7)$$

La densità di corrente calcolata secondo la distribuzione (78,6) è

$$\mathbf{j} = -e \int \left\{ e(\mathbf{E}\mathbf{l}) \mathbf{v} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} (\mathbf{l} \nabla T) \mathbf{v} \right\} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78,8)$$

Dal primo termine ricaviamo il tensore di conduttività

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2 \int v_{\alpha} l_{\beta} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78,9)$$

In un cristallo a simmetria cubica $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta}$ in modo che la conduttività è

$$\sigma = -\frac{e^2}{3} \int \mathbf{l} \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

ossia, trasformando l'integrale in base alle formule (74,18-20),

$$\sigma = -\frac{2e^2}{3} J_F, \quad J = \int \mathbf{l} \mathbf{v} \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3}. \quad (78,10)$$

L'integrazione in J_F è estesa a tutti i fogli della superficie di Fermi nei limiti di una cella elementare del reticolo inverso.

In modo analogo, dal secondo termine nella (78,8) ricaviamo, confrontandolo con la (78,1),

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T} \int \eta (\mathbf{v}\mathbf{l}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

dove si è introdotta la notazione $\eta = \varepsilon - \mu$. L'integrazione rispetto a $d^3 p$ viene sostituita con l'integrazione estesa alle superfici isoenergetiche $\eta = \text{costante}$ e con l'integrazione rispetto a η . Introducendo di nuovo la notazione J dalla (78,10) abbiamo

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T} \int J \eta \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta. \quad (78,11)$$

La funzione

$$\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{T(e^{\eta/T} + 1)(e^{-\eta/T} + 1)}$$

decresce esponenzialmente per $\eta \rightarrow \pm \infty$; perciò l'integrazione rispetto a η si può estendere da $-\infty$ a ∞ . L'integrale è definito soprattutto dalla regione $|\eta| \sim T$; la grandezza $J(\eta)$, invece, varia notevolmente solo nell'intervallo $\eta \sim \mu \gg T$. Perciò è sufficiente porre

$$J \approx J_F + \eta \frac{dJ}{d\varepsilon_F}.$$

Sostituendo nella (78,11) l'integrale del primo termine si annulla per la disparità dell'espressione integranda rispetto a η e il secondo

termine dà

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T} \frac{dJ}{d\varepsilon_F} 2 \int_0^\infty \eta^2 \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta = -\frac{8e}{3T} \frac{dJ}{d\varepsilon_F} \int_0^\infty \eta n_0 d\eta.$$

L'integrale vale

$$\int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{e^{\eta/T} + 1} = \frac{\pi^2}{12} T^2;$$

usando anche la (78,10) otteniamo

$$\alpha = -\frac{\pi^2 T}{3e} \frac{d \ln J}{d\varepsilon_F}. \quad (78,12)$$

Come ordine di grandezza $|\alpha| \sim T/e\varepsilon_F$.

Poniamo ora $E = 0$ e calcoliamo il flusso d'energia. Usando di nuovo la simmetria cubica troviamo

$$q' = \frac{2\nabla T}{3T} \int_{-\infty}^\infty J \eta^2 \frac{\partial n_0}{\partial \eta} d\eta.$$

Qui è sufficiente porre $J = J_F$ e in seguito otteniamo

$$q' = -\frac{2\pi^2}{9} T J_F \nabla T.$$

Dal confronto di questa espressione con le (78,3) e (78,10) si vede che

$$\kappa + T\sigma\alpha^2 = \frac{\pi^2\sigma T}{3e^2}.$$

La stima suindicata di α mostra che il termine $T\sigma\alpha^2$ a primo membro dell'uguaglianza è piccolo rispetto al suo secondo membro nel rapporto $(T/\varepsilon_F)^2$. Trascurandolo troviamo infine la seguente relazione tra le conduttività elettrica e termica:

$$\kappa = \frac{\pi^2 T}{3e^2} \sigma \quad (78,13)$$

ossia la *legge di Wiedemann-Franz*¹⁾.

Sottolineiamo di nuovo che nel dedurre questa relazione è stata sfruttata soltanto l'elasticità della diffusione degli elettroni di conduttività. Seguendo la deduzione è facile anche notare che l'ipotesi della simmetria cubica non faceva altro che semplificare la scrittura delle formule. Nel caso generale di cristallo a simmetria arbitraria la stessa relazione (78,13) esiste tra i tensori $\kappa_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$

¹⁾ Una formula del tipo (78,13) è stata dedotta qualitativamente da P. Drude (1900), che è stato il primo a formulare la rappresentazione degli elettroni di conduttività come partecipanti all'equilibrio termico del metallo. La deduzione quantitativa nella statistica classica è stata fornita da H. A. Lorentz (1905) e nella statistica di Fermi da A. Sommerfeld (1928).

Per definire la dipendenza dalla temperatura di ciascuno dei coefficienti κ e σ separatamente, bisogna scrivere l'integrale degli urti. Per gli urti con gli atomi di impurità esso ha una forma completamente analoga all'integrale (70,3) per la diffusione dei fononi sulle impurità:

$$\text{St } n = N_{\text{imp}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [n'(1-n) - n(1-n')] \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{2d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78,14)$$

I fattori $1 - n$ o $1 - n'$ tengono conto del principio di Pauli, vale a dire che la transizione può avvenire soltanto in stati liberi; quanto ai fattori n' o n , essi indicano che la diffusione può aver luogo soltanto da uno stato occupato. Così come nella (70,3), nell'integrale (78,14) si è supposto che gli atomi di impurità siano disposti caoticamente e che la distanza media tra essi sia molto superiore all'ampiezza della diffusione; allora atomi distinti diffondono in modo indipendente. Nell'integrale (78,14) è già sfruttata l'uguaglianza $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. Non si può applicare, in generale, alla diffusione degli elettroni di conduttività sugli atomi di impurità l'approssimazione di Born. L'uguaglianza scritta si può motivare con le considerazioni usate per la deduzione del principio dell'equilibrio dettagliato nella forma (2,8). In questo caso si suppone, tuttavia, che le posizioni occupate dagli atomi di impurità nel reticolo del metallo godano di simmetria, che consente l'inversione.

La linearizzazione dell'integrale degli urti si riduce alla sostituzione di $n'(1-n) - n(1-n') = n' - n$ con $\tilde{\delta}n' - \tilde{\delta}n$. Allora l'equazione (78,7) assume la forma

$$N_{\text{imp}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (l' - l) \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{2d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} = -v. \quad (78,15)$$

Questa equazione non contiene la temperatura. Perciò non dipenderà dalla temperatura neanche la sua soluzione $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ e, secondo la (78,10), la conduttività σ . Quindi, a temperature sufficientemente basse, quando la diffusione sulle impurità rappresenta il meccanismo fondamentale della resistenza elettrica, quest'ultima tende a un valore costante (residuo). Ciò premesso, la conducibilità termica κ in questa regione è proporzionale a $T^{\frac{1}{2}}$.

Per una stima quantitativa grossolana della resistenza residua si può ricorrere alla formula elementare (43,7), ponendovi (per gli elettroni nel metallo) $p \sim p_F$:

$$\sigma \sim e^2 N l / p_F, \quad (78,16)$$

¹⁾ In queste considerazioni si è supposto che l'equazione (78,15) non contenga grandezze variabili rapidamente nell'intorno di $\varepsilon = \varepsilon_F$, il che consente di sostituire nella (78,9) l con l_F . Questo si verifica effettivamente per la diffusione su impurità ordinarie, ma non su atomi paramagnetici.

dove N è la densità degli elettroni. Per diffusione sulle impurità la lunghezza del cammino libero $l \sim 1/N_{\text{imp}} \sigma_i$, dove σ_i è la sezione di trasporto della diffusione. Perciò la resistenza residua $\rho_{\text{res}} = 1/\sigma$,

$$\rho_{\text{res}} \sim \frac{N_{\text{imp}} \sigma_i p_F}{e^2 N}. \quad (78,17)$$

A quanto detto in questo paragrafo bisogna aggiungere ancora la seguente osservazione. La condizione generale di applicabilità dell'equazione cinetica al liquido di Fermi richiede che l'indeterminazione quantistica dell'energia dell'elettrone sia piccola rispetto alla larghezza ($\sim T$) della zona di smussamento termico della distribuzione di Fermi. La detta indeterminazione è $\sim \hbar/\tau$, dove $\tau \sim l/v_F$ è il tempo di durata del cammino libero. Per la diffusione sulle impurità $l \sim 1/N_{\text{imp}} \sigma_i$, l'indeterminazione \hbar/τ non dipende dalla temperatura e smussa così la frontiera di Fermi anche per $T = 0$. A prima vista ne segue che tutto lo studio suindicato è limitato dalla condizione molto rigida

$$T \gg \hbar v_F \sigma_i N_{\text{imp}}, \quad (78,18)$$

che dipende dalla concentrazione delle impurità. In realtà, però, questa limitazione non esiste (*L. D. Landau*, 1934).

Il fatto è che, essendo fissate le posizioni degli atomi di impurità e in seguito all'elasticità della diffusione degli elettroni su questi atomi, tutto il problema del calcolo della corrente elettrica può essere formulato in via di principio come problema quantomeccanico del moto dell'elettrone in un campo esterno dato, complesso ma potenziale. Per gli stati dell'elettrone, definiti come stazionari in questo campo, l'energia non ha indeterminazione; per $T = 0$ gli elettroni riempiranno una regione di stati delimitata da una superficie di Fermi nettamente marcata, ma non nello spazio dei vettori quantità di moto, bensì nello spazio dei numeri quantici del moto in questo campo. Con questa impostazione del problema le condizioni del tipo (78,18) in generale non compaiono.

§ 79. Interazione elettrone-fonone

Nei metalli sufficientemente puri l'interazione tra elettroni di conduttività e fononi serve come meccanismo principale per stabilire l'equilibrio in una larga banda di temperature.

La condizione di possibilità dell'emissione (o dell'assorbimento) di un fonone da parte di un elettrone richiede che la velocità dell'elettrone sia superiore a quella del fonone; cfr. la conclusione analoga al § 68 per l'emissione di un fonone da parte di un fonone. Ma la velocità degli elettroni sulla superficie di Fermi di solito è grande rispetto alla velocità dei fononi, in modo che questa condizione risulta essere soddisfatta e il contributo fondamentale nell'integrale degli urti proviene esattamente dai processi « a un fonone » suindicati.

Tenendo conto di questi processi, l'integrale degli urti ha la seguente forma analoga all'integrale per il caso fonone-fonone (67,6) ¹⁾:

$$\begin{aligned} St_{e,ph} n_p = & \int w(p', k; p) \{n_{p'} (1 - n_p) N_k - n_p (1 - n_{p'}) (1 + N_k)\} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \omega_k) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} + \\ & + \int w(p'; p, k) \{n_{p'} (1 - n_p) (1 + N_k) - n_p (1 - n_{p'}) N_k\} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_p + \omega_k - \varepsilon_{p'}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (79,1) \end{aligned}$$

Il primo termine corrisponde ai processi di emissione di un fonone con quasi-quantità di moto k da parte di un elettrone con quasi-quantità di moto data p e ai processi inversi di assorbimento di un fonone k da parte di un elettrone p' con lo stabilirsi della quasi-quantità di moto p :

$$p = p' + k + b; \quad (79,2a)$$

in questi processi le transizioni avvengono tra lo stato elettronico di energia data ε_p e gli stati inferiori (rispetto all'energia). Il secondo termine corrisponde ai processi di assorbimento di un fonone da parte di un elettrone p e ai processi inversi di emissione di un fonone da parte di elettroni p' :

$$p + k = p' + b; \quad (79,2b)$$

in questi processi le transizioni avvengono tra lo stato dato e gli stati elettronici superiori. Per le stesse ragioni, come per l'emissione di un fonone da parte di un fonone al § 66, il valore b nelle uguaglianze (79,2) è definito univocamente dall'assegnazione dei valori k, p e dalla richiesta che p' si trovi nella stessa cella del reticolo inverso. I fattori presso le funzioni δ nella (79,1) esprimono la legge di conservazione dell'energia; ε_p è l'energia degli elettroni, ω_k l'energia dei fononi. Come nel capitolo VII, la funzione di distribuzione (numeri di riempimento degli stati) dei fononi è indicata con N_k e la funzione di distribuzione degli elettroni con n_p . Per brevità, non scriviamo qui gli indici che denotano il ramo dello spettro fononico (e i segni di sommatoria su questi indici). È supposto che le probabilità delle transizioni siano indipendenti dallo spin dell'elettrone, che non varia per transizione.

Analogamente si scrive l'integrale degli urti fonone-elettrone, che deve essere aggiunto all'integrale fonone-fonone a secondo membro dell'equazione cinetica per la funzione di distribuzione dei fononi:

$$\begin{aligned} St_{ph,e} N_k = & \int w(p; p', k) \{n_p (1 - n_{p'}) (1 + N_k) - n_{p'} (1 - n_p) N_k\} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_{p'} + \omega_k - \varepsilon_p) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (79,3) \end{aligned}$$

¹⁾ Nei §§ 79-83 si usa il sistema di unità in cui $\hbar = 1$.

dove $p = p' + k + b$. Questo integrale rappresenta la differenza tra il numero di fononi k emessi dagli elettroni con tutte le quasi-quantità di moto possibili p e il numero di fononi assorbiti dagli elettroni con tutti i p' possibili. Il fattore 2 calcola le due direzioni possibili dello spin dell'elettrone che emette (o assorbe).

Nel primo ordine della teoria delle perturbazioni le probabilità che figurano in questi integrali, di emissione e di assorbimento di un fonone da parte di un elettrone, sono definite dall'operatore dell'interazione elettrone-fonone, lineare rispetto agli operatori fononici

$\hat{U}_s(n)$ (66,2); la linearità significa che questi operatori sono i responsabili delle transizioni con variazione di uno solo dei numeri di riempimento degli stati fononici. Senza ripetere i ragionamenti esposti al § 66, indichiamo che nel limite della quasi-quantità di moto del fonone k , che tende a zero, la probabilità di emissione (o di assorbimento) di un fonone è proporzionale alla prima potenza di k :

$$w \propto k. \quad (79,4)$$

Secondo la proprietà generale delle probabilità di transizione nell'approssimazione di Born, le probabilità delle transizioni diretta e inversa sono uguali; perciò ¹⁾

$$w(p', k; p) = w(p; p', k). \quad (79,5)$$

Questa proprietà è già inclusa negli integrali (79,1) e (79,3).

Una semplificazione ulteriore si ottiene tenendo conto della simmetria (espressa dalla parte reale degli operatori \hat{U}_s) con la quale gli operatori di creazione e di annichilazione di fononi entrano nell'operatore dell'interazione elettrone-fonone. In virtù di questa simmetria, l'emissione di un fonone con quasi-quantità di moto k equivale all'assorbimento di un fonone con quasi-quantità di moto $-k$, tenendo anche conto che le energie dell'elettrone ε_p e $\varepsilon_{p'}$ sono vicine all'energia di Fermi ε_F . Supponiamo che p_F e p'_F siano vettori tracciati nelle direzioni p e p' e che terminino sulla superficie di Fermi. Le funzioni w siano espresse in funzione delle direzioni dei vettori p_F , p'_F e delle differenze $\eta_p = \varepsilon_p - \varepsilon_F$, $\eta_{p'} = \varepsilon_{p'} - \varepsilon_F$, che caratterizzano il grado di vicinanza delle energie dell'elettrone a ε_F . Nei confronti delle ultime variabili w è una funzione lenta, che varia sensibilmente soltanto negli intervalli $\sim \varepsilon_F \gg T$. Trascurando le grandezze $\sim \eta \sim T$, si può porre in queste funzioni $\eta_p = \eta_{p'} = 0$. Allora l'equivalenza suindicata verrà espressa dall'uguaglianza

$$w(p'_F, k; p_F) = w(p'_F; p_F, -k), \quad (79,6)$$

dove le w sono funzioni delle sole direzioni p_F e p'_F . Se ora cambiamo la notazione della variabile d'integrazione nel secondo termine del-

¹⁾ Ricordiamo che i numeri quantici degli stati iniziale (*i*) e finale (*f*) nelle notazioni delle probabilità si scrivono ovunque nell'ordine *fi*.

la (79,1), cioè $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, allora i coefficienti di w in ambedue gli integrali saranno uguali; poiché $\omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$, la trasformazione conduce soltanto alla sostituzione di $N_{\mathbf{k}}$ con $N_{-\mathbf{k}}$.

È ovvio che gli integrali (79,1) e (79,3) sono resi nulli dalle funzioni di distribuzione d'equilibrio degli elettroni e dei fononi. La linearizzazione di questi integrali per piccole deviazioni dall'equilibrio va realizzata contemporaneamente rispetto a entrambe le funzioni di distribuzione, che rappresentiamo nella forma

$$\begin{aligned} n &= n_0(\varepsilon) + \delta\tilde{n}, \quad N = N_0(\omega) + \delta N, \\ \delta\tilde{n} &= -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varphi = \frac{n_0(1-n_0)}{T} \varphi, \\ \delta N &= -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} \chi = \frac{N_0(1+N_0)}{T} \chi. \end{aligned} \quad (79,7)$$

La trasformazione è completamente analoga a quella effettuata al § 67 e al § 74. Così, l'espressione tra parentesi graffe nel primo termine della (79,1), riscritta nella forma

$$(1-n)(1-n')(1+N) \left[\frac{n'}{1-n'} \frac{N}{1+N} - \frac{n}{1-n} \right],$$

si riduce a

$$n_0(1-n'_0)(1+N_0) \frac{1}{T} (\varphi' - \varphi + \chi).$$

È opportuno trasformare ancora questa espressione mediante l'uguaglianza

$$n_0(\varepsilon) [1 - n_0(\varepsilon')] = [n_0(\varepsilon) - n_0(\varepsilon')] N_0(\varepsilon - \varepsilon'), \quad (79,8)$$

che si verifica facilmente con un calcolo diretto. Allora otteniamo

$$(n_0 - n'_0) \frac{N_0(1+N_0)}{T} (\varphi' - \varphi + \chi) = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega} (n_0 - n'_0) (\varphi' - \varphi + \chi).$$

Allo stesso modo si trasformano gli altri termini e come risultato abbiamo gli integrali degli urti linearizzati seguenti:

$$\text{St}_{e, ph} n = I_{e, ph}(\varphi, \chi) =$$

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \{ (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \omega_{\mathbf{k}}) - \\ &\quad - (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} - \chi_{-\mathbf{k}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{k}}) \} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (79,9)$$

$$\text{St}_{ph, e} N = I_{ph, e}(\chi, \varphi) =$$

$$= \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \int w(n'_0 - n_0) (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \omega_{\mathbf{k}}) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (79,10)$$

nei quali $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}$.

Questi integrali si dividono in modo naturale in due parti, ossia in operatori integrali lineari agenti sulle funzioni φ e χ , rispettivamente. Così,

$$I_{e,ph}(\varphi, \chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph}^{(2)}(\chi). \quad (79,11)$$

Sottolineiamo la proprietà importante dell'operatore $I_{e,ph}^{(1)}$: esso non cambia la parità della funzione $\varphi(\eta, p_F)$ rispetto alla variabile η , lasciando cioè pari una funzione pari e dispari una dispari. Infatti, nel senso della sua influenza su una funzione di η , l'operatore $I_{e,ph}^{(1)}$ ha la forma

$$I_{e,ph}^{(1)}(\varphi(\eta)) \sim \int K(\eta, \eta') [\varphi(\eta') - \varphi(\eta)] d\eta,$$

dove

$$K(\eta, \eta') = [n_0(\eta') - n_0(\eta)] [\delta(\eta - \eta' - \omega) - \delta(\eta' - \eta - \omega)].$$

Osservando che

$$n_0(\eta) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{th} \frac{\eta}{2T} \right] \quad (79,12)$$

e' perciò

$$n_0(\eta') - n_0(\eta) = \frac{1}{2} \left[\text{th} \frac{\eta}{2T} - \text{th} \frac{\eta'}{2T} \right],$$

vediamo che

$$K(\eta, \eta') = K(-\eta, -\eta'),$$

da cui deriva immediatamente la proprietà suindicata dell'operatore. Questa proprietà verrà utilizzata ai §§ 80, 82.

Gli integrali degli urti (79,9-10) si annullano identicamente per le funzioni

$$\varphi = \text{costante} \cdot \varepsilon, \quad \chi = \text{costante} \cdot \omega \quad (79,13)$$

(con il coefficiente costante uguale). Questa soluzione « parassita » dell'equazione cinetica corrisponde (così come la soluzione (67,18) nell'equazione fonone-fonone) alla variazione della temperatura del sistema di una piccola grandezza costante. Ma gli integrali (79,9-10) sono annullati anche dalla costante

$$\varphi = \text{costante} \quad (79,14)$$

per $\chi = 0$. Questa soluzione è dovuta alla costanza del numero totale di elettroni (a differenza del numero totale di fononi); formalmente essa corrisponde alla variazione del potenziale chimico degli elettroni di una piccola grandezza costante.

Per le ulteriori stime qualitative ricordiamo che gli ordini di grandezza dei parametri dello spettro elettronico nel metallo si esprimono unicamente in funzione della costante del reticolo d e della massa efficace dell'elettrone m^* ; così, abbiamo per la quantità di

moto di Fermi (in unità ordinarie) $p_F \sim \hbar/d$, per la velocità $v_F \sim p_F/m^* \sim \hbar/m^*d$, per l'energia $\varepsilon_F \sim v_F p_F \sim \hbar^2/m^*d^2$. I parametri dello spettro fononico e dell'interazione elettrone-fonone contengono anche la massa atomica M . La densità della sostanza è $\rho \sim M$ e la velocità del suono $u \sim \rho^{-1/2} \sim M^{-1/2}$; completando fino alla dimensione richiesta mediante le grandezze \hbar , d e m^* (il che si può realizzare in un solo modo), otteniamo la stima

$$u \sim v_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79,15)$$

Di qui la temperatura di Debye è

$$\Theta \sim \hbar \omega_{\max} \sim \hbar u/d \sim \varepsilon_F (m^*/M)^{1/2}. \quad (79,16)$$

Quanto all'operatore dell'interazione elettrone-fonone, la massa M figura in esso soltanto in funzione degli operatori di spostamento degli atomi \hat{U}_s (66,2); questa interazione non contiene nessun altro infinitesimo rispetto a $1/M$ e la sua energia diventa $\sim \varepsilon_F$ quando $U_s \sim d$. Gli elementi di matrice degli operatori \hat{U}_s e quelli dell'operatore dell'interazione elettrone-fonone sono $\sim (M\omega)^{-1/2} \sim M^{-1/4}$ (per quasi-quantità di moto data k la frequenza è $\omega \sim uk \sim M^{-1/2}$). La probabilità della diffusione è definita dal quadrato dell'elemento di matrice. Perciò la funzione w nell'integrale degli urti è proporzionale a $M^{-1/2}$ ossia, completata fino alla dimensione richiesta,

$$w \sim \Theta v_F d^2. \quad (79,17)$$

Questa stima deve essere cambiata nel caso in cui si ha a che fare con l'emissione o l'assorbimento di un fonone acustico a onda lunga. Il fatto che in questo caso w è proporzionale a k significa che nella stima si deve introdurre il fattore supplementare $k/k_{\max} \sim kd$, ossia

$$w \sim \Theta v_F k d^3. \quad (79,18)$$

§ 80. Coefficienti cinetici di un metallo.

Alte temperature

Alle alte temperature, $T \gg \Theta$, in un cristallo sono eccitati i fononi con tutte le quasi-quantità di moto possibili fino a quelle massime coincidenti come ordine di grandezza con la quantità di moto di Fermi: $k_{\max} \sim p_F \sim 1/d$. Per la definizione stessa di temperatura di Debye, l'energia massima dei fononi $\omega_{\max} \sim \Theta$ e, quindi, per tutti i fononi in generale $\omega \ll T$.

Così, nelle condizioni considerate le energie dei fononi sono piccole rispetto alla larghezza della regione di smussamento della distribuzione di Fermi degli elettroni. Ciò consente di considerare approssimativamente l'emissione o l'assorbimento di un fonone come diffusione elastica dell'elettrone. Quanto agli angoli di diffusione,

essi non sono affatto piccoli, in quanto le quasi-quantità di moto elettroniche e fononiche nelle condizioni considerate sono dello stesso ordine di grandezza.

Alle alte temperature, quando i numeri di riempimento degli stati fononici sono grandi, l'equilibrio si stabilisce molto rapidamente in ogni elemento di volume del gas fononico (rilassamento di tipo fonone-fonone). Questa è la ragione per cui nello studio delle conduttività elettrica e termica del metallo si può supporre d'equilibrio la funzione di distribuzione dei fononi, ponendo cioè $\chi = 0$ negli integrali degli urti (sulla stima quantitativa di χ torneremo alla fine di questo paragrafo). In altre parole, è sufficiente considerare l'equazione cinetica per i soli elettroni.

Sottolineiamo subito che nell'approssimazione, che suppone elastica la diffusione degli elettroni, restano in vigore i risultati ottenuti al § 78 basati unicamente su questa ipotesi. Fra l'altro, resta valida la legge di Wiedemann-Franz (78,13) che definisce il rapporto σ/κ . Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura di ciascuno dei coefficienti σ e κ separatamente, bisogna studiare in modo più dettagliato l'integrale degli urti elettrone-fonone (79,9).

Nelle ipotesi considerate questo integrale si semplifica fortemente. Essendo piccola l'energia del fonone $\omega = \pm (\varepsilon' - \varepsilon)$, si può sviluppare la differenza $n'_0 - n_0$ nelle sue potenze ¹⁾:

$$n'_0 - n_0 \approx \pm \omega \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

Dopo lo sviluppo, negli argomenti delle funzioni delta si può già porre $\omega = 0$; allora

$$I_{e, ph}(\varphi) = 2 \int w \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta(\varepsilon' - \varepsilon) (\varphi' - \varphi) \omega \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Per $\omega \ll T$ la funzione di distribuzione dei fononi è $N_0 \approx T/\omega$, in modo che $\partial N_0/\partial \omega \approx -T/\omega^2$. La derivata $\partial n_0/\partial \varepsilon \sim -1/T$. L'integrale è definito dalla regione dei valori $k \sim k_{\max}$ in cui $\omega \sim \Theta$. Tenendo conto delle funzioni delta, l'integrazione rispetto a $d^3 k$ porta, nella stima dell'integrale, il fattore k_{\max}^2/v_F :

$$I_{e, ph}(\varphi) \sim -w \frac{T}{\Theta} \frac{k_{\max}^2}{v_F} \frac{\varphi}{T}.$$

Di qui ricaviamo mediante la stima (79,17)

$$I_{e, ph}(\varphi) \sim -\varphi \sim -T \delta \bar{n}. \quad (80,1)$$

Ciò vuol dire che la frequenza degli urti elettrone-fonone è $\nu_{e, ph} \sim T$ (T/\hbar nelle unità ordinarie), la lunghezza del cammino libero

¹⁾ L'inclusione di ω in questa differenza non contraddice l'approssimazione in esame, ossia l'elasticità della diffusione degli elettroni. Ciò è necessario in quanto nella riduzione dell'integrale degli urti alla forma (79,9) è stata usata l'uguaglianza (79,8), il cui secondo membro diventa indeterminato per $\varepsilon = \varepsilon'$.

è $l \sim v_F/T$ e dalla (78,16) ricaviamo la conduttività elettrica (unità ordinarie)¹⁾:

$$\sigma \sim \frac{Ne^2\hbar}{m^*T}. \quad (80,2)$$

In tal modo la conduttività elettrica del metallo per $T \gg \Theta$ è inversamente proporzionale alla temperatura. Dalla legge di Wiedemann-Franz segue allora che il coefficiente di conducibilità termica è costante, cioè

$$\kappa \sim \frac{N\hbar}{m^*}. \quad (80,3)$$

Stimiamo ora le funzioni correttive φ e χ nelle distribuzioni degli elettroni e dei fononi per giustificare l'omissione di χ nell'integrale degli urti. Effettuiamo ciò, ad esempio, nel caso in cui esiste un campo elettrico con il gradiente della temperatura nullo.

Poiché il campo elettrico non incide sul moto dei fononi, il primo membro dell'equazione cinetica per i fononi è nullo. Perciò l'equazione si riduce all'uguaglianza a zero della somma degli integrali degli urti tra fononi e elettroni e degli urti reciproci:

$$I_{ph,e}^{(1)}(\varphi) + I_{ph,e}^{(2)}(\chi) + I_{ph,ph}(\chi) = 0 \quad (80,4)$$

(gli indici (1) e (2) distinguono le due parti dell'integrale (79,10), così come è stato fatto nella (79,11)).

L'integrale $I_{ph,e}$ si valuta in modo analogo a quello in cui sopra abbiamo valutato l'integrale $I_{e,ph}$. In questo caso, però, si deve tener presente che l'integrazione rispetto alle quasi-quantità di moto dell'elettrone p si effettua in pratica soltanto in prossimità della superficie di Fermi sul volume di uno strato di spessore $\sim T/v_F$ e di area $\sim p_F^2$. L'esistenza della funzione delta porta nella stima dell'integrale anche il fattore $1/\varepsilon_F$. Come risultato otteniamo

$$I_{ph,e}^{(2)}(\chi) \sim -w \frac{\chi}{T} \frac{T}{\Theta} \frac{Tp_F^2}{v_F \varepsilon_F} \sim -\chi \frac{T}{\varepsilon_F}, \quad I_{ph,e}^{(1)}(\varphi) \sim -\varphi \frac{T}{\varepsilon_F}. \quad (80,5)$$

Quanto all'integrale degli urti fonone-fonone, esso si valuta come

$$I_{ph,ph}(\chi) \sim -v_{ph,ph} \delta N \sim -v_{ph,ph} \frac{T}{\Theta^2} \chi$$

¹⁾ Osserviamo che l'indeterminazione quantistica dell'energia degli elettroni, $\sim \hbar v_{e,ph} \sim T$ risulta essere dell'ordine di grandezza della larghezza della regione di smussamento della loro distribuzione. Questa circostanza, tuttavia, non viola l'applicabilità dei risultati ottenuti, per una ragione analoga a quella che è stata precisata alla fine del § 78 in relazione alla diffusione sulle impurità. Per la lentezza relativa delle oscillazioni degli atomi nel reticolo e per l'elasticità della diffusione degli elettroni il problema può essere formulato, in linea di principio, come problema del moto degli elettroni nel campo potenziale del reticolo deformato.

con la frequenza efficace degli urti data dalla (68,3):

$$v_{ph, ph} \sim \frac{T}{Mud} \sim T \sqrt{\frac{m^*}{M}}.$$

In tal modo,

$$I_{ph, ph}(\chi) \sim -\frac{T^2}{\Theta^2} \sqrt{\frac{m^*}{M}} \chi \sim -\frac{T^2}{\Theta \varepsilon_F} \chi. \quad (80,6)$$

Dal confronto tra le (80,5) e (80,6) si vede soprattutto che

$$I_{ph, c}^{(2)}(\chi)/I_{ph, ph}(\chi) \sim \Theta/T \ll 1,$$

ossia la frequenza efficace degli urti fonone-elettrone (per gli elettroni in equilibrio, cioè per $\varphi = 0$) è piccola rispetto alla frequenza degli urti fonone-fonone. Questa è la ragione per cui nell'equazione (80,4) si può trascurare il secondo termine. Il confronto dei due termini rimasti conduce al risultato

$$\chi/\varphi \sim \Theta/T \ll 1, \quad (80,7)$$

il che giustifica l'omissione della funzione χ nell'integrale degli urti elettrone-fonone. Lo stesso risultato (80,7) si ottiene, come è facile vedere, anche in presenza di un gradiente della temperatura.

L'omissione della funzione χ nell'equazione cinetica per gli elettroni può diventare, tuttavia, inammissibile nello studio dei fenomeni termoelettrici.

Secondo la formula (78,12) (la cui deduzione è basata solo sull'ipotesi dell'elasticità della diffusione degli elettroni), il coefficiente termoelettrico è

$$\alpha^I \sim T/\varepsilon_F \quad (80,8)$$

(il significato dell'indice I sarà precisato più avanti). Questa grandezza è « anomalmente » piccola, nel senso che l'ordine di grandezza dell'integrale nella (78,8) (il secondo termine nella formula) è stato diminuito nel rapporto T/ε_F , per la disparità della funzione

$$\varphi^I = -\frac{\eta}{T} \nabla T \quad (80,9)$$

rispetto alla variabile $\eta = \varepsilon - \mu$. Questa circostanza è in un certo senso « casuale »; grazie a questo fatto una correzione relativamente piccola di φ , legata alla mancanza di equilibrio dei fononi, può implicare un contributo in α comparabile a quello (80,8).

Cercheremo la soluzione dell'equazione cinetica degli elettroni

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\eta}{T} \mathbf{v} \nabla T = I_{e, ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e, ph}^{(2)}(\chi) \quad (80,10)$$

sotto forma della somma $\varphi = \varphi^I + \varphi^{II}$, dove φ^I è la soluzione dell'equazione senza il secondo termine a secondo membro e φ^{II} è

la soluzione dell'equazione

$$I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph}^{(2)}(\chi) = 0. \quad (80,11)$$

Qui φ^I è la parte « grande » della funzione φ ; in virtù della parità dell'operatore $I_{e,ph}^{(1)}$ rispetto alla variabile η , già notata al § 79, questa parte ha la forma (80,9) ed è dispari rispetto alla variabile η . Dall'equazione (80,11), invece, segue che $\varphi^{II} \sim \chi$ e perciò

$$\varphi^{II}/\varphi^I \sim \chi/\varphi^I \sim \Theta/T \ll 1.$$

Ma, a differenza della φ^I , la funzione φ^{II} non si annulla per $\varepsilon = \mu$. Perciò nel calcolare il corrispondente contributo alla densità di corrente, non si ha smorzamento del termine dell'ordine fondamentale e il risultato è piccolo soltanto nel senso della piccolezza relativa di φ^{II} . Ciò vuol dire che il contributo di quest'ultima funzione al coefficiente termoelettrico è

$$\alpha^{II} \sim \alpha^I \frac{\varepsilon_F}{T} \frac{\Theta}{T} \sim \frac{\Theta}{\varepsilon_F}. \quad (80,12)$$

Sulla frontiera inferiore della regione di temperature considerata, per $T \sim \Theta$, abbiamo $\varepsilon\alpha^{II} \sim 1$ al posto della grandezza piccola $\varepsilon\alpha^I \sim \Theta/\varepsilon_F$.

In tal modo il coefficiente termoelettrico è composto di due parti additive. Queste parti possono essere del medesimo ordine di grandezza, ma hanno una dipendenza dalla temperatura distinta. L'origine fisica del secondo termine in α è la seguente: con la trasmissione di calore nel cristallo compare un flusso di fononi (« vento fononico ») che trascina con sé gli elettroni ¹⁾.

§ 81. Processi umklapp in un metallo

Il carattere della diffusione elettrone-fonone alle basse temperature è radicalmente diverso dal carattere della diffusione per $T \gg \Theta$. Per $T \ll \Theta$ nel cristallo sono eccitati i fononi di energia $\omega \sim T$ (che appartengono in generale ai rami acustici dello spettro). Per emissione o assorbimento di un tale fonone l'energia dell'elettrone cambia di una grandezza $\sim T$, vale a dire un ordine di grandezza paragonabile a tutta la larghezza della regione di smussamento della distribuzione di Fermi. La variazione della quasi-quantità di moto dell'elettrone coincide con la quasi-quantità di moto del fonone. Poiché $k \sim T/u \ll k_{\max}$ e $k_{\max} \sim p_F$, vuol dire che la quasi-quantità di moto dell'elettrone non varia che di una grandezza relativamente piccola. Quindi, alle basse temperature si verifica un caso limite, inverso rispetto alla diffusione elastica: il rilassamento degli elettro-

¹⁾ La precisazione del ruolo del trascinamento degli elettroni da parte dei fononi nei fenomeni cinetici nei metalli appartiene a L. E. Gurevič (1946).

ni rispetto alle energie avviene molto più rapidamente che rispetto alle direzioni delle loro quasi-quantità di moto.

Il rilassamento delle energie rappresenta un « mescolamento » rapido nella zona di smussamento della distribuzione di Fermi. Il rilassamento delle direzioni, invece, rappresenta un livellamento della distribuzione lungo questa superficie; esso avviene a piccoli salti ($\sim T/u$), ha cioè il carattere di diffusione lenta su questa superficie.

Prima di passare allo studio particolareggiato dei fenomeni cinetici in queste condizioni, facciamo qualche osservazione generale circa il ruolo dei processi umklapp.

Come nei cristalli dielettrici, i coefficienti cinetici sono finiti per un cristallo metallico perfetto (senza impurità o difetti), il che è dovuto all'esistenza dei processi umklapp. Se tenessimo conto solo dei processi normali accompagnati dalla conservazione della quasi-quantità di moto totale degli elettroni e dei fononi, le equazioni cinetiche avrebbero soluzioni parassite corrispondenti al moto descritto dai sistemi elettronico e fononico come un tutt'uno relativamente al reticolo. Sono le soluzioni della forma

$$\varphi = p\delta V, \quad \chi = k\delta V \quad (81,1)$$

con il vettore costante δV (si veda la (67,19)); queste funzioni annullano gli integrali degli urti (79,9-10) se l'emissione o l'assorbimento di fononi da parte degli elettroni avviene con la conservazione della quasi-quantità di moto ($p = p' + k$).

Alle alte temperature, quando le quasi-quantità di moto sia degli elettroni che dei fononi sono grandi ($\sim 1/d$), i processi umklapp avvengono, in generale, con la stessa frequenza che i processi normali. La necessità di tenerne conto non conduce perciò ad alcune particolarità nelle equazioni cinetiche.

Le quasi-quantità di moto degli elettroni sono disposte nell'intorno della superficie di Fermi e in questo senso non dipendono praticamente dalla temperatura. Ma alle basse temperature diventano piccole le quasi-quantità di moto dei fononi e i processi umklapp possono risultare più complessi. Sotto questo aspetto la situazione differisce notevolmente nei casi di superfici di Fermi aperte e chiuse.

La superficie di Fermi aperta, qualunque sia la cella elementare nello spazio p (reticolo inverso), interseca la frontiera della cella. È chiaro che in questo caso sono sempre possibili processi umklapp accompagnati da emissione o assorbimento di un fonone di energia piccola a piacere: già un piccolo cambiamento della quasi-quantità di moto dell'elettrone in prossimità della frontiera della cella può « trasferirlo » nella cella vicina. Nel corso della loro diffusione sulla superficie di Fermi tutti gli elettroni, alla fine, raggiungono la frontiera della cella e, di conseguenza, possono partecipare ai processi umklapp. Quindi, anche in questo caso la probabilità dei processi

umklapp (rispetto ai processi normali) non gode di alcuna piccola correzione supplementare. La divisione stessa dei processi in normali e umklapp dipende dalla cella considerata del reticolo inverso e, in questo senso, è convenzionale. Nel caso della superficie di Fermi aperta la proprietà suindicata (la mancanza di una frequenza particolarmente piccola dei processi umklapp) resta qualunque sia la cella. In questo caso è opportuno in generale rinunciare alla divisione degli atti di diffusione in due tipi, considerandoli tutti come normali (cioè accompagnati dalla conservazione della quasi-quantità

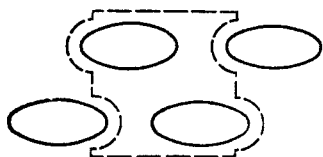


Fig. 28

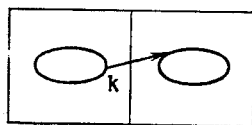


Fig. 29

di moto), ma supponendo che la quasi-quantità di moto degli elettroni assuma valori in tutto il reticolo inverso. Per i fononi, invece, la cella elementare si prende tale che il punto $k = 0$ si trova al suo centro; allora tutti i fononi a onda lunga (i soli che si devono considerare per $T \ll \Theta$) si trovano in una piccola parte del volume di una sola cella nell'intorno del suo centro. L'esclusione della soluzione parassita (81,1) si ottiene inoltre imponendo alla funzione di distribuzione degli elettroni la condizione di periodicità nel reticolo inverso:

$$n(\mathbf{p} + \mathbf{b}) = n(\mathbf{p}). \quad (81,2)$$

La distribuzione d'equilibrio, che dipende solo dall'energia dell'elettrone $\epsilon(\mathbf{p})$, soddisfa automaticamente questa condizione, in quanto la funzione $\epsilon(\mathbf{p})$ è periodica. Con $n_0(\mathbf{p})$ è periodica anche la derivata $\partial n_0 / \partial \epsilon$ e perciò il fattore $\varphi(\mathbf{p})$ in $\delta \tilde{n}$ deve essere anch'esso periodico; questa condizione elimina la soluzione (81,1) che non la soddisfa.

Consideriamo il caso della superficie di Fermi chiusa, in cui si può scegliere la cella fondamentale del reticolo inverso tale che la superficie di Fermi non intersechi in nessun punto le sue frontiere¹⁾. Allora ai processi umklapp corrispondono le transizioni dell'elettrone tra alcuni punti della superficie di Fermi nella cella fonda-

¹⁾ Tuttavia, se la superficie di Fermi è composta di più concavità chiuse, a tal fine può essere necessario non definire la cella fondamentale come parallelepipedo a facce piane. Ciò è mostrato schematicamente nella fig. 28 sull'esempio di un reticolo piano con due cavità chiuse non equivalenti della « superficie di Fermi ». La cella fondamentale è rappresentata con un tratteggio, che non interseca questa cavità. Se la cella fosse rettangolare sarebbe assolutamente impossibile escludere le intersezioni.

mentale e la sua ripetizione nella cella vicina, come è rappresentato schematicamente nella fig. 29. Il vettore \mathbf{k} che congiunge questi punti è la quasi-quantità di moto del fonone emesso o assorbito. La distanza k è in generale grande ($k \sim 1/d$) e alle basse temperature il numero di fononi con energia $\omega(\mathbf{k})$ è esponenzialmente piccolo, cioè proporzionale a $\exp(-\omega(\mathbf{k})/T)$. La frequenza efficace degli atti di diffusione con umklapp dipende in queste condizioni dalla temperatura secondo la legge

$$v_U \propto \exp\{-\omega(\mathbf{k}_{\min})/T\}, \quad (81,3)$$

dove \mathbf{k}_{\min} è il valore della quasi-quantità di moto del fonone (tra tutti i vettori del detto tipo) per il quale l'energia $\omega(\mathbf{k})$ ha valore minimo. Qui è importante, ovviamente, che la velocità degli elettroni sia molto inferiore a quella dei fononi ($v_F \gg u$). Questa è la ragione per cui è impossibile diminuire l'esponente nella (81,3), variando la lunghezza del vettore \mathbf{k} mediante un allontanamento dalla superficie di Fermi. Sebbene l'energia del fonone possa in questo caso diminuire di $\sim u\delta k$, al tempo stesso l'energia dell'elettrone che partecipa al processo aumenterebbe molto di più, $\sim v_F\delta k$, e ciò implicherebbe una diminuzione anziché un aumento di v_U . Per trovare \mathbf{k}_{\min} è sufficiente perciò considerare la superficie di Fermi come tale a prescindere dallo smussamento della distribuzione nel suo intorno. Infatti, hanno di solito importanza i punti giacenti in prossimità del massimo avvicinamento alla superficie di Fermi con la sua replica nella cella vicina.

La soluzione (81,1) significa l'esistenza di un flusso macroscopico di elettroni in assenza di campo elettrico, cioè una conduttività elettrica infinita. La frequenza esponenzialmente piccola dei processi umklapp conduce a una conduttività elettrica esponenzialmente grande (*R. Peierls*).

Quanto alla conducibilità termica di un metallo con la superficie di Fermi chiusa, essa resta finita anche se i processi umklapp sono trascurati. Il fatto è che il coefficiente di conducibilità termica κ definisce, secondo la (78,2), il flusso di calore in assenza di corrente elettrica; la condizione $\mathbf{j} = 0$, invece, esclude automaticamente la soluzione parassita (81,1). L'inclusione dei processi umklapp può cambiare la grandezza κ soltanto nella misura della sua limitatezza. Lo stesso si può dire del coefficiente termoelettrico α che lega (secondo la definizione (78,1)) il gradiente della temperatura al campo elettrico, sempre per la condizione $\mathbf{j} = 0$ (si veda il problema del § 82).

Quanto detto non si estende, però, a metalli compensati con superfici di Fermi degli elettroni e delle buche chiuse, cioè a metalli con ugual numero di elettroni e di buche: $N_e = N_h$ (si veda IX, § 61). Infatti, la soluzione (81,1) in questo caso non è legata all'esistenza della corrente elettrica. La densità di corrente corrispondente a questa

soluzione è

$$\begin{aligned} j &= e \int v \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} (p \delta V) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} = e \int \frac{\partial n_0}{\partial p} (p \delta V) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} = \\ &= e \int \frac{\partial n_0^{(e)}}{\partial p} (p \delta V) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} - e \int \frac{\partial n_0^{(h)}}{\partial p} (p \delta V) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Il primo integrale è esteso al volume della cavità della superficie di Fermi degli elettroni, il secondo delle buche; nell'ultimo integrale si è introdotta la distribuzione delle buche secondo $n^{(h)} = 1 - n$. Ora possiamo trasformare gli integrali per parti; gli integrali di superficie estesi alle facce della cella che compaiono si annullano per la diminuzione rapida di $n_0^{(e)}$ e $n_0^{(h)}$ all'allontanarsi dalle superfici di Fermi corrispondenti. Come risultato troviamo che

$$j = e \delta V (N_h - N_e). \quad (81,4)$$

Per un metallo compensato $j = 0$.

Ciò vuol dire che la conduttività elettrica di un metallo compensato è finita già a prescindere dai processi umklapp. Invece il coefficiente di conducibilità termica e il coefficiente termoelettrico sono definiti proprio dai processi umklapp e, se si prescinde da questi ultimi, sarebbero infiniti, poiché in questo caso la condizione $j = 0$ non esclude la soluzione parassita (81,1).

Nelle considerazioni e nelle stime di questo paragrafo (e di quello successivo) si sottintendono ipotesi elementari circa la forma della superficie di Fermi: si è supposto che essa sia o chiusa o aperta e che tutte le sue dimensioni caratteristiche siano dell'ordine di $1/d$. Fra l'altro, le superfici di Fermi dei metalli reali, in generale, hanno una forma complicata e possono consistere di più fogli; non ci soffermiamo sull'analisi delle complicazioni corrispondenti nel comportamento dei coefficienti cinetici dei metalli reali. Così, i fogli delle superfici di Fermi aperte in celle diverse del reticolo inverso possono essere legati da ponti sottili (di spessore $\Delta p \ll p_F$). La comparsa nel problema del piccolo parametro $\Delta p/p_F$ può condurre alla comparsa di nuove regioni « intermedie » di temperatura, con le loro leggi di dipendenza dei coefficienti cinetici dalla temperatura. I fogli delle superfici di Fermi chiuse possono avvicinarsi « anomalmente » l'uno all'altro; ciò può spingere la legge esponenziale (81,3) in una regione di temperature « anomalmente » basse.

§ 82. Coefficienti cinetici di un metallo. Basse temperature

Nell'analisi quantitativa dei fenomeni cinetici alle basse temperature prenderemo il caso delle superfici di Fermi aperte; non ci preoccuperemo quindi in modo speciale dei processi umklapp.

Prima di tutto, mostriamo che il rilassamento in un sistema fononico avviene (per $T \ll \Theta$) soprattutto a causa degli urti fonone-elettrone e non di quelli fonone-fonone.

Per la stima dell'integrale degli urti fonone-elettrone (79,10), osserviamo che alle basse temperature $\omega \sim T$, $\varepsilon - \mu \sim T$ e perciò $N_0 \sim n_0 \sim 1$, $\partial N_0 / \partial \omega \sim 1/T$. L'integrazione rispetto a d^3p si effettua nel volume di uno strato di spessore $\sim T/v_F$ lungo la superficie di Fermi. Poiché k/p è piccolo, si può rappresentare l'argomento della funzione delta nella forma

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) \approx \mathbf{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \omega \approx \mathbf{v}_F \mathbf{k} - \omega. \quad (82,1)$$

La funzione delta si elimina per integrazione rispetto alle direzioni \mathbf{p} (o, il che è lo stesso, alle direzioni \mathbf{v}_F) per \mathbf{k} dato, il che porta nell'espressione integranda il fattore $1/v_F k$. Infine, w si valuta secondo la formula (79,18). Come risultato otteniamo

$$I_{ph, e}(\chi) \sim -\chi (m^*/M)^{1/2} \sim -T (m^*/M)^{1/2} \delta N,$$

vale a dire che la frequenza efficace degli urti è

$$\nu_{ph, e} \sim T \sqrt{\frac{m^*}{M}}. \quad (82,2)$$

La frequenza efficace degli urti fonone-fonone alle basse temperature secondo la stima (69,15) vale

$$\nu_{ph, ph} \sim T \sqrt{\frac{m^*}{M}} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^4 \ll \nu_{ph, e}, \quad (82,3)$$

il che dimostra l'affermazione fatta.

Più avanti trascureremo gli urti fonone-fonone. Allora l'equazione cinetica per i fononi ha la forma

$$\mathbf{u} \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \mathbf{u} \nabla T = I_{ph, e}(\chi, \varphi). \quad (82,4)$$

Questa equazione può essere risolta in forma esplicita rispetto alla funzione fononica χ . Poiché \mathbf{k} in questa equazione è una grandezza data, la funzione $\chi_{\mathbf{k}}$ può essere portata fuori dall'integrale che la contiene e si ottiene così

$$\chi_{\mathbf{k}} = -\frac{\omega}{T \nu_{ph, e}} (\mathbf{u} \nabla T) + \frac{1}{\nu_{ph, e}} \int w(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) (\varphi - \varphi') \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \equiv \chi_1 + \chi_2, \quad (82,5)$$

dove

$$\nu_{ph, e} = \int w(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (82,6)$$

È facile vedere che $\chi_2 \gg \chi_1$. Si vede infatti dalla definizione della funzione χ_2 che $\chi_2 \sim \varphi$ (gli integrali a numeratore e denominatore differiscono solo per il fattore $\varphi - \varphi'$ nell'espressione integranda). L'ordine di grandezza della funzione φ è definito dall'equazione cinetica per gli elettroni

$$(\mathbf{v} \nabla T) \frac{\partial n_0}{\partial T} = I_{e, ph}(\varphi) \sim -v_{e, ph} \delta \tilde{n} \sim -v_{e, ph} \frac{\varphi}{T},$$

da cui

$$\varphi \sim \frac{v_F}{v_{e, ph}} |\nabla T|.$$

La frequenza efficace degli urti elettrone-fonone, invece, si valuta in modo analogo a quello usato sopra per $v_{ph, e}$; l'unica differenza è che l'integrazione rispetto a d^3k nell'integrale $I_{e, ph}$ si effettua su un volume $\sim (T/u)^3$ dello spazio dei vettori quantità di moto (al posto del volume $\sim p_F^3 T/v_F$ nell'integrazione rispetto a d^3p nell'integrale $I_{ph, e}$):

$$v_{e, ph} \sim T^3/\Theta^2. \quad (82,7)$$

Osservando infine che $\chi_1 \sim |\nabla T| u/v_{ph, e}$, troviamo

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} \sim \frac{u v_{e, ph}}{v_F v_{ph, e}} \sim \frac{T^2}{\Theta^2} \ll 1, \quad (82,8)$$

come dovevasi dimostrare.

Nel calcolare le conduttività elettrica e termica (ma non il coefficiente termoelettrico; si veda più avanti) si può trascurare la piccola grandezza χ_1 . Sostituendo in seguito l'espressione $\chi \approx \chi_2$ dalla (82,5) nell'integrale linearizzato degli urti elettrone-fonone (rappresentato nella forma (79,11)), otteniamo

$$I_{e, ph}(\varphi, \chi) = I_{e, ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e, ph, e}(\varphi), \quad (82,9)$$

dove $I_{e, ph, e}(\varphi)$ è il risultato della sostituzione di χ_2 nell'integrale $I_{e, ph}^{(2)}(\chi)$. Il primo termine nella (82,9) è l'integrale degli urti tra elettroni e fononi in equilibrio, il secondo si può chiamare integrale degli urti tra elettroni attraverso i fononi.

Introduciamo nella funzione $\varphi(\mathbf{p})$ (come abbiamo già fatto al § 79) quali variabili indipendenti la grandezza $\eta = \varepsilon - \mu$ e il vettore \mathbf{p}_F , che è tracciato nella direzione \mathbf{p} e termina sulla superficie di Fermi. Ambedue i termini nella (82,9) contengono nelle loro espressioni integrande la differenza

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) - \varphi(\eta', \mathbf{p}_F'), \quad (82,10)$$

dove

$$\eta - \eta' = \pm \omega, \quad \mathbf{p}_F - \mathbf{p}_F' = \mathbf{x},$$

\mathbf{x} è la proiezione del vettore \mathbf{k} sul piano tangente alla superficie di Fermi nel punto \mathbf{p}_F .

La funzione $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ cambia notevolmente, rispetto alla variabile \mathbf{p}_F , su intervalli $\sim p_F$, mentre la differenza $\kappa \sim k \ll p_F$. In questo senso la dipendenza di φ dalla variabile \mathbf{p}_F è lenta e in prima approssimazione si può porre nella differenza (82,10) $\mathbf{p}'_F = \mathbf{p}_F$, sostituendola cioè con

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) - \varphi(\eta', \mathbf{p}_F). \quad (82,11)$$

La dipendenza dalla variabile η , invece, è forte nel senso che la differenza $|\eta - \eta'| = \omega \sim T$ coincide, come ordine di grandezza, con l'intervallo in cui la funzione φ varia notevolmente.

Indichiamo con L_0 l'operatore che si ottiene dall'integrale $I_{e, ph}$ (82,9) sostituendo la (82,10) con la (82,11); allora $I_{e, ph}$ sarà rappresentato nella forma

$$I_{e, ph}(\varphi) = L_0(\varphi) + L_1(\varphi),$$

dove $L_0 \gg L_1$. L'equazione cinetica per gli elettroni (se esistono sia un campo elettrico che un gradiente della temperatura) ha la forma

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\eta}{T} \nabla T\right) \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = L_0(\varphi) + L_1(\varphi). \quad (82,12)$$

I due termini a secondo membro hanno un significato fisico affatto diverso: il primo è responsabile del rapido rilassamento dell'energia, il secondo del rilassamento lento, « diffusionale », delle direzioni della quasi-quantità di moto.

Diamo due proprietà evidenti dell'operatore L_0 . Primo, esso si annulla per ogni funzione dipendente unicamente da \mathbf{p}_F (in quanto la differenza (82,11) si annulla). Secondo, si annulla l'integrale

$$\int L_0(\varphi) d\eta = 0; \quad (82,13)$$

L'operatore L_0 descrive gli urti con variazione della sola energia e la uguaglianza (82,13) significa semplicemente la conservazione del numero di elettroni con direzione \mathbf{p} data.

Cercheremo la soluzione dell'equazione cinetica nella forma

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) = a(\mathbf{p}_F) + b(\eta, \mathbf{p}_F), \quad (82,14)$$

dove $a(\mathbf{p}_F)$ è funzione della sola \mathbf{p}_F e $|a| \gg |b|$. Il fatto che la funzione a (che annulla la parte L_0 dell'integrale degli urti) è grande, esprime la rapidità del processo di rilassamento rispetto alle energie. Ponendo la (82,14) nella (82,12) e trascurando il termine $L_1(b)$ relativamente piccolo, otteniamo l'equazione

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\eta}{T} \nabla T\right) \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} = L_0(b) + L_1(a). \quad (82,15)$$

I due termini al suo secondo membro, in generale, sono del medesimo ordine di grandezza. Ma per il calcolo dei coefficienti di conduttività elettrica o termica è importante ogni volta uno solo di questi termini.

È facile capire ciò ricordando che l'operatore linearizzato di tipo elettrone-fonone $I_{e, ph}$ (e con esso gli operatori L_0 e L_1), che agisce sulla funzione $\varphi(\eta, p_F)$, non ne cambia la parità rispetto alla variabile η ¹⁾. Tenendone conto, dividiamo la funzione φ nelle parti (φ_g) pari rispetto a η e (φ_u) dispari:

$$\varphi_g = a + b_g, \quad \varphi_u = b_u$$

(la funzione a indipendente da η è, per definizione, pari). Ponendo $\varphi = \varphi_g + \varphi_u$ nella (82,15) e separando i termini dell'equazione pari e dispari rispetto a η , otteniamo le due equazioni seguenti:

$$-\frac{\eta}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v}_F \nabla T = L_0(b_u) \quad (82,16)$$

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} e E \mathbf{v}_F = L_0(b_g) + L_1(a); \quad (82,17)$$

a primo membro di queste equazioni la velocità \mathbf{v} è sostituita, con sufficiente precisione, con la velocità \mathbf{v}_F indipendente da η sulla superficie di Fermi. Integriamo ancora la seconda equazione rispetto a η ; in virtù della proprietà (82,13) il termine con L_0 in seguito scompare e resta

$$e E \mathbf{v}_F = \int L_1(a) d\eta. \quad (82,18)$$

Il flusso di calore (per $E = 0$) è definito interamente dalla soluzione dell'equazione (82,16), contenente solo l'operatore L_0 ; come ci si doveva aspettare, esso dipende dai processi di rilassamento delle energie elettroniche. In base alla soluzione dell'equazione (82,16) il flusso di calore si calcola come l'integrale

$$\mathbf{q}' = \int \mathbf{v} \eta \delta \tilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \approx - \int \mathbf{v}_F \eta \frac{\partial n_0}{\partial \eta} b_u \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}; \quad (82,19)$$

la parte pari rispetto a η della funzione φ non fornisce contributo all'integrale essendo dispari l'espressione integranda.

L'operatore L_0 è la parte fondamentale dell'integrale degli urti elettrone-fonone. Perciò la frequenza efficace degli urti che gli corrisponde è $\nu_{e, ph}$ dalla (82,7); di questa grandezza bisogna parlare più precisamente come di frequenza efficace degli urti relativamente allo scambio di energia. La corrispondente lunghezza del cammino libero degli elettroni è $l \sim \nu_F / \nu_{e, ph}$. Quanto al coefficiente di con-

¹⁾ Per l'operatore $I_{e, ph}^{(1)}$ ciò è stato mostrato al § 79. Non ci soffermiamo sulla dimostrazione completamente analoga per l'operatore $I_{e, ph, e}$.

ducibilità termica, lo si può definire mediante la formula cinetica dei gas (7,10): $\kappa \sim \bar{c} \bar{v} l N$. In questo caso N è la densità del numero di elettroni, \bar{c} la parte elettronica del calore specifico (riferita a un elettrone di conduzione) e $\bar{v} \sim v_F$. Le grandezze N e v_F non dipendono dalla temperatura, il calore specifico del liquido di Fermi elettronico è proporzionale a T e, secondo la (82,7), la lunghezza del cammino libero $l \sim T^{-3}$. Poiché il flusso di calore così calcolato si riferisce a $E = 0$, il coefficiente in esso non è il coefficiente di conducibilità termica stesso κ , bensì la somma $\kappa' = \kappa + T\sigma\alpha^2$ (si veda la (78,3)). In tal modo, $\kappa' \sim T^{-2}$. Il termine $T\sigma\alpha^2$, tuttavia, risulta piccolo rispetto a κ' (si veda più avanti la nota a pag. 411); perciò anche $\kappa \sim T^{-2}$. Ponendo per una stima grossolana

$$c \sim \frac{m^* p_F T}{N \hbar^3}$$

(unità ordinarie; cfr. IX, (1,15)), otteniamo

$$\kappa \sim \frac{e_F p_F}{\hbar^2} \frac{\Theta^2}{T^2}. \quad (82,20)$$

La conduttività elettrica è definita dalla soluzione dell'equazione (82,18), che contiene solo l'operatore L_1 ; come ci si attendeva, la corrente elettrica dipende dai processi di rilassamento delle direzioni delle quasi-quantità di moto elettroniche. All'inizio del § 81 è stato sottolineato che questi processi hanno carattere di diffusione lungo la superficie di Fermi. Nel prossimo paragrafo sarà mostrato in che modo l'equazione cinetica (82,18) può essere ridotta effettivamente alla forma di un'equazione di diffusione. Per quanto riguarda la legge della dipendenza della conduttività elettrica dalla temperatura, la si può precisare già mediante le semplici considerazioni seguenti.

Lo spostamento lungo la superficie di Fermi avviene a piccoli salti per distanze $k \sim \bar{l}/u$; questa grandezza funge da « lunghezza del cammino libero » nello spazio dei vettori quantità di moto (l_p), mentre la frequenza degli « atti di diffusione » coincide con la frequenza degli urti elettrone-fonone $\nu_{e, ph}$. Il coefficiente di diffusione lungo la superficie di Fermi si può valutare mediante la formula cinetica dei gas $D \sim \bar{l} \bar{v} \sim l^2 \nu$, scrivendo in essa l_p e $\nu_{e, ph}$ al posto di l e ν . Otteniamo così (in unità ordinarie)

$$D_p \sim \frac{p_F^2 \Theta}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^5. \quad (82,21)$$

Di qui si può ricavare il tempo di rilassamento che deve figurare nella stima della conduttività elettrica secondo la (78,16): $\sigma \sim \sim e^2 N v_F \tau / p_F$. Questo è il tempo in cui la quasi-quantità di moto dell'elettrone varia di una grandezza del suo stesso ordine. In altre

parole, durante il tempo τ l'elettrone deve diffondere sulla superficie di Fermi a una distanza $\sim p_F$. Ma per uno spostamento dovuto a diffusione il quadrato medio dello spostamento è proporzionale al tempo (e al coefficiente di diffusione). Di qui troviamo la relazione $p_F^2 \sim D_p \tau$ e in seguito la conduttività (in unità ordinarie)

$$\sigma \sim \frac{\hbar e^2 N}{m^* \Theta} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^5. \quad (82,22)$$

In tal modo, alle basse temperature la conduttività è proporzionale a T^{-5} ¹⁾.

Sofferamoci sulla questione del coefficiente termoelettrico. La situazione qui è analoga a quella che viene a crearsi alle alte temperature.

Se la corrente j si calcola in base alla funzione b_u che rappresenta la soluzione dell'equazione (82,16), allora a causa della disparità di questa funzione rispetto alla variabile η l'integrale si annulla in prima approssimazione e si ottiene un risultato non nullo soltanto includendo il successivo termine dello sviluppo in η/ε_F dell'espressione integranda. Ciò conduce (così come per $T \gg \Theta$) al valore del coefficiente termoelettrico (in unità ordinarie)

$$\alpha^I \sim T/\varepsilon_F \quad (82,23)$$

al posto dell'ordine di grandezza « normale » $\alpha \sim 1/e^2$.

Un altro contributo al coefficiente termoelettrico proviene dal termine χ_1 della funzione fononica χ , omissa nella (82,5); questo contributo è legato all'effetto di trascinamento degli elettroni da parte dei fononi. Se conserviamo questo termine, all'integrale degli urti (82,9) si aggiunge il termine

$$I_{e,ph}^{(2)}(\chi_1) \sim v_{e,ph} \chi_1 \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \sim -v_{e,ph} \frac{u|\nabla T|}{v_{ph,e} T}. \quad (82,24)$$

Questo termine si può portare in seguito al primo membro dell'equazione cinetica (82,12), dove lo si deve confrontare con il termine

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\eta}{T} (\mathbf{v} \nabla T). \quad (82,25)$$

Il termine (82,24) è piccolo rispetto alla (82,25) nel rapporto T^2/Θ^2 (la stima è analoga alla (82,8)). Quando si tiene conto di questo termine, ciò conduce alla comparsa di un addendo (proporzionale a ∇T) che non sarà più dispari rispetto a η nella soluzione φ dell'equazione cinetica. Perciò, quando si calcola il contributo corrispondente alla corrente, non compare alcun infinitesimo supplementare e il

¹⁾ Il primo ad ottenere questo risultato è stato *F. Bloch* (1929).

²⁾ Si vede dalle stime (82,20-23) che $T\alpha^2\sigma/\kappa \sim (\Theta/\varepsilon_F)^2 \ll 1$, il che giustifica l'omissione fatta nel dedurre la (82,21).

coefficiente termoelettrico acquista il termine

$$\alpha^{II} \sim T^2/e\Theta^2 \quad (82,26)$$

(L. E. Gurevič, 1946)¹⁾.

A mano a mano che la temperatura diminuisce, la frequenza degli urti elettrone-fonone diminuisce e, alla fine, il ruolo principale nella creazione della resistenza termica e elettrica passa agli urti tra elettroni e atomi di impurità. È da notare che a causa della differenza tra le dipendenze dalla temperatura il passaggio alla « resistenza termica residua » avviene più tardi di quello alla resistenza elettrica residua.

Nei metalli molto puri può esistere una regione di temperature in cui le proprietà cinetiche del metallo sono definite dagli urti elettrone-elettrone. La lunghezza corrispondente del cammino libero nel liquido elettronico del metallo, così come in qualsiasi liquido di Fermi, dipende dalla temperatura come T^{-2} e, inoltre, il rapporto T/ε_F funge da piccolo parametro dello sviluppo (si veda il § 75). Per $T \sim \varepsilon_F$ questa lunghezza del cammino libero dovrebbe essere $\sim d$ in modo che

$$l_{ee} \sim d (\varepsilon_F/T)^2. \quad (82,27)$$

Ne segue che la legge della dipendenza dalla temperatura delle conduttività elettrica e termica è

$$\sigma \propto T^{-2}, \quad \kappa \propto T^{-1} \quad (82,28)$$

(L. D. Landau, I. Ja. Pomerančuk, 1936). Al diminuire della temperatura la frequenza efficace ν_{ee} degli urti elettrone-elettrone decresce più lentamente che la frequenza $\nu_{e, ph}$ degli urti elettrone-fonone. Ma poiché il piccolo parametro in ν_{ee} è T/ε_F e non T/Θ come in $\nu_{e, ph}$, gli urti elettrone-elettrone possono essere decisivi soltanto a temperature molto basse.

Osserviamo inoltre che le leggi (82,28) possono, in linea di principio, valere per superfici di Fermi sia aperte che chiuse. Poiché le

¹⁾ Qui occorre fare la seguente osservazione. Essendo piccola la quasi-quantità di moto del fonone, dalla legge di conservazione dell'energia abbiamo

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \approx v_F k \approx \pm \omega(\mathbf{k}),$$

da cui si vede che l'angolo θ tra \mathbf{v}_F e \mathbf{k} è vicino a $\pi/2$: $\cos \theta \sim \omega/v_F k \sim u/v_F \ll 1$. Nel caso isotropo, le direzioni di \mathbf{k} e della velocità \mathbf{u} del fonone coincidono in modo tale che risulta piccolo anche il prodotto $\mathbf{u} \mathbf{v}_F$. Lo stesso prodotto compare nell'integrale che definisce la corrente in base alla funzione φ proporzionale a $u \nabla T$; questa circostanza condurrebbe, nel caso isotropo, a un infinitesimo supplementare in α^{II} . Per quanto riguarda un cristallo anisotropo (anche a simmetria cubica), in generale non esistono ragioni per la comparsa di questo infinitesimo.

quasi-quantità di moto degli elettroni sono grandi, la necessità di esistenza di processi umklapp non rappresenta, in generale, la sorgente di qualche infinitesimo supplementare per le superfici di Fermi chiuse.

PROBLEMA

Calcolare il coefficiente termoelettrico α per un metallo con superficie di Fermi chiusa alle basse temperature, trascurando i processi umklapp.

Soluzione. L'equazione cinetica per gli elettroni è

$$-eE \frac{\partial n_0}{\partial p} - \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} (v \nabla T) = St_{e, ph} n. \quad (1)$$

Scriviamo l'equazione cinetica per i fononi nella forma

$$-\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial k} \nabla T = St_{ph, e} N, \quad (2)$$

osservando che

$$u \frac{\partial N_0}{\partial T} = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} u = -\frac{\omega}{T} \frac{\partial N_0}{\partial k}.$$

Moltiplicando l'equazione (1) per p e l'equazione (2) per k , integriamole rispetto a $2d^3p/(2\pi)^3$ e $d^3k/(2\pi)^3$ e sommiamole ambedue termine a termine. Il secondo membro si annulla in virtù della conservazione della quasi-quantità di moto totale degli elettroni e dei fononi in assenza di processi umklapp. Come risulta otteniamo

$$\begin{aligned} & \int e \left(E \frac{\partial n_0}{\partial p} \right) p \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} + \\ & + \frac{\nabla T}{3} \int \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} (vp) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} + \frac{\nabla T}{3} \int \frac{\omega}{T} \left(\frac{\partial N_0}{\partial k} k \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

il secondo e il terzo integrale sono scritti supponendo che il cristallo goda della simmetria cubica.

Il primo integrale nella (3) si trasforma come per la deduzione della (81,4) e dà $-eE (N_e - N_h)$. Il secondo integrale si calcola come si è fatto nel dedurre la (78,12) e vale $-AT \nabla T$, dove

$$A = \frac{\pi^2}{9} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int vp \frac{dS}{v(2\pi)^3} \right]_{\varepsilon = \varepsilon_F}$$

(l'integrale si calcola sulla superficie isoenergetica $\varepsilon = \text{costante}$). Il terzo integrale, dopo trasformazione per parti, assume la forma

$$-\frac{\nabla T}{3T} \int N_0 (3\omega + ku) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

(l'integrale esteso alla superficie delle facce della cella del reticolo inverso si annulla a causa della rapida diminuzione della funzione N_0 all'aumentare di ω alle basse temperature). Per i fononi acustici a onda lunga (i quali sono significativi unicamente per T piccole) la velocità u e la relazione $\kappa = k/\omega$ dipendono solo dalla direzione k (e non da ω). Usando per l'integrale rispetto a ω la nota espressione, troviamo che il terzo integrale nella (3) vale $-BT^3 \nabla T$, dove

$$B = \frac{\pi^4}{15} \sum \int \left(1 + \frac{\kappa u}{3} \right) \kappa^2 \frac{d\sigma_k}{(2\pi)^3}$$

(la sommatoria è estesa ai tre rami acustici dello spettro fononico).

In tal modo l'uguaglianza (3) assume la forma

$$-eE(N_e - N_h) = \nabla T(AT + BT^3).$$

Confrontandola con la (78,1) per $j = 0$, troviamo il coefficiente termoelettrico

$$\alpha = \frac{AT + BT^3}{N_h - N_e}. \quad (4)$$

La condizione $j = 0$ può essere garantita da una scelta appropriata di un termine della forma (81,1) nella soluzione dell'equazione cinetica. In accordo con quanto detto al § 81, l'espressione (4) è finita per un metallo non compensato e diventa infinita per $N_e = N_h$.

§ 83. Diffusione di elettroni sulla superficie di Fermi

In questo paragrafo verrà mostrato in che modo l'equazione cinetica per il problema della conduttività elettrica alle basse temperature (82,17) può essere ridotta alla forma diffusionale ¹⁾. Risolvendo il problema in questione, considereremo soltanto la parte della funzione φ indipendente da $\eta = \varepsilon - \mu$ e la denoteremo con $\varphi(\mathbf{p}_F)$ (al posto della notazione speciale $a(\mathbf{p}_F)$ accettata nel paragrafo precedente). Così come nel § 82, supporremo aperte le superfici di Fermi.

La funzione

$$\frac{\delta \tilde{n}}{(2\pi)^3} = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\varphi}{(2\pi)^3}$$

rappresenta un'aggiunta non in equilibrio alla distribuzione degli elettroni nello spazio dei vettori quantità di moto. Da questa distribuzione si può passare a quella sulla superficie di Fermi se scriviamo l'elemento di volume d^3p nella forma $d\varepsilon dS/v$ (74,19), integriamo in $d\varepsilon = d\eta$ e approssimiamo sostituendo l'elemento d'area della superficie isoenergetica dS e la velocità v che dipendono da ε con i loro valori dS_F e v_F sulla superficie di Fermi. La funzione φ , per ipotesi, non dipende da ε e l'integrazione del fattore $-\partial n_0/\partial \varepsilon$ dà 1. In tal modo, la densità della distribuzione sulla superficie di Fermi è data dall'espressione

$$\frac{\varphi(\mathbf{p}_F)}{(2\pi)^3 v_F}. \quad (83,1)$$

Per rendere più evidente la deduzione, scriviamo dapprima l'equazione cinetica (82,17) con la derivata parziale temporale al suo primo membro, come se la distribuzione fosse non stazionaria:

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - eE v_F \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = L_1(\varphi).$$

¹⁾ Nella deduzione che segue più avanti seguiamo il metodo proposto da R. N. Gur'zi e A. I. Kopeliovitš (1971).

Qui è già omissso il termine con L_0 , che scompare dopo l'integrazione dell'equazione rispetto a $d\eta/v_F$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi}{v_F} - \int L_1(\varphi) \frac{d\eta}{v_F} = - \frac{eE v_F}{v_F}. \quad (83,2)$$

Il primo termine a primo membro è la velocità di variazione della densità degli elettroni sulla superficie di Fermi. L'equazione deve avere la forma di un'equazione di continuità, cioè il secondo termine a primo membro deve rappresentare la divergenza della densità del flusso di elettroni s sulla superficie di Fermi; il termine con il campo elettrico a secondo membro dell'equazione svolge il ruolo della densità di sorgenti e di perdite. Qui si ha a che fare con la divergenza bidimensionale su una superficie curva; tuttavia, è più comodo scrivere in notazioni tridimensionali:

$$- \int L_1(\varphi) \frac{d\eta}{v_F} = \{\nabla_p - n_F (n_F \nabla_p)\} s. \quad (83,3)$$

∇_p è l'operatore ordinario di derivazione rispetto alle coordinate cartesiane nello spazio p , mentre l'operatore tra parentesi graffe ne è la proiezione sul piano tangente alla superficie di Fermi in ogni suo punto (n_F è il versore della normale alla superficie)¹⁾. Il vettore s (p_F) è dato sulla superficie di Fermi, ma nella (83,3) va considerato formalmente come assegnato in tutto lo spazio (e dipendente solo dalla direzione p_F). L'equazione cinetica (in cui omettiamo ora la derivata rispetto al tempo) assume la forma

$$\{\nabla_p - n_F (n_F \nabla_p)\} s = - eE \frac{v_F}{v_F}. \quad (83,4)$$

Il problema consiste nel trovare il flusso s , ossia la sua espressione attraverso la funzione φ .

Introduciamo il sistema di coordinate cartesiane nello spazio p , con l'asse z che coincide con la direzione della normale alla superficie di Fermi nel punto in cui si calcola s (p_F) e con l'origine in questo punto. La componente s_x del flusso è, per definizione, la differenza tra il numero di elettroni che, grazie agli urti intersecano (in 1 s) una banda di larghezza unitaria del piano yz da sinistra a destra (nella direzione positiva dell'asse x), e il numero di elettroni che intersecano questa banda da destra a sinistra.

¹⁾ Questo operatore figura nell'analogo bidimensionale del teorema di Gauss

$$\oint es \, dl = \int \{\nabla - n (n \nabla)\} s \, dS.$$

L'integrale a primo membro è esteso a un contorno chiuso giacente su un dato piano (e è il versore della normale esterna al contorno nel piano tangente alla superficie in un dato suo punto); l'integrale a secondo membro si calcola sulla parte della superficie delimitata dal contorno.

Consideriamo ora la differenza tra il numero di atti di emissione di fononi con quasi-quantità di moto \mathbf{k} in un dato intervallo d^3k da parte degli elettroni con quasi-quantità di moto nell'intervallo d^3p e il numero di atti inversi di assorbimento degli stessi fononi. Questa differenza (con segno opposto) è data dal primo termine dell'espressione integranda nella (79,9):

$$d^3p \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_k) (\varphi_{p'} - \varphi_p + \chi_k), \quad (83,5)$$

quando $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}$ ¹⁾. Qui la funzione fononica χ_k deve essere espressa attraverso φ secondo la (82,5):

$$\chi_k = -\frac{1}{v_{ph, e}} \int w(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_k) (\varphi_{p'} - \varphi_p) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \quad (83,6)$$

con $v_{ph, e}$ dalla (82,6).

Se $k_x < 0$, allora in seguito all'emissione di un fonone la banda considerata sarà attraversata (nella direzione da sinistra a destra) da elettroni la cui componente x della quasi-quantità di moto iniziale appartiene all'intervallo

$$k_x < p_x < 0; \quad (83,7a)$$

per questi p l'espressione (83,5) dà un contributo positivo al flusso s_x . Se, invece, $k_x > 0$, allora per emissione di un fonone la banda sarà attraversata (da destra a sinistra) da elettroni con

$$0 < p_x < k_x; \quad (83,7b)$$

il contributo corrispondente a s_x sarà negativo.

Da quanto detto risulta con chiarezza che per trovare s_x occorre: 1) integrare l'espressione (83,5) nell'intervallo unitario p_y e in tutta la regione di variazione di p_z ; essendo rapida la convergenza, l'ultima integrazione si può estendere da $-\infty$ a ∞ ; 2) integrare nell'intervallo (83,7) dei valori p_x . Poiché tutte le grandezze dipendono lentamente da p_x lungo la superficie di Fermi, questa integrazione si riduce semplicemente alla moltiplicazione per la lunghezza dell'intervallo; tenendo conto del segno con cui il risultato deve figurare in s_x , ciò significa semplicemente la moltiplicazione per $-k_x$; 3) infine, si deve integrare rispetto a d^3k .

La componente s_y del flusso differisce da s_x solo per la sostituzione nell'espressione integranda di k_x con k_y . Perciò si può scrivere il

¹⁾ Nelle considerazioni citate sopra abbiamo ommesso il fattore $(2\pi)^{-3}$ nella definizione della densità superficiale (83,4). Corrispondentemente omettiamo uno di questi fattori anche nella (83,5).

Ricordiamo anche la nostra convenzione di ammettere, nel caso delle superfici di Fermi aperte, i valori della quasi-quantità di moto degli elettroni in tutto il reticolo inverso (si veda il § 81); perciò la legge di conservazione della quasi-quantità di moto si scrive senza il termine b .

flusso nella forma vettoriale seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{p}_F) = \\ = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \left\{ \frac{\partial N_0}{\partial \omega} w(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}}) \right\} d p_z, \end{aligned} \quad (83,8)$$

dove κ è la proiezione di \mathbf{k} sul piano tangente nel punto \mathbf{p}_F .

Prima di tutto, scriviamo $d^3k = dk_z d^2\kappa$ e integriamo rispetto a k_z . Essendo piccolo \mathbf{k} , si può trasformare l'argomento della funzione delta nella (83,8):

$$\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}) \approx \delta(\mathbf{k} \mathbf{v}_F - \omega) = \frac{1}{v_F} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v_F}\right)$$

(la direzione \mathbf{v}_F coincide con la normale alla superficie di Fermi). L'integrazione rispetto a k_z elimina la funzione δ e contemporaneamente sostituisce k_z ovunque con ω/v_F . Ma poiché $\omega/v_F \sim k v_F \ll k$, allora si può porre semplicemente $k_z = 0$, sostituendo cioè

$$\mathbf{k} \rightarrow \kappa. \quad (83,9)$$

Si può integrare in forma generale anche rispetto a $d p_z = d\varepsilon/v_F$ in quanto solo la differenza

$$n_0(\varepsilon - \omega) - n_0(\varepsilon) \approx -\omega \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

è una funzione rapidamente variabile di ε nell'espressione integranda; l'integrazione rispetto a ε trasforma questo fattore in ω . Dopo queste operazioni l'espressione (83,8) assume la forma

$$\mathbf{s}(\mathbf{p}_F) = - \frac{1}{2\pi v_F^2} \int \kappa \omega_{\kappa} \frac{\partial N_0(\omega_{\kappa})}{\partial \omega_{\kappa}} w(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\kappa}) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2}. \quad (83,10)$$

Usando la limitatezza di \mathbf{k} scriviamo qui per la trasformazione ulteriore dell'integrale

$$\varphi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{p}) \approx -\mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \approx -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} = -\kappa t \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}},$$

dove $\mathbf{t} = \kappa/\kappa$ è il versore della tangente alla superficie di Fermi nella direzione κ . Poiché la stessa differenza è contenuta nell'integrale (83,6), si può rappresentare la funzione $\chi(\mathbf{k})$ nella forma

$$\chi(\mathbf{k}) = \chi^a(\mathbf{t}). \quad (83,11)$$

Infine, partendo dalla (79,4) rappresentiamo w nella forma

$$w = \kappa M(\mathbf{p}_F, \mathbf{t}). \quad (83,12)$$

Con queste notazioni abbiamo ora

$$s = -\frac{1}{2\pi\omega_F^2} \int t\kappa^3\omega_\kappa \frac{\partial N_0}{\partial\omega_\kappa} M \left(t\mathbf{a} - t \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}} \right) \frac{\kappa d\kappa d\phi}{(2\pi)^2}, \quad (83,13)$$

dove ϕ è l'angolo polare della direzione κ nel piano tangente.

L'integrazione rispetto a κ nella (83,13) si riduce al calcolo dell'integrale

$$J = \int_0^\infty \kappa^4 \omega_\kappa \frac{\partial N_0}{\partial\omega_\kappa} d\kappa;$$

essendo rapida la convergenza, si può estendere l'integrazione a ∞ . L'energia di un fonone con quasi-quantità di moto piccola $\kappa = \kappa t$ è $\omega_\kappa = u(t)\kappa$. Perciò

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{u^5} \int_0^\infty \omega^5 \frac{\partial N_0}{\partial\omega} d\omega = -\frac{5}{u^5} \int_0^\infty N_0 \omega^4 d\omega = \\ &= -\frac{5T^5}{u^5} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = -120\zeta(5) \frac{T^5}{u^5} \end{aligned}$$

(la funzione zeta vale $\zeta(5) = 1,037$).

Arriviamo così alla seguente espressione per la densità del flusso di elettroni lungo la superficie di Fermi:

$$s = -\frac{30\zeta(5)T^5}{\pi^2 v_F^2} \left\langle \frac{M(t)}{u^5(t)} t \left(t \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}} - t\mathbf{a} \right) \right\rangle, \quad (83,14)$$

dove le parentesi angolari indicano il valore medio calcolato rispetto alle direzioni \mathbf{t} nel piano tangente nel dato punto \mathbf{p}_F della superficie di Fermi. Resta da ottenere un'espressione semplificata al massimo per \mathbf{a} .

Secondo la definizione (83,11), dalla (83,6) ricaviamo

$$\mathbf{a} = \frac{\int M(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) (\partial\varphi/\partial\mathbf{p}) d^3p}{\int M(n'_0 - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) d^3p}$$

(si sono ridotti i fattori comuni al numeratore e al denominatore). Sostituiamo l'integrazione rispetto a d^3p (cfr. l'inizio di questo paragrafo) con quella rispetto a $dS_F d\varepsilon/v_F$. Da ε dipende solo il fattore $n_0(\varepsilon - \omega) - n_0(\varepsilon)$, uguale in ambedue gli integrali; i risultati dell'integrazione al numeratore e al denominatore si semplificano. Dopo questa operazione scriviamo l'argomento della funzione delta nella forma $\mathbf{k}\mathbf{v}_F - \omega \approx \kappa\mathbf{v}_F$ (trascurando le grandezze di ordine relativo u/v_F). Troviamo infine

$$\mathbf{a} = \frac{\int v_F^2 M \delta(\mathbf{n}t) (\partial\varphi/\partial\mathbf{p}) dS_F}{\int v_F^2 M \delta(\mathbf{n}t) dS_F} \quad (83,15)$$

(M è la funzione del punto p_F sulla superficie di Fermi e della direzione t ; n è il versore della normale). In virtù della presenza delle funzioni δ , gli integrali si calcolano di fatto soltanto lungo una linea sulla superficie di Fermi, sulla quale la normale è perpendicolare alla direzione t della quasi-quantità di moto del fonone.

Le formule (83,4) e (83,14-15) risolvono il problema della riduzione dell'equazione cinetica alla forma diffusionale. Questa equazione è integro-differenziale. La densità del flusso (83,14) si può scrivere nella forma

$$s_\alpha = -D_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\beta} - a_\beta \right), \quad (83,16)$$

dove

$$D_{\alpha\beta} = T^5 \frac{30\zeta(5)}{\pi^2 v_F^2} \left\langle \frac{M(t)}{u^5(t)} t_\alpha t_\beta \right\rangle \quad (83,17)$$

(α, β sono indici vettoriali bidimensionali). Il primo termine ha la forma differenziale ordinaria con il tensore dei coefficienti di diffusione $D_{\alpha\beta}$; questo termine è legato alla diffusione degli elettroni da parte dei fononi in equilibrio. Il secondo termine è integrale ed è legato all'effetto di trascinamento degli elettroni da parte dei fononi non in equilibrio.

La densità di corrente si calcola in base alla funzione φ come integrale

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{(2\pi)^3} \int \varphi \mathbf{n} dS_F.$$

Dall'equazione (83,4) con s dalle (83,16-17) risulta con chiarezza che la funzione φ (e con essa la conduttività del metallo) dipende dalla temperatura come T^{-5} , in accordo con il risultato ottenuto nel precedente paragrafo. Sottolineiamo che il trascinamento degli elettroni da parte dei fononi non cambia questa legge, benché incida sulla forma dell'equazione cinetica.

§ 84. Fenomeni galvanomagnetici in campi forti.

Teoria generale

Il parametro caratteristico adimensionale, che definisce l'influenza del campo magnetico sulla conduttività elettrica di un metallo, è il rapporto r_B/l , dove r_B è il raggio di Larmor dell'orbita elettronica e l la lunghezza del cammino libero.

Ricordiamo (si veda IX, § 57) che il moto degli elettroni di conduzione in un campo magnetico è praticamente sempre quasi-classico, il che è dovuto al valore molto piccolo del rapporto $\hbar\omega_B/e_F$ (dove ω_B è la frequenza di Larmor). Inoltre la traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto è il contorno dell'intersezione della superficie isoenergetica $\varepsilon(p) = \text{costante}$ con il piano $p_z = \text{costante}$,

e l'asse z è diretto lungo il campo. Siccome le energie degli elettroni sono vicine all'energia limite ε_F , allora anche le superfici isoenergetiche, di cui qui si può trattare, sono vicine alla superficie di Fermi. Perciò le dimensioni della traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto coincidono con le dimensioni lineari p_F della corrispondente sezione della superficie di Fermi. Nello spazio ordinario le dimensioni della traiettoria sono

$$r_B \sim cp_F/eB.$$

Questa grandezza è inversamente proporzionale al campo magnetico. Perciò nei fenomeni galvanomagnetici si devono ritenere deboli i campi per i quali $r_B \gg l$ e forti quelli per i quali

$$r_B \ll l. \quad (84,1)$$

Nel caso di campi magnetici deboli lo studio cinetico non conduce (per una legge di dispersione degli elettroni arbitraria) a qualcosa di nuovo rispetto ai risultati della teoria fenomenologica pura. Il carattere della dipendenza delle componenti del tensore di conduttività $\sigma_{\alpha\beta}$ dal campo magnetico corrisponde semplicemente in questo caso allo sviluppo in potenze di B con l'inclusione delle richieste imposte dal principio di simmetria dei coefficienti cinetici (si veda VIII, § 22).

Quanto ai campi magnetici forti, la precisazione di questa dipendenza richiede uno studio cinetico. La condizione di campo forte (84,1) si verifica difatti soltanto alle basse temperature, quando la lunghezza del cammino libero l è sufficientemente grande. In questo caso il metallo si trova di solito nella regione della sua resistenza residua legata alla diffusione degli elettroni sugli atomi di impurità; studieremo proprio questo caso. L'interazione tra elettroni di conduzione e atomo di impurità si realizza a distanze dell'ordine di grandezza della costante d del reticolo. Se $r_B \ll l$ e, al contempo, $r_B \gg d$, allora l'esistenza del campo magnetico non incide su questa interazione e, quindi, sull'integrale degli urti. In queste condizioni il carattere della dipendenza del tensore di conduttività dal campo magnetico risulta essere indipendente dalla forma concreta dell'integrale degli urti. Al tempo stesso questo carattere dipende fortemente dalla struttura dello spettro energetico degli elettroni di conduzione, ossia dalla forma della superficie di Fermi¹⁾.

Passiamo alla costruzione dell'equazione cinetica che descrive i fenomeni galvanomagnetici.

È opportuno ora esprimere la funzione di distribuzione non attraverso le componenti cartesiane della quasi-quantità di moto \mathbf{p} , bensì attraverso altre variabili legate alla traiettoria dell'elettro-

¹⁾ La teoria qui esposta appartiene a I. M. Lifšits, M. Ja. Azbel e M. I. Kaganov (1956).

ne: energia ε , componente della quasi-quantità di moto p_z lungo la direzione del campo magnetico (l'asse z) e « durata del moto dell'elettrone lungo la traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto » da un punto fisso al punto dato. L'ultima variabile (che denotiamo con la lettera τ) si introduce mediante l'equazione quasi-classica del moto descritto dall'elettrone di conduzione in un campo magnetico

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{e}{c} [\mathbf{vB}], \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}};$$

le componenti x e y di questa equazione si esprimono mediante le relazioni

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{e}{c} v_y B, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = \frac{e}{c} v_x B. \quad (84,2)$$

Calcolando la somma dei quadrati di queste equazioni e introducendo l'elemento di lunghezza ds della traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto nel piano xy ($ds^2 = dp_x^2 + dp_y^2$), otteniamo

$$d\tau = \frac{c}{eB} \frac{ds}{v_{\perp}}, \quad v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2; \quad (84,3)$$

è integrando questa uguaglianza che si definisce la nuova variabile τ in funzione delle vecchie variabili p_x, p_y, p_z .

Il primo membro dell'equazione cinetica nelle nuove variabili assume la forma ¹⁾

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial n}{\partial p_z} \dot{p}_z + \frac{\partial n}{\partial \tau} \dot{\tau}. \quad (84,4)$$

Come al solito, cercheremo la funzione di distribuzione nella forma

$$n = n_0(\varepsilon) + \tilde{\delta}n(\varepsilon, p_z, \tau). \quad (84,5)$$

È stato mostrato alla fine del § 74 che in campi elettrico e magnetico costanti l'equazione cinetica linearizzata rispetto a $\tilde{\delta}n$ per le quasi-particelle del liquido di Fermi si scrive allo stesso modo di quello in cui si scriverebbe se fosse espressa per le particelle del gas di Fermi. In questo caso le derivate $\dot{\varepsilon}$, \dot{p}_z , $\dot{\tau}$ si devono esprimere mediante l'equazione del moto di un singolo elettrone nel campo elettromagnetico

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{vB}]. \quad (84,6)$$

Da qui per la derivata $\dot{\varepsilon}$ ricaviamo

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{vE};$$

¹⁾ L'uso dell'equazione cinetica quasi-classica significa che si trascurano gli effetti legati alla quantizzazione dei livelli energetici nel campo magnetico. Questi effetti verranno studiati più avanti al § 90.

il campo magnetico è assente qui in quanto non compie alcun lavoro sulla carica. Inoltre, per un campo \mathbf{B} diretto lungo l'asse z abbiamo $p_z = -eE_z$. Infine, dal confronto delle equazioni (84,2) e (84,6) risulta che la derivata $d\tau/dt$ differisce da 1 soltanto tenendo conto del campo \mathbf{E} (non avremo bisogno di questa distinzione).

Poiché la funzione di distribuzione d'equilibrio n_0 dipende unicamente da ε , e ε , p_z , τ sono variabili indipendenti, allora $\partial n_0 / \partial p_z = 0$, $\partial n_0 / \partial \tau = 0$. Il campo elettrico è supposto piccolo a piacere; nel linearizzare l'equazione cinetica i termini che contengono contemporaneamente le piccole grandezze $\delta \tilde{n}$ e \mathbf{E} vanno omissi. Allora l'equazione (84,4) si riduce a

$$\frac{dn}{dt} \approx -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e v E + \frac{\partial \delta \tilde{n}}{\partial \tau}.$$

Rappresentiamo $\delta \tilde{n}$ nella forma

$$\delta \tilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e E g, \quad g = g(\varepsilon, p_z, \tau) \quad (84,7)$$

(cfr. la (78,6)). Allora il primo membro dell'equazione cinetica assume la forma definitiva

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e E \left(-\mathbf{v} + \frac{\partial g}{\partial \tau} \right). \quad (84,8)$$

Dopo la linearizzazione l'integrale degli urti a secondo membro dell'equazione cinetica si scrive

$$\text{St } n = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e E I(g) \quad (84,9)$$

(ricordiamo che nell'integrale degli urti che descrive la diffusione elastica sugli atomi di impurità, qualsiasi fattore in $\delta \tilde{n}$ dipendente unicamente da ε può essere portato fuori dal segno di integrale); non avremo bisogno della forma concreta dell'operatore integrale lineare $I(g)$.

Uguagliando le espressioni (84,8) e (84,9) otteniamo infine l'equazione cinetica che definisce la funzione g :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - I(g) = \mathbf{v}. \quad (84,10)$$

Il tensore di conduttività è dato dall'integrale (78,9):

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2 \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} v_{\alpha} g_{\beta} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Il passaggio in questo integrale a nuove variabili si effettua mediante la sostituzione $d^3p \rightarrow |J| d\varepsilon dp_z d\tau$, dove

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)}$$

è lo jacobiano della trasformazione. Lo si può dedurre facilmente dalle equazioni (84,2) che definiscono la variabile τ . Scrivendo ambedue i membri, diciamo della prima di queste equazioni, sotto forma degli jacobiani

$$\frac{\partial(p_x, \varepsilon, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)} = -\frac{eB}{c} \frac{\partial(\varepsilon, p_x, p_z)}{\partial(p_y, p_x, p_z)},$$

e moltiplicando ambedue i membri di questa uguaglianza per $\partial(p_y, p_x, p_z)/\partial(\varepsilon, p_x, p_z)$, troviamo $|J| = eB/c$. Trascurando lo smussamento della distribuzione n_0 sotto l'influsso della temperatura, poniamo, come di solito, $\partial n_0/\partial \varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ e otteniamo infine l'espressione

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^3 B}{c(2\pi\hbar)^3} \int v_\alpha g_\beta d\tau dp_z, \quad (84,11)$$

dove si integra sulla superficie di Fermi.

Secondo la definizione (84,3), la variabile τ è proporzionale a $1/B$. Perciò il termine $\partial g/\partial \tau$ nell'equazione lineare (84,10) è proporzionale a B e, quindi, grande rispetto agli altri termini. Ciò permette di risolvere l'equazione con il metodo delle approssimazioni successive sotto forma di serie di potenze di $1/B$

$$g = g^{(0)} + g^{(1)} + \dots, \quad (84,12)$$

dove $g^{(n)} \propto B^{-n}$. Per i termini di questa serie abbiamo le equazioni seguenti:

$$\frac{\partial g^{(0)}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \tau} = I(g^{(0)}) + v, \quad \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \tau} = I(g^{(1)}), \dots \quad (84,13)$$

Le soluzioni di queste equazioni sono

$$\begin{aligned} g^{(0)} &= C^{(0)}, \\ g^{(1)} &= \int_0^\tau [I(C^{(0)}) + v(\tau)] d\tau + C^{(1)}, \\ g^{(2)} &= \int_0^\tau I(g^{(1)}) d\tau + C^{(2)}, \dots, \end{aligned} \quad (84,14)$$

dove $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$ sono funzioni soltanto di ε e p_z .

¹⁾ Analogamente a quanto fatto al § 59 per il calcolo dei coefficienti cinetici del plasma in un campo magnetico forte.

La funzione g deve soddisfare certe condizioni. Se le traiettorie nello spazio dei vettori quantità di moto degli elettroni (cioè i contorni delle sezioni della superficie di Fermi con i piani $p_z = \text{costante}$) sono chiuse, il moto degli elettroni è periodico; corrispondentemente, la funzione $g(\varepsilon, p_z, \tau)$ deve essere anch'essa periodica rispetto alla variabile τ (di periodo T dipendente da p_z). Se la traiettoria è aperta, il moto nello spazio dei vettori quantità di moto sarà infinito e la funzione g dovrà soddisfare solo la condizione di finitezza.

Calcoliamo la media dell'equazione (84,13) rispetto a τ . Se le funzioni g sono periodiche, allora il valore medio per un periodo

$$\frac{\overline{\partial g}}{\partial \tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial g}{\partial \tau} d\tau = \frac{g(T) - g(0)}{T}$$

è nullo poiché $g(T) = g(0)$. Se le funzioni g non sono periodiche, la media si calcola per un intervallo infinito di τ e il valore medio si annulla in quanto g è finito. Quindi, in tutti i casi il calcolo della media dà

$$\overline{I(g^{(0)})} \equiv \overline{I(C^{(0)})} = -\bar{v}, \quad \overline{I(g^{(1)})} = 0, \dots; \quad (84,15)$$

queste relazioni definiscono, in linea di principio, $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$

Passando al calcolo del tensore di conduttività, ricordiamo preliminarmente alcune sue proprietà generali note dalla teoria fenomenologica (si veda VIII, § 22).

Secondo il principio di simmetria dei coefficienti cinetici,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \quad (84,16)$$

Il tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ si può dividere nelle parti simmetrica e antisimmetrica:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}. \quad (84,17)$$

Tenendo conto della (84,16), otteniamo per queste parti

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{B}) &= \sigma_{\beta\alpha}^{(s)}(\mathbf{B}) = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(-\mathbf{B}), \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}(\mathbf{B}) &= -\sigma_{\beta\alpha}^{(a)}(\mathbf{B}) = -\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}(-\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (84,18)$$

In tal modo le componenti $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ sono funzioni pari di \mathbf{B} e $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ funzioni dispari. Al posto del tensore antisimmetrico $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ si può introdurre il suo vettore duale assiale a secondo la definizione

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{zx} = a_y, \quad a_{yz} = a_x.$$

Allora le componenti del vettore densità di corrente saranno rappresentate nella forma

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} E_\beta + [\mathbf{E} \mathbf{a}]_\alpha. \quad (84,19)$$

La dissipazione di energia al passare della corrente è definita solo dalla parte simmetrica del tensore di conduttività $\mathbf{jE} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} E_\alpha E_\beta$. Allo stesso modo si può sviluppare anche il tensore inverso $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ nelle parti simmetrica e antisimmetrica, duale del vettore assiale \mathbf{b} . Allora \mathbf{E} si esprime in funzione di \mathbf{j} mediante la formula

$$E_\alpha = \rho_{\alpha\beta}^{(s)} j_\beta + [\mathbf{j}\mathbf{b}]_\alpha. \quad (84,20)$$

Il termine $[\mathbf{Ea}]$ nella corrente, o il termine $[\mathbf{j}\mathbf{b}]$ nel campo elettrico, descrivono l'effetto Hall.

§ 85. Fenomeni galvanomagnetici in campi forti.

Casi particolari

Traiettorie chiuse

Iniziamo dai casi in cui tutte (cioè per tutti i p_z) le traiettorie nello spazio dei vettori quantità di moto degli elettroni per una data direzione di \mathbf{B} sono chiuse. Le traiettorie, per ogni direzione di \mathbf{B} , sono sempre chiuse su superfici di Fermi chiuse. Quanto alle superfici di Fermi aperte, qui sono possibili casi di traiettorie chiuse qualunque sia la direzione di \mathbf{B} , così come casi in cui le sezioni sono chiuse soltanto per determinate direzioni del campo (o in determinati intervalli).

Durante il moto lungo una traiettoria chiusa (nel piano xy) le velocità medie in questo piano sono nulle: $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$; ciò risulta con chiarezza dalle equazioni del moto (84,2) se si tiene conto che, dopo aver descritto la traiettoria, p_x e p_y tornano ai valori iniziali. Il valore \bar{v}_z , invece, è sempre diverso da zero in quanto il moto è infinito nella direzione del campo. La prima delle uguaglianze (84,15) ora dà

$$\overline{I(C_x^{(0)})} = \overline{I(C_y^{(0)})} = 0,$$

da cui $C_x^{(0)} = C_y^{(0)} = 0$ ¹⁾. In questo caso la soluzione (84,14) assume la forma

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} + \dots, \\ g_y &= -\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(1)} + g_y^{(2)} + \dots, \\ g_z &= C_z^{(0)} + g_z^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (85,1)$$

(la funzione $v(\tau)$ è integrata mediante le equazioni (84,2)).

¹⁾ Non esiste alcuna ragione perché l'equazione omogenea lineare $\overline{I(C)} = 0$ abbia altre soluzioni tranne quella banale $C = 0$.

Le componenti del tensore di conduttività si calcolano in base alla formula (84,11). Così,

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[\frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} \right] d\tau dp_z$$

(v_x è espressa nuovamente mediante la (84,2)). Poiché $C_x^{(1)}$ è indipendente da τ , l'integrazione dei primi due termini rispetto a τ si riduce all'integrazione delle derivate $dp_y^2/d\tau$ e $dp_y/d\tau$ e dà zero. Quindi, è solo il termine con $g_x^{(2)}$ a fornire un contributo all'integrale in modo che $\sigma_{xx} \propto B^{-2}$.

In seguito calcoliamo

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[-\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(1)} \right] d\tau dp_z.$$

L'integrazione del secondo termine dà nuovamente zero e nel primo termine abbiamo

$$\oint p_x \frac{dp_y}{d\tau} d\tau = \int p_x dp_y = \pm S(p_z),$$

dove $S(p_z)$ è l'area della sezione della superficie di Fermi con il piano $p_z = \text{costante}$. I segni $+$ e $-$ si riferiscono rispettivamente ai casi in cui all'interno del contorno si trova la regione di energie più piccole o più grandi, cioè quando la traiettoria chiusa è di elettroni o di buche (si veda IX, § 61); indichiamo l'area S nel primo caso con S_e e nel secondo con S_h . La differenza di segno in questi casi è dovuta al cambiamento di direzione in cui viene descritta la traiettoria. L'integrazione dell'area S rispetto a p_z dà il volume Ω dello spazio dei vettori quantità di moto compreso all'interno della superficie di Fermi (se le traiettorie chiuse si trovano su una superficie di Fermi aperta, allora Ω è il volume delimitato da questa superficie e dalle facce della cella del reticolo inverso). Quindi,

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{B} \frac{2(\Omega_h - \Omega_e)}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{ec}{B} (N_h - N_e), \quad (85,2)$$

dove Ω_e e Ω_h sono i volumi delle cavità di elettrone e di buca della superficie di Fermi. Le grandezze

$$N_e = \frac{2\Omega_e}{(2\pi\hbar)^3}, \quad N_h = \frac{2\Omega_h}{(2\pi\hbar)^3}$$

rappresentano rispettivamente i numeri degli stati elettronici occupati con energie $\varepsilon < \varepsilon_F$ e degli stati liberi con $\varepsilon > \varepsilon_F$ (riferiti all'unità di volume del cristallo). Nel caso delle superfici di Fermi chiuse queste nozioni hanno un significato ben determinato e le grandezze N_e e N_h rappresentano la caratteristica dello spettro elettronico del metallo, indipendente dalla direzione di \mathbf{B} ; nel caso delle superfici di Fermi aperte il significato di queste grandezze diventa

più convenzionale, in quanto queste ultime possono risultare dipendenti dalla direzione di \mathbf{B} .

L'espressione (85,2) è una funzione dispari di \mathbf{B} e perciò figura nella parte antisimmetrica del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ ⁽¹⁾. Quanto alla componente $\sigma_{xy}^{(s)}$ della parte simmetrica del tensore, essa è definita dal termine successivo dello sviluppo σ_{xy} , proporzionale a B^{-2} .

Analogamente è definita la dipendenza da B delle altre componenti del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$. Così,

$$\sigma_{zz} = \frac{2e^3 B}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \oint v_z C_z^{(0)} d\tau dp_z.$$

L'integrazione rispetto a τ fornisce il fattore B^{-1} , mentre $C_z^{(0)}$ è indipendente da B ; perciò σ_{zz} stessa è indipendente da B .

Come risultato troviamo che

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \text{costante}, \quad \text{le altre } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \propto B^{-2}, \quad a \propto B^{-1}. \quad (85,3)$$

In questo caso tutte le componenti $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ e a dipendono dalla forma dell'integrale degli urti, tranne la sola

$$a_z = \frac{ec}{B} (N_h - N_e).$$

È da notare che tutte le componenti del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$, ad eccezione solo della σ_{zz} , tendono a zero per $B \rightarrow \infty$. La causa fisica di questo comportamento risiede nella localizzazione degli elettroni su orbite piccole rispetto alla lunghezza del cammino libero; il valore finito di σ_{zz} è dovuto al fatto che il moto degli elettroni lungo il campo magnetico resta sempre infinito.

Il rapporto r_B/l serve da piccolo parametro dello sviluppo. Perciò le componenti $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ proporzionali a B^{-2} si possono stimare come ordine di grandezza in

$$\sigma^{(s)} \sim \sigma_0 (r_B/l)^2, \quad \sigma_0 \sim Ne^2 l / p_F.$$

Sottolineiamo che $\sigma^{(s)} \propto 1/l$; ciò vuol dire che all'aumentare della lunghezza del cammino la conduttività trasversale nel campo magnetico tende a zero e non all'infinito come in assenza di campo.

Quanto alle componenti della parte antisimmetrica del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$, esse sono stimate in

$$\sigma^{(a)} \sim \sigma_0 r_B / l \sim ecN/B.$$

Sottolineiamo, tuttavia, che l'indipendenza di questa stima da l non significa indipendenza dei valori esatti di $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ dalla forma con-

¹⁾ Dalla deduzione dell'equazione cinetica risulta chiaro che B entra in essa non come modulo del vettore \mathbf{B} , bensì come proiezione $B_z = B$. La sostituzione $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ richiede perciò anche la sostituzione $B \rightarrow -B$ nelle formule scritte.

creta dell'integrale degli urti (fanno eccezione solo le $\sigma_{xy}^{(a)}$); il calcolo esatto del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ richiederebbe la definizione completa delle funzioni $C^{(1)}$ e $g^{(2)}$ mediante la soluzione dell'equazione cinetica concreta.

Dalla (85,3) si possono ricavare anche le leggi limite di dipendenza delle componenti del tensore inverso $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ da B^{-1}). Conservando solo i termini di ordine più basso in $1/B$ troviamo

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{costante}, \quad b_x, b_y = \text{costante}, \quad b_z \propto B, \quad (85,4)$$

inoltre, tutte queste grandezze dipendono dalla forma dell'integrale degli urti, ad eccezione di

$$b_z \approx -\frac{1}{a_z} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}. \quad (85,5)$$

Tutte le componenti $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ tendono a limiti costanti per $B \rightarrow \infty$.

Un'analisi particolare richiedono i metalli compensati in cui $N_e = N_h$. In questo caso l'espressione (85,2) si annulla e lo sviluppo di $\sigma_{xy}^{(a)}$ inizia dal termine proporzionale a B^{-3} . Quindi, in questo caso

$$a_x, a_y \propto B^{-1}, \quad a_z \propto B^{-3}; \quad (85,6)$$

quanto alla dipendenza di $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ da B , essa resta invariata. Per il tensore inverso ora abbiamo

$$\rho_{zz}^{(s)} = \text{costante}, \quad \rho_{yz}^{(s)}, \quad \rho_{xz}^{(s)} = \text{costante}, \quad (85,7)$$

$$\rho_{xy}^{(s)}, \quad \rho_{xx}^{(s)}, \quad \rho_{yy}^{(s)} \propto B^2, \quad b \propto B.$$

Traiettorie aperte

Per i metalli con superfici di Fermi aperte, che ammettono traiettorie aperte, sono possibili i casi più disparati e qui ne consideriamo uno solo che illustra le particolarità caratteristiche della situazione che si viene a creare.

Consideriamo una superficie di Fermi del tipo a « cilindro profilato », che passa con continuità da una cella del reticolo inverso in quelle successive (fig. 30). Se il campo magnetico non è perpendicolare all'asse del cilindro, tutte le sezioni sono chiuse; in questo

¹⁾ Il tensore inverso deve essere calcolato, ovviamente, in base alla somma $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ e soltanto dopo questa operazione si divide nelle parti simmetrica e antisimmetrica. In tal modo si possono ottenere le formule

$$\rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{1}{\sigma} \{ \sigma_{\alpha\beta}^{(s)-1} \sigma^{(s)} + a_{\alpha} a_{\beta} \}, \quad b_{\alpha} = -\frac{1}{\sigma} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} a_{\beta},$$

dove $\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} a_{\alpha} a_{\beta}$ è il determinante del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma^{(s)}$ il determinante della sua parte simmetrica (si veda VIII, il problema del § 22).

caso la dipendenza asintotica di $\sigma_{\alpha\beta}$ da B è data dalla legge precedente (85,3).

Se, invece, il campo magnetico è perpendicolare all'asse del cilindro, allora esistono sezioni aperte. Come sempre, consideriamo l'asse z diretto lungo il campo; l'asse x , invece, facciamo coincidere con l'asse del cilindro (nella fig. 31 è rappresentato il taglio di

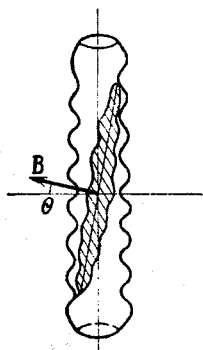


Fig. 30

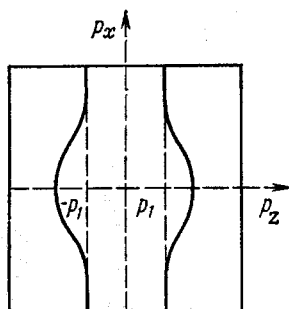


Fig. 31

una parte della superficie di Fermi in una cella). Le traiettorie sono aperte per $|p_z| < |p_1|$ e, inoltre, infinite nella direzione dell'asse p_x . Le velocità medie sono

$$\bar{v}_x = \frac{c}{eB} \frac{d\bar{p}_y}{d\tau} = 0, \quad \bar{v}_y = -\frac{c}{eB} \frac{d\bar{p}_x}{d\tau} \neq 0,$$

poiché p_x varia senza limiti; come sempre, $\bar{v}_z \neq 0$. Fra le componenti del vettore $C^{(0)}$ nella soluzione dell'equazione cinetica saranno non nulle $C_y^{(0)}$ e $C_z^{(0)}$, perciò nella soluzione dell'equazione cinetica (85,1) alla seconda riga verrà sostituita l'espressione

$$g_y = C_y^{(0)} + g_y^{(1)} + \dots$$

Analogamente a quanto fatto sopra troviamo ora che

$$\sigma_{xx}^{(s)} \propto B^{-2}, \quad \text{le altre } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{costante}, \quad a_x \propto B^{-3}, \quad a_y, a_z \propto B^{-1}.$$

(85,8)

Da qui per il tensore inverso otteniamo

$$\rho_{xx}^{(s)} \propto B^2, \quad \text{le altre } \rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{costante}, \quad b_x \propto B^{-1}, \quad b_y, b_z \propto B. \quad (85,9)$$

Osserviamo una forte anisotropia della resistenza nel piano perpendicolare al campo magnetico: la resistenza ρ_{yy} lungo l'asse y tende

a un limite costante, mentre nella direzione dell'asse x essa cresce all'aumentare del campo proporzionalmente al suo quadrato ¹⁾.

Un'altra particolarità caratteristica delle proprietà galvanomagnetiche dei metalli con superficie di Fermi aperta è la loro accentuata dipendenza dalla direzione di un campo magnetico forte. In questo caso la variazione ha luogo nell'avvicinarsi della direzione di \mathbf{B} al piano perpendicolare all'asse del cilindro, quando avviene il passaggio dalle leggi (85,3-4) a quelle (85,8-9). Quando la direzione di \mathbf{B} ha una pendenza di un piccolo angolo θ rispetto al piano suindicato (si veda la fig. 30), le dimensioni della traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto dell'elettrone diventano grandi, cioè dell'ordine di p_F/θ , dove p_F sono le dimensioni trasversali della superficie di Fermi cilindrica. Rispettivamente diventa grande anche la dimensione della traiettoria nello spazio proprio, cioè dell'ordine di r_B/θ , dove r_B è il raggio di Larmor corrispondente alla quantità di moto p_F . Nella regione di angoli, per cui $r_B/\theta l \sim 1$, lo sviluppo in potenze di r_B/l usato sopra diventa inapplicabile; è la regione in cui avviene la variazione della dipendenza della resistenza dal campo.

Sottolineiamo che in tutta l'esposizione si trattava, ovviamente, di monocristalli. In un campione policristallino si considera la media delle proprietà galvanomagnetiche anisotrope, che dipende dalla distribuzione delle direzioni dei cristalli.

Analogamente si potrebbero studiare i fenomeni termomagnetici in un metallo in un campo magnetico forte. In questo caso risulterebbe, in particolare, che le componenti del tensore della conducibilità termica elettronica tendono a zero per $B \rightarrow \infty$. Ma per queste condizioni, in cui diventa importante il trasporto di calore da parte dei fononi, sorge la necessità di includere anche l'interazione elettrone-fonone e tutto il quadro diventa molto complesso.

§ 86. Effetto skin anomalo

Come è noto dall'elettrodinamica macroscopica, un campo elettromagnetico variabile si smorza all'interno del conduttore; assieme al campo risulta essere concentrata nello strato superficiale del conduttore anche la corrente elettrica generata da questo campo (il cosiddetto *effetto skin*). Ricordiamo in proposito alcune formule (si veda VIII, §§ 58-60).

¹⁾ Ricordiamo (si veda IX, § 57) che la traiettoria dell'elettrone nel piano xy dello spazio reale differisce dalla traiettoria nel piano $p_x p_y$ dello spazio dei vettori quantità di moto soltanto per la variazione della scala e per una rotazione di 90° . Perciò nel caso in questione il moto dell'elettrone nello spazio reale è infinito nella direzione dell'asse y .

Il campo elettromagnetico quasi-stazionario in un metallo verifica le equazioni di Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (86,1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (86,2)$$

(il metallo è supposto non magnetico in modo che in esso $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). In questo caso è supposta, ovviamente, soddisfatta la condizione generale di applicabilità delle equazioni macroscopiche: le distanze δ alle quali il campo varia fortemente sono grandi rispetto alle dimensioni atomiche. Se, per di più, queste distanze sono grandi anche rispetto alla lunghezza del cammino libero l degli elettroni di conduttività, allora il legame tra la densità di corrente \mathbf{j} e il campo \mathbf{E} è data da relazioni lineari che legano i valori in un medesimo punto dello spazio: $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$, dove $\sigma_{\alpha\beta}$ è il tensore di conduttività. In queste condizioni l'effetto skin si dice *normale*. Consideriamolo supponendo il mezzo isotropo (o un cristallo a simmetria cubica); allora il tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ si riduce a uno scalare in modo che $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Supponiamo condizioni geometriche elementari, con il metallo che occupa il semispazio ($x > 0$) limitato dal piano $x = 0$. Al metallo è applicato un campo elettrico omogeneo esterno che è parallelo alla sua superficie e varia nel tempo con frequenza ω . Le equazioni (86,1-2) assumono la forma

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (86,3)$$

In virtù della simmetria del problema le distribuzioni di tutte le grandezze nel metallo saranno funzioni solo della coordinata x . Allora dalla prima equazione (86,3) deriva che il campo magnetico \mathbf{B} è ovunque parallelo al piano della frontiera. Possiamo verificare tutte le equazioni supponendo che anche il campo elettrico \mathbf{E} si trovi ovunque nello stesso piano. Inoltre sarà soddisfatta automaticamente anche la condizione al contorno richiesta dell'annullarsi della componente della corrente normale sulla superficie del metallo: da $E_x = 0$ segue che ovunque è anche $j_x = 0$ ¹⁾.

Escludendo \mathbf{B} dalle prime due equazioni (86,3) troviamo

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} \mathbf{E}.$$

Per il campo tangenziale dipendente solo dalla x abbiamo $\text{div } \mathbf{E} = 0$ e l'equazione diventa

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} \mathbf{E}, \quad (86,4)$$

¹⁾ La situazione cambia in un mezzo anisotropo. Perché la detta condizione sia soddisfatta è necessario introdurre accanto al campo elettrico tangenziale anche quello normale alla superficie.

dove l'apice indica la derivazione rispetto a x . La sua soluzione, che si annulla per $x \rightarrow \infty$, è

$$E = E_0 e^{-i\omega t} e^{(1-i)x/\delta}, \quad (86,5)$$

dove E_0 è l'ampiezza del campo sulla superficie del metallo e

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}. \quad (86,6)$$

La grandezza δ si chiama *profondità di penetrazione* del campo; essa decresce all'aumentare della frequenza del campo. Il campo magnetico nel metallo si smorza secondo la stessa legge; dalle equazioni (86,3) risulta che E e B sono legati ovunque dalla relazione $E = \zeta [Bn]$, dove n è il versore della normale alla superficie (diretta all'interno del metallo, cioè nella direzione positiva dell'asse x) e

$$\zeta = (1-i) \frac{\omega\delta}{2c} = (1-i) \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}. \quad (86,7)$$

Questa relazione lega, in particolare, anche i valori dei campi sulla superficie stessa del metallo:

$$E_0 = \zeta [B_0 n]. \quad (86,8)$$

La grandezza ζ si chiama *impedenza superficiale* del metallo. Ricordiamo che la sua parte reale determina la dissipazione dell'energia del campo nel metallo (si veda VIII, § 87).

Affinché si stabilisca il legame $j = \sigma E$ tra la corrente e il campo elettrico in uno stesso punto dello spazio e in uno stesso istante, la lunghezza l del cammino libero degli elettroni e la sua durata $\tau \sim 1/v_F$ devono soddisfare le condizioni $l \ll \delta$ e $\tau\omega \ll 1$: l deve essere piccola rispetto alla distanza caratteristica di variazione del campo δ e τ piccolo rispetto al periodo del campo. Se è violata la prima di queste condizioni, il legame tra la corrente e il campo cessa di essere locale e compare la dispersione spaziale della conduttività. La violazione della seconda condizione implica la comparsa della dispersione della frequenza della conduttività. Per precisare il legame tra la corrente e il campo bisogna ricorrere all'equazione cinetica.

In tal modo, il carattere dell'effetto skin dipende dalla grandezza relativa delle tre dimensioni caratteristiche: δ , l e v_F/ω . All'effetto skin normale descritto dalle formule (86,5-8) corrisponde la regione di frequenze più basse per cui

$$l \ll \delta, \quad l \ll v_F/\omega. \quad (86,9)$$

All'aumentare della frequenza del campo o all'aumentare della lunghezza del cammino libero (al diminuire della temperatura del metallo) la profondità di penetrazione diminuisce. Nei metalli di solito dapprima è violata la condizione $\delta \gg l$ e il legame tra la corrente e il campo diventa non locale; l'effetto skin in queste condizio-

ni si chiama *anomalo*. In questo paragrafo considereremo il caso limite anomalo in cui

$$\delta \ll l, \quad \delta \ll v_F/\omega. \quad (86,10)$$

La relazione tra l e v_F/ω può essere arbitraria ¹⁾.

Iniziamo la soluzione del problema al contorno dell'effetto skin col problema ausiliario del legame esistente in un metallo illimitato tra la corrente e il campo elettrico variabile nel tempo e nello spazio

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Il vettore d'onda del campo è supposto soddisfare le disuguaglianze

$$1/k \ll l, \quad 1/k \ll v_F/\omega, \quad (86,11)$$

corrispondenti alle condizioni (86,10). Assieme al campo varierà secondo la stessa legge anche l'aggiunta δn alla funzione di distribuzione degli elettroni.

In virtù della condizione $v_F k \gg v_F/l \sim 1/\tau$, nell'equazione cinetica si può trascurare l'integrale degli urti $\text{St } n \sim \delta n/\tau$ rispetto al termine contenente le derivate spaziali $\mathbf{v} \cdot \partial n / \partial \mathbf{r} \sim v_F k \delta n$. In virtù della condizione $k v_F \gg \omega$, invece, si può trascurare anche la derivata rispetto al tempo $\partial n / \partial t \sim \omega \delta n$.

In forza di quest'ultima omissione, l'equazione cinetica per le quasi-particelle del liquido di Fermi elettronico si riduce nuovamente all'equazione per il gas mediante la ridefinizione della funzione di distribuzione, ossia mediante la sostituzione di δn con $\delta \tilde{n}$ dalla (74,13). In questo caso dopo aver trascurato i termini suindicati l'equazione cinetica assume la forma semplice

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta \tilde{n}}{\partial \mathbf{r}} - e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Ponendovi

$$\frac{\partial \delta \tilde{n}}{\partial \mathbf{r}} = i k \delta \tilde{n}, \quad \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

da qui ricaviamo

$$\delta \tilde{n} = - \frac{i e E v}{k v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}. \quad (86,12)$$

Questa espressione ha un polo per $k v = 0$. Nel calcolare la corrente

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta \tilde{n} \frac{2 d^3 p}{(2\pi \hbar)^3}$$

¹⁾ L'uguaglianza $\delta \sim l$ si ottiene per $\omega \sim c^2/\sigma l^2$, cioè (se si ricorre alla stima $\sigma \sim l e^2 N / p_F$) per $\omega \sim c^2 p_F / e^2 l^2 N$. Questo valore è compatibile con la disuguaglianza $\delta \sim l \ll v_F/\omega$ se $l \gg c/\Omega$, dove $\Omega \sim (N e^2 / m^*)^{1/2}$ è la frequenza di plasma del metallo ($m^* \sim p_F / v_F$ è la massa efficace degli elettroni di conduttività). Per i metalli ordinari $\Omega \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ s}^{-1}$.

questo polo va aggirato mediante la sostituzione $\mathbf{k}\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{k}\mathbf{v} - i0$ ¹⁾:

$$\mathbf{j} = ie^2 \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v})}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i0} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (86,13)$$

Trascurando, come al solito, lo smussamento della funzione di distribuzione d'equilibrio sotto l'influsso della temperatura, scriviamo $\partial n_0 / \partial \varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ e trasformiamo l'integrale in d^3p in integrale esteso alla superficie di Fermi secondo la formula (74,20). In accordo con una nota formula della geometria differenziale, l'elemento d'area è $dS = do_v / K$, dove do_v è l'elemento di angolo solido per la direzione della normale \mathbf{v} alla superficie e K la curvatura di Gauss della superficie, cioè il prodotto inverso $K = 1/R_1 R_2$ dei suoi raggi di curvatura principali in un dato punto. Osservando anche che la direzione della normale alla superficie di Fermi in ogni punto coincide con la direzione della velocità $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$, otteniamo

$$\mathbf{j} = - \frac{2ie^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v})}{K(\mathbf{v})} \frac{do_v}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i0}. \quad (86,14)$$

Definendo la direzione \mathbf{v} mediante gli angoli azimutale e polare φ e θ relativamente alla direzione \mathbf{k} presa come asse polare, avremo $\mathbf{k}\mathbf{v} = k \cos \theta$, $do_v = \sin \theta d\varphi d\theta$.

L'integrazione nella (86,14) rispetto alla variabile $\mu = \cos \theta$ è estesa all'intervallo $-1 \leq \mu \leq 1$ dell'asse reale con l'aggiramento del polo $\mu = 0$ lungo la semicirconferenza inferiore. È facile vedere che l'integrale esteso ai segmenti rettilinei (cioè il valore principale dell'integrale) si annulla in modo che resta solo il contributo proveniente dall'aggiramento del polo. A tal fine osserviamo che in virtù della parità della funzione $\varepsilon(\mathbf{p})$ la superficie di Fermi $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$ è invariante rispetto alla sostituzione $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$; poiché il cambiamento di segno in \mathbf{p} cambia anche il segno del vettore della normale \mathbf{v} , ne segue che $K(-\mathbf{v}) = K(\mathbf{v})$. Perciò l'integrale nella (86,14) si può rappresentare nella forma

$$\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v}) do_v}{K(\mathbf{v}) (\mathbf{k}\mathbf{v} - i0)} - \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v}) do_v}{K(\mathbf{v}) (\mathbf{k}\mathbf{v} + i0)} \right\},$$

dove tra parentesi è compresa la somma degli integrali che si ottengono l'uno dall'altro mediante la sostituzione della variabile d'integrazione $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$; da questa espressione deriva con evidenza l'affermazione fatta.

Nel polo dell'espressione integranda $\mathbf{k}\mathbf{v} = k \cos \theta = 0$, cioè la normale \mathbf{v} è perpendicolare alla direzione assegnata del vettore d'onda \mathbf{k} . Il residuo rispetto alla variabile $\cos \theta$ è dato, quindi,

¹⁾ Ciò corrisponde alla sostituzione ordinaria $\omega \rightarrow \omega + i0$ nella differenza $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$.

dall'integrale

$$\int \frac{v(Ev)}{kK(v)} d\varphi,$$

esteso a una curva che rappresenta il luogo geometrico dei punti della superficie di Fermi, nei quali $v \perp k$.

In tal modo troviamo infine il legame tra la corrente e il campo nella forma

$$j_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}(k) E_{\beta}, \quad (86,15)$$

dove

$$\sigma_{\alpha\beta}(k) = \frac{2\pi e^2 A_{\alpha\beta}}{(2\pi\hbar)^3 k}, \quad A_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{K(\varphi)} d\varphi \quad (86,16)$$

è il tensore reale nel piano perpendicolare a k ; se la direzione k è presa come asse x , gli indici α e β assumono i valori y, z . Il vettore j appartiene interamente a questo piano, cioè è trasversale rispetto a k .

Sottolineiamo che il contributo alla corrente proviene unicamente dagli elettroni con $vk = 0$, che si muovono cioè perpendicolarmente al vettore d'onda. Questa è la conseguenza naturale dell'approssimazione in cui la lunghezza del cammino libero è supposta grande a piacere: nel muoversi sotto un certo angolo rispetto alla direzione di k , l'elettrone nel suo moto libero attraversa il campo oscillante nello spazio e queste oscillazioni smorzano l'azione totale del campo sull'elettrone. Nell'approssimazione successiva, tenendo conto che il prodotto kl è finito, il contributo alla corrente proverrebbe già dagli elettroni che si muovono nel piccolo intervallo di angoli $\sim 1/kl$ rispetto al piano perpendicolare alla direzione di k .

Passiamo ora direttamente al problema della penetrazione del campo per effetto skin anormale. Qui abbiamo a che fare con il problema del semispazio che deve essere risolto con l'inclusione delle condizioni al contorno sulla superficie del metallo. Le condizioni al contorno per la funzione di distribuzione dipendono dalle proprietà fisiche della superficie nei confronti degli elettroni incidenti. È importante, tuttavia, che in questo caso alla creazione della corrente partecipino soprattutto gli elettroni che volano quasi parallelamente alla superficie del metallo (questi elettroni si dicono *scivolanti*). Per elettroni di questo tipo la legge di riflessione è indipendente, in misura notevole, dal grado di perfezione della superficie del metallo ed è vicina a quella *speculare*, vale a dire che gli elettroni vengono riflessi con cambiamento di segno della componente della velocità v normale alla superficie e con le componenti tangenziali invariate (per non interrompere l'esposizione, torneremo su questo problema alla fine del paragrafo).

Alla riflessione speculare corrisponde la condizione al contorno per la funzione di distribuzione:

$$\delta \tilde{n}(v_x, v_y, v_z) = \delta \tilde{n}(-v_x, v_y, v_z) \quad \text{per } x = 0. \quad (86,17)$$

Per questa condizione il problema del semispazio è equivalente al problema del mezzo illimitato in cui il campo è distribuito simmetricamente da ambo le parti del piano $x = 0$: $E(t, x) = E(t, -x)$. Inoltre agli elettroni, riflessi dalla frontiera nel problema del semispazio ($x > 0$), corrispondono nel problema dello spazio illimitato gli elettroni che hanno attraversato senza ostacolo il piano $x = 0$ dalla parte $x < 0$.

Nel problema dell'effetto skin limite anormale si può supporre che il campo E (dipendente solo dalla coordinata x) sia diretto ovunque parallelamente al piano $x = 0$. Secondo la (86,15) allo stesso piano appartiene anche il vettore corrente j e perciò è soddisfatta automaticamente la condizione di annullamento sulla superficie metallica della componente della corrente normale a questa superficie ¹⁾.

Senza l'ipotesi $j = \sigma E$ al posto della (86,4) otteniamo l'equazione

$$E'' = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j, \quad (86,18)$$

che esprime il vettore bidimensionale E . In seguito, supporremo omissso in tutte le funzioni il fattore temporale $\exp(-i\omega t)$ in modo che E, j, \dots saranno funzioni solo della x .

La funzione $E(x)$ prolungata simmetricamente alla regione $x < 0$ è continua per $x = 0$. Ma la derivata $E'(x)$, essendo una funzione dispari di x , ha una discontinuità per $x = 0$ e cambia di segno al passare della variabile x attraverso lo zero. Secondo l'equazione (86,1) queste derivate sono legate al campo magnetico mediante la relazione

$$E' = \frac{i\omega}{c} [Bn],$$

dove n è di nuovo il versore dell'asse x . Nel problema del semispazio avremmo perciò per $x = 0$ la condizione $E' = i\omega [B_0 n]/c$, dove B_0 è il campo sulla frontiera del metallo. Nel problema del mezzo illimitato a ciò corrisponde la condizione

$$E'(+0) - E'(-0) = 2 \frac{i\omega}{c} [B_0 n].$$

¹⁾ Nelle approssimazioni successive, tenendo conto che il rapporto δ/l è finito, accanto alle componenti $\sigma_{\alpha\beta}$ del tensore di conduttività compariranno anche le componenti $\sigma_{\alpha x}, \sigma_{xx}$. Affinché sia soddisfatta la condizione al contorno $j_x = 0$ si deve introdurre anche un campo E_x normale alla superficie (come è stato già detto nella nota a pag. 431).

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione (86,18) per e^{-ikx} e integriamo rispetto a x nei limiti da $-\infty$ a $+\infty$ ¹⁾. Nel primo membro dell'equazione scriviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} E'' e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^0 (E' e^{-ikx})' dx + \int_0^{\infty} (E' e^{-ikx})' dx + ik \int_{-\infty}^{\infty} E' e^{-ikx} dx.$$

Poiché il campo $E(x)$ si annulla all'infinito, i primi due integrali danno proprio la differenza $E'(-0) - E'(0)$. Nell'ultimo termine, invece, a causa della continuità della funzione stessa $E(x)$ si può già integrare semplicemente per parti. Come risultato abbiamo l'uguaglianza

$$\frac{2i\omega}{c} [B_0 n] + k^2 E(k) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j(k),$$

dove $E(k)$ e $j(k)$ sono le immagini di Fourier delle funzioni $E(x)$ e $j(x)$.

Secondo la (86,15) queste immagini di Fourier sono mutuamente legate dalla relazione $j_{\alpha}(k) = \sigma_{\alpha\beta}(k) E_{\beta}(k)$. Servendoci di questa relazione, troviamo per l'immagine di Fourier del campo la seguente espressione:

$$E_{\alpha}(k) = \zeta_{\alpha\beta}(k) [B_0 n]_{\beta}, \quad (86,19)$$

dove $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ è un tensore bidimensionale ottenibile dal suo inverso:

$$\zeta_{\alpha\beta}^{-1}(k) = -\frac{c}{2i\omega} \left[k^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{\alpha\beta}(|k|) \right]. \quad (86,20)$$

L'argomento delle funzioni $\sigma_{\alpha\beta}$ è scritto come $|k|$ per ricordare che qui figura il modulo del vettore k .

La funzione stessa $E(x)$ si ottiene dalla (86,19) mediante moltiplicazione per $\exp(ikx)$ e integrazione rispetto a $dk/2\pi$. Essendo le funzioni $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ pari, abbiamo

$$E_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \zeta_{\alpha\beta}(k) \cos kx dk \cdot [B_0 n]_{\beta}. \quad (86,21)$$

In particolare, il campo sulla frontiera del metallo vale

$$E_{0\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} [B_0 n]_{\beta}, \quad \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \zeta_{\alpha\beta}(k) dk. \quad (86,22)$$

¹⁾ I calcoli ulteriori coincidono formalmente con l'andamento della soluzione del problema della penetrazione di un campo magnetico in un superconduttore in IX, § 52.

Per il calcolo concreto dell'impedenza superficiale consideriamo gli assi y e z diretti lungo gli assi principali del tensore simmetrico $\sigma_{\alpha\beta}(k)$. Assieme a $\sigma_{\alpha\beta}$ si riduce agli assi principali anche il tensore $\zeta_{\alpha\beta}$ e i suoi valori principali

$$\zeta^{(\alpha)} = -\frac{2i\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - ib^{(\alpha)}/k}, \quad b^{(\alpha)} = \frac{\omega e^2 A^{(\alpha)}}{\pi c^2 \hbar^3},$$

dove $A^{(\alpha)}$ sono i valori principali del tensore $A_{\alpha\beta}$. L'integrazione conduce al risultato ¹⁾

$$\zeta^{(\alpha)} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{2\pi^{1/3} \hbar}{3^{3/2}} \left(\frac{\omega^2}{ce^2 A^{(\alpha)}} \right)^{1/3}. \quad (86,23)$$

Le grandezze $A^{(\alpha)}$ dipendono unicamente dalle caratteristiche della superficie di Fermi, cioè dalla forma e dalle dimensioni. È da notare che l'impedenza (86,23) non dipende affatto dalla lunghezza del cammino libero degli elettroni. Per stimare l'ordine di grandezza si può supporre che i raggi di curvatura della superficie di Fermi $\sim p_F$; allora $A \sim p_F^2$ e

$$\zeta \sim \left(\frac{\hbar^3 \omega^2}{ce^2 p_F^2} \right)^{1/3}. \quad (86,24)$$

Ricordiamo che la parte reale dell'impedenza determina la dissipazione dell'energia del campo nel metallo. Nell'approssimazione considerata (a prescindere dagli urti tra elettroni) questa dissipazione ha la natura dello smorzamento di Landau ²⁾.

La legge dello smorzamento del campo elettrico all'interno del metallo per effetto skin anormale non è esponenziale e perciò la nozione della profondità di penetrazione in questo caso non ha significato letterale, come nel caso (86,5). A causa della presenza del

¹⁾ Il cammino d'integrazione (semiasse reale destro) si può ruotare di un angolo $-\pi/6$ nel piano della variabile complessa k senza intersecare in questo caso i poli dell'espressione integranda. Integrando lungo la semiretta $k = u \exp(-i\pi/6)$ abbiamo

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{k dk}{k^3 - ib} = e^{i\pi/6} \int_0^\infty \frac{u du}{u^3 + b}$$

e, dopo la sostituzione $u^3 + b = b/\xi$,

$$I = \frac{e^{i\pi/6}}{3b^{1/3}} \int_0^1 \xi^{-2/3} (1-\xi)^{-1/3} d\xi = \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(2/3)}{3b^{1/3} \Gamma(1)} e^{i\pi/6} = \frac{\pi (\sqrt{3} + i)}{3^{3/2} b^{1/3}}.$$

²⁾ Il primo a indicare i fenomeni che costituiscono l'essenza dell'effetto skin anormale è stato *H. London* (1940). La teoria qualitativa di questo effetto è stata data da *A. B. Pippard* (1947), mentre la teoria quantitativa qui esposta appartiene a *G. E. Reuter* e *E. H. Sondheimer* (1948).

fattore oscillante $\cos kx$ nell'espressione integranda della (86,21) l'integrale è definito soprattutto (per x dato) dalla regione di valori $k \sim 1/x$. La funzione $E(x)$ decresce notevolmente quando questi valori $k \gg b^{1/3}$ ¹⁾. Perciò la profondità di penetrazione come ordine di grandezza vale $\delta \sim b^{-1/3}$ oppure

$$\delta \sim \left(\frac{c^2 \hbar^3}{\omega e^2 A} \right)^{1/3} \sim \left(\frac{c^2 \hbar^3}{\omega e^2 p_F^2} \right)^{1/3}. \quad (86,25)$$

All'aumentare della frequenza questa profondità continua a decrescere, ma più lentamente che per l'effetto normale. Le grandezze definite dalle espressioni (86,6) e (86,25) (indichiamole come δ_{norm} e δ_{anom}) sono confrontabili come ordine di grandezza quando $\delta \sim l$. Poiché una di esse decresce come $\omega^{-1/2}$ e l'altra come $\omega^{-1/3}$, è chiaro che per un medesimo valore di ω abbiamo $\delta_{\text{anom}}^3 \sim \delta_{\text{norm}}^2 l$.

Infine facciamo qualche osservazione circa il carattere della riflessione degli elettroni da parte della frontiera del metallo. Se la superficie è perfetta (senza difetti) e coincide con qualche piano cristallino, la disposizione degli atomi sulla superficie gode di una periodicità corrispondente alla simmetria di traslazione del reticolo cristallino. In questo caso per riflessione dell'elettrone si conservano insieme all'energia anche le componenti tangenziali p_y , p_z della sua quasi-quantità di moto. Quanto alla componente normale della quasi-quantità di moto dell'elettrone riflesso, cioè p'_x , essa è definita rispetto al valore p_x dell'elettrone incidente mediante l'equazione

$$\varepsilon(p'_x, p_y, p_z) = \varepsilon(p_x, p_y, p_z), \quad (86,26)$$

dove deve essere $v'_x = \partial \varepsilon / \partial p'_x > 0$, vale a dire che l'elettrone riflesso si muove nella direzione della frontiera (la velocità dell'elettrone incidente $v_x = \partial \varepsilon / \partial p_x < 0$). L'equazione (86,26) può avere alcune di queste radici, in generale, $v'_x \neq -v_x$.

Ma per gli elettroni incidenti scivolanti tra queste radici se ne trova sempre una corrispondente a una variazione piccola della quasi-quantità di moto, inoltre $v'_x = -v_x$ (cioè la riflessione è speculare nel senso letterale del termine). Infatti, per un elettrone che si muove quasi parallelamente alla frontiera la derivata $v_x = \partial \varepsilon / \partial p_x$ è piccola; ciò vuol dire che sulla superficie isoenergetica nello spazio \mathbf{p} all'elettrone corrisponde il punto P , posto nell'intorno del punto di estremo dell'energia e come funzione di p_x , cioè del punto in cui $\partial \varepsilon / \partial p_x = 0$. Ma nell'intorno di questo punto, dall'altra parte dell'estremo esiste sempre un punto P' in cui il valore della derivata $\partial \varepsilon / \partial p_x$ differisce dal valore nel punto P solo per il segno.

Si può mostrare che la riflessione di un elettrone scivolante con probabilità massima avviene proprio con questo cambiamento

¹⁾ Per $x \gg \delta$ l'integrale (86,21) è definito dai valori $k \ll b^{1/3}$. In questo caso $\zeta(k) \sim k$ e il campo $E(x)$ decresce come x^{-2} .

della quasi-quantità di moto. Per di più, questa affermazione resta valida anche per riflessione da parte di una superficie imperfetta che abbia delle asperità delle dimensioni atomiche allorché, a rigore, la legge di conservazione delle componenti tangenziali della quasi-quantità di moto non esiste più. La spiegazione intuitiva è che la funzione d'onda dell'elettrone scivolante varia lentamente lungo l'asse x e perciò « non sente » le asperità atomiche della superficie ¹⁾.

Presenta interesse il fatto che il valore dell'impedenza superficiale per effetto skin limite anormale diventa in generale poco sensibile al carattere della riflessione degli elettroni. Così, per riflessione diffusoriale (quando tutte le direzioni dell'elettrone riflesso sono equiprobabili indipendentemente dall'angolo di incidenza) il valore dell'impedenza differisce dalla (86,23) solo per il fattore 9/8. La condizione al contorno per riflessione diffusoriale da parte di una superficie piana si formula come $\delta \tilde{n}$ ($v_x > 0$, $v_y, v_z = 0$ per $x = 0$). In questo caso, tuttavia, il metodo di Fourier diventa inapplicabile e il problema si risolve con il cosiddetto metodo di Wiener-Hopf ²⁾.

§ 87. Effetto skin nella regione infrarossa

Abbiamo studiato così i due casi limite dell'effetto skin: l'effetto normale, quando la più piccola tra le tre dimensioni caratteristiche δ , l e v_F/ω è la lunghezza del cammino libero l , e l'effetto anormale, quando la più piccola è la profondità di penetrazione δ . Ora consideriamo il terzo caso, quando la lunghezza più piccola è

$$v_F/\omega \ll \delta, \quad v_F/\omega \ll l. \quad (87,1)$$

A questo caso giungiamo in modo naturale dall'effetto skin anormale per l'ulteriore aumento della frequenza; sebbene in questo caso la profondità di penetrazione decresca, il prodotto $\omega\delta$ cresce come $\omega^{2/3}$. Nei metalli ordinari le condizioni (87,1) si realizzano nella regione infrarossa.

Le condizioni (87,1) delimitano la regione di frequenza dal basso. Ma la validità dei risultati, che verranno esposti più avanti e basati sulla teoria del liquido di Fermi, è delimitata anche dall'alto dalla condizione $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$. La violazione di questa condizione implicherebbe l'eccitazione di quasi-particelle dalla profondità della distribuzione di Fermi, che non hanno senso nei limiti della teoria del liquido di Fermi.

Per determinare il legame tra la corrente e il campo elettrico bisogna di nuovo ricorrere all'equazione cinetica. Ma ora il termine con la derivata temporale, in virtù della condizione $\omega \gg v_F/\delta$, è

¹⁾ La dimostrazione delle affermazioni fatte si può trovare nell'articolo di A. F. Andreev, UFN, 1971, v. 105, p. 113.

²⁾ Si veda G. E. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., 1948, v. A195, p. 336.

grande rispetto al termine con le derivate spaziali e, in virtù della condizione $\omega \gg v_F/l$, grande anche rispetto all'integrale degli urti. Dopo aver trascurato questi termini l'equazione cinetica assume la forma

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} - eE v \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Scrivendo $\partial \delta n / \partial t = -i\omega \delta n$, ricaviamo

$$\delta n = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \psi, \quad \psi = \frac{eE v}{i\omega}. \quad (87,2)$$

L'assenza nell'equazione cinetica del termine con le derivate rispetto alle coordinate significa assenza di dispersione spaziale. In questo senso l'effetto skin diventa nuovamente « normale ». La presenza del termine con la derivata rispetto al tempo conduce, tuttavia, alla dispersione di frequenza della conduttività. La situazione è la stessa che nel calcolo della costante dielettrica in un plasma senza urti. La differenza consiste solo nell'anisotropia del metallo e negli effetti del liquido di Fermi. Questi ultimi si manifestano nel seguente modo: la densità di corrente si esprime con un integrale che dipende non soltanto dalla distribuzione δn , ma anche dalla funzione di interazione delle quasi-particelle (degli elettroni di conduttività) $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Sottolineiamo che a causa della presenza nell'equazione cinetica del termine $\partial \delta n / \partial t$ è impossibile escludere l'interazione tra le quasi-particelle mediante l'introduzione della distribuzione $\delta \tilde{n}$.

Secondo le (74,21-22), la densità di corrente è espressa con la correzione alla funzione di distribuzione degli elettroni mediante la formula

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \left[\psi(\mathbf{p}_F) + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}'_F) \psi(\mathbf{p}'_F) \frac{dS'_F}{v'_F (2\pi\hbar)^3} \right] \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3},$$

dove \mathbf{v} è il versore della direzione della velocità \mathbf{v}_F , coincidente con il vettore normale alla superficie di Fermi. Sostituendovi la funzione ψ dalla (87,2), troviamo il legame tra la corrente e il campo nella forma $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\omega) E_\beta$, dove il tensore di conduttività

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{e^2}{i\omega m} N_{\alpha\beta}^{(eff)},$$

$$N_{\alpha\beta}^{(eff)} = \int v_\alpha \left[v_F v_\beta + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}'_F) v'_\beta \frac{dS'_F}{(2\pi\hbar)^3} \right] \frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (87,3)$$

La simmetria del tensore $N_{\alpha\beta}^{(eff)}$ è definita dalla simmetria del cristallo (e non dipende dalla direzione del campo come nella (86,15)). In un cristallo a simmetria cubica (che per semplicità supporremo più

avanti) questo tensore, così come $\sigma_{\alpha\beta}$, si riduce a uno scalare, $N_{\alpha\beta}^{(\text{eff})} = N^{(\text{eff})} \delta_{\alpha\beta}$, e allora

$$\sigma(\omega) = -\frac{e^2}{im\omega} N^{(\text{eff})}. \quad (87,4)$$

La descrizione delle proprietà di un metallo mediante questa conduttività si può sostituire nel modo comune con la descrizione mediante la costante dielettrica

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N^{(\text{eff})}. \quad (87,5)$$

La notazione $N^{(\text{eff})}$ è introdotta qui per analogia (si veda VIII, § 78) con la nota espressione limite della costante dielettrica alle frequenze molto alte: $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N / m\omega^2$, dove N è il numero totale di elettroni nell'unità di volume della sostanza. Quindi, la grandezza $N^{(\text{eff})}$ nell'ottica infrarossa dei metalli svolge il ruolo del numero efficace di elettroni e dipende dalla funzione d'interazione tra gli elettroni di conduttività.

Accanto al numero $N^{(\text{eff})}$ è opportuno introdurre anche la frequenza efficace di plasma

$$\Omega = \left(\frac{4\pi e^2}{m} N^{(\text{eff})} \right)^{1/2}. \quad (87,6)$$

Allora la conduttività si scrive nella forma

$$\sigma = i\Omega^2/4\pi\omega. \quad (87,7)$$

La grandezza Ω è definita solo dai parametri dello spettro elettronico del metallo; in una stima approssimativa essa coincide perciò con il parametro ε_F/\hbar , ossia con l'energia al contorno di Fermi. Poiché la teoria esposta è limitata dalla condizione $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$, allora $\Omega \gg \omega$.

La penetrazione del campo nel metallo è descritta dall'equazione (86,4) che dopo la sostituzione di σ dalla (87,7) diventa

$$\mathbf{E}'' - \frac{\Omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0.$$

La sua soluzione, che si annulla per $x \rightarrow \infty$, è

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta}, \quad \delta = c/\Omega \quad (87,8)$$

(per metalli tipici $c/\Omega \sim 10^{-5}$ cm). Quindi, il campo si smorza secondo una legge esponenziale, con profondità di penetrazione indipendente dalla frequenza. Il legame tra campo elettrico e magnetico ora è dato (come è facile vedere mediante la prima delle equazioni (86,3)) dalla relazione (86,8) con l'impedenza

$$\zeta = -\frac{i\omega}{c} \delta = -\frac{i\omega}{\Omega}. \quad (87,9)$$

L'impedenza immaginaria pura significa la completa riflessione dell'onda elettromagnetica da parte della superficie del metallo senza dissipazione. Questo risultato è naturale, in quanto nell'approssimazione considerata sono stati trascurati gli urti tra elettroni quale fonte di dissipazione.

Notiamo che con l'inclusione della (87,7) le condizioni fondamentali di applicabilità della teoria studiata si possono scrivere come

$$\Omega \gg \omega \gg \Omega v_F/c. \quad (87,10)$$

La prima disuguaglianza è compatibile con $\hbar\omega \gg \Theta$ (Θ è la temperatura di Debye). In questo caso il parametro di Fermi v_F e la funzione f nella formula (87,3) devono essere considerati non sulla superficie di Fermi stessa, bensì per $|\varepsilon - \varepsilon_F| \gg \Theta$. Come è stato mostrato in IX, § 65, l'interazione elettrone-fonone fa sì che v_F in questa regione differisce da v_F nella regione $|\varepsilon - \varepsilon_F| \ll \Theta$ (importante, ad esempio, per le proprietà statiche del metallo alle basse temperature); lo stesso vale per la funzione d'interazione delle quasiparticelle f .

§ 88. Onde elicoidali in un metallo

Il fatto che il campo elettromagnetico variabile esterno non penetra all'interno del metallo significa, in altre parole, che in un metallo è impossibile la propagazione di onde elettromagnetiche non smorzantisi, con frequenze fino a quella del plasma, $\omega \sim \Omega$.

La situazione, tuttavia, cambia radicalmente in presenza di un campo magnetico costante B . Il campo magnetico cambia il carattere del moto degli elettroni e con ciò incide fortemente sulle proprietà elettromagnetiche del metallo. È fondamentale inoltre che il moto diventi finito nel piano perpendicolare al campo. Nei campi forti, quando il raggio di Larmor dell'orbita $r_B \sim cp_F/eB$ diventa piccolo rispetto alla lunghezza del cammino libero,

$$r_B \ll l \quad (88,1)$$

(oppure, il che è lo stesso, $\omega_B \tau \gg 1$, dove $\omega_B \sim v_F/r_B \sim eB/m^*c$ è la frequenza di Larmor, $\tau \sim l/v_F$ è la durata del cammino libero), la conduttività elettrica nelle direzioni trasversali al campo diminuisce bruscamente tendendo a zero per $B \rightarrow \infty$. Si può dire che in queste direzioni il metallo si comporta come un dielettrico, per cui diminuisce la dissipazione dell'energia nelle onde, con il campo elettrico polarizzato nel piano perpendicolare a B . In altre parole, diventa possibile la propagazione di queste onde come processo che non si smorza (in prima approssimazione). Inoltre le frequenze possibili delle onde sono limitate dalla condizione

$$\omega \ll \omega_B; \quad (88,2)$$

soltanto con questa condizione le traiettorie descritte dagli elettroni riescono ad incurvarsi sensibilmente durante un periodo del campo, il che implica la variazione delle proprietà elettromagnetiche del metallo relativamente a queste frequenze.

La finitezza del moto dell'elettrone (nel piano perpendicolare a \mathbf{B}) suppone anche la finitezza della traiettoria nello spazio dei vettori quantità di moto, cioè della sezione della superficie di Fermi. Perciò quanto detto sopra si riferisce a metalli con superfici di Fermi chiuse, qualunque sia la direzione di \mathbf{B} , e a metalli con superfici aperte soltanto per quelle direzioni di \mathbf{B} per cui le sezioni sono chiuse. Per sezioni aperte il moto degli elettroni nel campo magnetico resta infinito, la conduttività non decresce e la propagazione delle onde elettromagnetiche nelle direzioni corrispondenti risulta essere impossibile.

Le onde elettromagnetiche che non si smorzano in un metallo si possono considerare quali rami di Bose dello spettro energetico del liquido di Fermi elettronico. Il carattere macroscopico di queste onde si manifesta nella grandezza elevata (rispetto alla costante del reticolo) delle lunghezze d'onda. Questa è la ragione per cui a queste eccitazioni corrisponde un volume di fase relativamente molto piccolo e per cui il loro contributo alle grandezze termodinamiche del metallo è trascurabile.

Scriviamo di nuovo le equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (88,3)$$

dove con $\tilde{\mathbf{B}}$ è indicato il campo magnetico debole variabile dell'onda (a differenza del campo costante \mathbf{B}). Escludiamo $\tilde{\mathbf{B}}$ da queste equazioni:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Da qui ricaviamo l'onda piana monocromatica

$$(-k_\alpha k_\gamma + k^2 \delta_{\alpha\gamma}) E_\gamma = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_\alpha. \quad (88,4)$$

Esprimiamo il campo \mathbf{E} in funzione della corrente secondo $E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} j_\beta$, dove $\rho_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1}$ è il tensore della resistenza specifica. Allora otteniamo il sistema di equazioni lineari omogenee

$$\left[k^2 \rho_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \rho_{\gamma\beta} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta_{\alpha\beta} \right] j_\beta = 0. \quad (88,5)$$

Il suo determinante dà l'equazione che esprime la legge di dispersione delle onde.

Ai §§ 84, 85 è stata trovata la forma del tensore di conduttività di un metallo (nella regione della sua resistenza residua) in un campo magnetico forte, nel caso stazionario. Vediamo ora in che modo questi risultati devono essere modificati per il caso non stazionario.

La periodicità temporale e spaziale del campo elettrico (e anche della parte variabile della funzione di distribuzione degli elettroni) implica la comparsa a primo membro dell'equazione cinetica dei termini

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} = -i\omega \delta n + ik\mathbf{v} \delta n$$

(cfr. la (74,25)). Analogamente alla (84,7) rappresentiamo le funzioni δn e $\delta \tilde{n}$ nella forma

$$\delta n = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} eEh, \quad \delta \tilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} eEg.$$

In accordo con la (74,21) le funzioni h e g sono mutuamente legate dalla relazione integrale lineare

$$g = h + \int f(p, p') h' \frac{dS'_F}{v'_F (2\pi\hbar)^3} \equiv \hat{L}h.$$

Quindi, l'equazione cinetica assume la forma

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - [I(g) + i\omega \hat{L}^{-1}g - i(k\mathbf{v})g] = \mathbf{v}. \quad (88,6)$$

Essa differisce dall'equazione precedente (84,10) per la sostituzione del termine $I(g)$ con l'espressione fra parentesi quadre. Questa espressione dipende ora non soltanto dal carattere della diffusione degli elettroni sugli atomi di impurità, ma anche dalla funzione della loro interazione reciproca.

In virtù della condizione $r_B \ll l$, il termine $I(g)$ nell'equazione (88,6) è piccolo rispetto al termine $\partial g / \partial \tau$, così come era piccolo anche nella vecchia equazione (84,10). In virtù della condizione $\omega \ll \omega_B$, il termine $i\omega \hat{L}^{-1}g \sim i\omega g$ è anch'esso piccolo. Imponiamo ancora una condizione al vettore d'onda: $kv_F \ll \omega_B$, cioè

$$kr_B \ll 1, \quad (88,7)$$

vale a dire che la lunghezza d'onda deve essere grande rispetto al raggio di Larmor. Allora sarà piccolo anche l'ultimo termine tra parentesi quadre nella (88,6). Per queste condizioni resta valido il metodo di soluzione dell'equazione cinetica con le approssimazioni successive sviluppato al § 84, così come restano validi anche i risultati là ottenuti per i primi termini dello sviluppo del tensore di conduttività nelle potenze di $1/B$. Ma la presenza di ω e k nell'equazione (88,6) implicherà, in generale, una dispersione della conduttività nelle frequenze e nello spazio.

La presenza di più parametri caratteristici di lunghezza e di tempo e la varietà delle proprietà geometriche delle superfici di Fermi conducono alla varietà di fenomeni legati alla propagazione delle onde elettromagnetiche nei metalli. Ci limiteremo allo studio (in questo paragrafo e in quello successivo) di alcuni casi caratteristici.

Consideriamo un metallo non compensato con la superficie di Fermi chiusa. In accordo con le formule (85,4-5), la più grande componente del tensore di resistenza è

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}; \quad (88,8)$$

essa si riferisce alla parte non dissipativa (antihermitiana) del tensore. Questa componente non dipendeva in generale dalla forma dell'integrale degli urti e, quindi, non dipende neanche dalla forma dell'espressione tra parentesi quadre nell'equazione (88,6). Vuol dire che la formula (88,8) resta valida anche per il campo dell'onda.

La descrizione del mezzo mediante il tensore di resistenza $\rho_{\alpha\beta}$ (o mediante il tensore di conduttività $\sigma_{\alpha\beta}$) equivale alla descrizione mediante il tensore della costante dielettrica

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i \sigma_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{\omega \rho_{\alpha\beta}}{4\pi i}.$$

In questo caso il tensore $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ ha le sole componenti

$$\epsilon_{xy}^{-1} = -\epsilon_{yx}^{-1} = \frac{\omega B}{4\pi i c e (N_e - N_h)}.$$

Questa espressione coincide con quella studiata al § 56 in relazione alle onde elicoidali nel plasma (differenziandosi da essa solo per la sostituzione della densità elettronica N_e con la differenza $N_e - N_h$). Perciò i risultati ottenuti al § 56 si estendono direttamente alle onde studiate nei metalli, dette anch'esse *elicoidali* ¹⁾.

La legge di dispersione di queste onde è

$$\omega = \frac{cB |\cos \theta|}{4\pi e |N_e - N_h|}, \quad (88,9)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{k} e \mathbf{B} . Il campo elettrico dell'onda è polarizzato ellitticamente nel piano perpendicolare al campo magnetico \mathbf{B} . Considerando (come al § 56) la direzione di \mathbf{B} come asse z e il piano xz passante attraverso le direzioni di \mathbf{k} e \mathbf{B} , avremo per il campo elettrico

$$E_y = \pm i |\cos \theta| E_x, \quad (88,10)$$

dove il segno superiore si riferisce al caso $N_e > N_h$ e il segno inferiore al caso $N_e < N_h$.

¹⁾ La possibilità della propagazione di queste onde nei metalli è stata indicata da O. V. Konstantinov e V. I. Perel (1960).

§ 89. Onde magnetoplasmiche in un metallo

Consideriamo ora le onde in un metallo compensato ($N_e = N_h$) con la superficie di Fermi chiusa. Oltre alle condizioni necessarie (88,1-2) supporremo soddisfatte anche le disuguaglianze

$$\omega \gg v_F/l, \quad \omega \gg kv_F. \quad (89,1)$$

In virtù della prima di queste disuguaglianze, l'integrale degli urti $I(\mathbf{g})$ nell'equazione cinetica (88,6) è piccolo rispetto al termine $i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g}$ e, in virtù della seconda condizione, il termine $i(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{g}$ è piccolo anch'esso. Trascurando questi termini otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{v}, \quad (89,2)$$

che differisce dall'equazione (84,10) per la sostituzione del termine $I(\mathbf{g})$ con $i\omega\hat{L}^{-1}\mathbf{g}$.

Perciò i risultati ottenuti al § 85 per il tensore di resistenza nel caso stazionario resteranno validi, con la sola distinzione che ora il piccolo parametro dello sviluppo in potenze di $1/B$ sarà non r_B/l , bensì $-i\omega/\omega_B$. La dispersione spaziale della conduttività non esiste, ma si verifica quella nelle frequenze.

In accordo con la (85,7), nel caso stazionario i termini principali dello sviluppo delle componenti del tensore della resistenza specifica per un metallo compensato sono

$$\rho_{zz} = \text{costante}; \quad \rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy} \propto B^2; \quad \rho_{xz}, \rho_{yz} \propto B. \quad (89,3)$$

Per separare il parametro r_B/l in questo tensore si deve, però, precisare come entrano nelle sue componenti B e anche l . A tal fine scriviamo, ad esempio, la stima

$$\rho_{xx} \sim \rho_0 \left(\frac{l}{r_B} \right)^2 \sim \frac{B}{ecN} \frac{l}{r_B},$$

dove $\rho_0 \sim p_F/Ne^2l$. Analogamente,

$$\rho_{yz} \sim \rho_0 \frac{l}{r_B} \sim \frac{B}{ecN}, \quad \rho_{zz} \sim \rho_0 \sim \frac{B}{ecN} \frac{r_B}{l}.$$

Effettuando ora la sostituzione suindicata del parametro di sviluppo, troviamo il tensore $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ nella forma

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{B}{ecN} \begin{pmatrix} \frac{\omega_B}{-i\omega} a_{xx} & \frac{\omega_B}{-i\omega} a_{xy} & a_{xz} \\ \frac{\omega_B}{-i\omega} a_{xy} & \frac{\omega_B}{-i\omega} a_{yy} & a_{yz} \\ -a_{xz} & -a_{yz} & \frac{-i\omega}{\omega_B} a_{zz} \end{pmatrix}, \quad (89,4)$$

dove tutti gli $a_{\alpha\beta} \sim 1$ sono coefficienti reali adimensionali; le grandezze N e m^* (in $\omega_B = eB/m^*c$) vanno considerate qui come parametri appropriati dell'ordine di grandezza richiesto. Tutti i termini nella (89,4) si riferiscono alla parte antihermitiana del tensore, cioè non dissipativa. Perciò è chiaro a priori che l'inclusione di questi termini soli condurrà ad onde non smorzantisi.

Nel caso generale di direzioni di B e k arbitrarie la legge di dispersione delle onde si esprime mediante formule sufficientemente complicate. Limitiamoci a un caso particolare che rivela le proprietà fondamentali di queste onde.

Supponiamo ora che il reticolo cristallino del metallo goda di simmetria di ordine superiore al secondo e che il campo B (l'asse z) sia diretto lungo questo asse. Le grandezze a_{xx} , a_{yy} , $a_{xy} = a_{yx}$ costituiscono un tensore simmetrico bidimensionale nel piano xy , che in virtù della simmetria supposta si riduce allo scalare: $a_{xx} = a_{yy} \equiv a_1$, $a_{xy} = 0$. Le grandezze a_{xz} , a_{yz} costituiscono un vettore bidimensionale nello stesso piano e per la simmetria in esame si annullano. Quindi, non restano che le componenti

$$\begin{aligned}\rho_{xx} &= \rho_{yy} = \frac{B}{ecN} \frac{\omega_B}{-i\omega} a_1, \\ \rho_{zz} &= \frac{B}{ecN} \frac{-i\omega}{\omega_B} a_2.\end{aligned}\quad (89,5)$$

Consideriamo di nuovo il piano xz che passa attraverso le direzioni di k e B . Se trascuriamo la grandezza piccola ρ_{zz} (rispetto a ρ_{xx}), l'equazione di dispersione si divide in due equazioni:

$$\frac{4\pi i\omega}{c^2} - k^2 \rho_{yy} = 0, \quad \frac{4\pi i\omega}{c^2} - k_z^2 \rho_{xx} = 0;$$

inoltre è supposto che l'angolo θ tra k e B non sia troppo vicino a $\pi/2$ in modo che k_z^2 non è troppo piccolo ($\cos \theta \gg \omega/\omega_B$). Da qui deduciamo le leggi di dispersione per due tipi di onde:

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= ku_A \sqrt{a_1}, \\ \omega^{(2)} &= ku_A |\cos \theta| \sqrt{a_1},\end{aligned}\quad (89,6)$$

dove ¹⁾

$$u_A = \frac{B}{(4\pi N m^*)^{1/2}}. \quad (89,7)$$

Queste onde elettromagnetiche nei metalli si chiamano *magnetoplasmiche*. Le onde del primo e del secondo tipo sono analoghe rispettivamente alle onde magnetoacustica veloce e di Alphen in un pla-

¹⁾ Nelle leggi di dispersione (89,6-7) la condizione $ku_F \ll \omega$ significa che deve essere $u_A \gg v_F$. Nei campi B realizzabili questa condizione in effetti può essere soddisfatta soltanto nei semimetalli (bismuto) con piccola densità dei portatori di corrente.

sma ¹⁾. Quanto alle oscillazioni corrispondenti a un'onda magneto-acustica lenta, esse non possono avere a priori la velocità ω/k , soddisfacente la seconda condizione (89,1), e perciò non possono comparire qui.

§ 90. Oscillazioni quantistiche della conduttività di un metallo in un campo magnetico

La teoria dei fenomeni galvanomagnetici esposta ai §§ 84, 85 aveva un carattere quasi-classico nel senso che la natura quantistica si è rivelata soltanto sotto forma della funzione di distribuzione degli elettroni, mentre la discretezza dei livelli energetici nel campo magnetico (per traiettorie elettroniche chiuse) è stata trascurata. Questa discretezza conduce, tuttavia, a un fenomeno qualitativamente nuovo, ossia alle oscillazioni della conduttività quale funzione del campo magnetico (il cosiddetto *effetto Šubnikov-de Haas*). Questo effetto è analogo alle oscillazioni del momento magnetico (effetto de Haas-van Alphen), ma la sua teoria è più complicata, in quanto il fenomeno è di carattere cinetico e non termodinamico. La consideriamo nei limiti del modello degli elettroni non interagenti, lasciando da parte il problema (probabilmente non studiato ancora) dell'influenza degli effetti del liquido di Fermi.

Così come al § 84, consideriamo il campo magnetico forte, nel senso della condizione (84,1) che scriviamo nella forma

$$\omega_B \tau \gg 1, \quad (90,1)$$

dove τ è la durata del cammino libero degli elettroni e

$$\omega_B = \frac{eB}{m^*c} \quad (90,2)$$

la frequenza di Larmor; m^* è la massa ciclotronica degli elettroni ²⁾. È ovvio che al tempo stesso il campo non deve essere così forte da violare la condizione di quasi-classicità

$$\hbar \omega_B \ll \varepsilon_F. \quad (90,3)$$

Quanto alla relazione tra $\hbar \omega_B$ e T , essa può essere arbitraria.

Ci limiteremo allo studio delle oscillazioni quantistiche della conduttività trasversale (rispetto al campo magnetico, cioè all'asse z) supponendo inoltre, per rendere più semplice la scrittura delle

¹⁾ La possibilità dell'esistenza di queste onde è stata indicata da S. J. Buchsbaum e J. Golt (1961). La teoria qui esposta appartiene a E. A. Kaner e V. G. Skobov (1963).

²⁾ Ricordiamo (si veda IX, (57,6)) la definizione: $m^* = (\partial S / \partial \varepsilon) / 2\pi$, dove $S(\varepsilon, p_z)$ è l'area della sezione della superficie isoenergetica col piano $p_z = \text{costante}$; la superficie isoenergetica è definita qui nello spazio p (e non in quello p/\hbar come in IX).

formule, che il cristallo abbia simmetria cubica. In tale cristallo la parte simmetrica (dissipativa) del tensore di conduttività ha solo le componenti $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ e σ_{zz} . Una semplicità relativa del problema per le componenti trasversali è dovuta al fatto che per queste componenti l'influsso degli urti può essere considerato (come abbiamo visto al § 84) come una piccola perturbazione rispetto all'influsso del campo magnetico; per la conduttività longitudinale σ_{zz} le cose stanno altrimenti ¹⁾.

Come al § 84, consideriamo il metallo nella regione della sua resistenza residua, in modo che si ha a che fare con gli urti tra elettroni e atomi di impurità. Poiché questi urti sono elastici, elettroni di diversa energia partecipano indipendentemente gli uni dagli altri alla creazione della corrente elettrica.

Sia $g(\epsilon)$ il numero di stati quantistici dell'elettrone, riferito all'intervallo unitario di energie. Allora la densità spaziale del numero di elettroni con energia nell'intervallo $d\epsilon$ è $n(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon$, dove $n(\epsilon)$ sono i numeri di riempimento degli stati. Indichiamo con $j_y(\epsilon)$ la densità della corrente trasversale generata da questi elettroni. In presenza sia del campo elettrico che del gradiente della densità elettronica, la densità di corrente sarà rappresentata dalla somma

$$j_y(\epsilon) = eD(\epsilon) \frac{\partial n}{\partial y} g(\epsilon) + \sigma_{yy}(\epsilon) E_y. \quad (90,4)$$

Il primo termine rappresenta il trasporto diffusionale della carica; $D(\epsilon)$ è il coefficiente di diffusione (nello spazio reale!) degli elettroni con energia ϵ .

La corrente (90,4) deve annullarsi per la distribuzione

$$n_0(\epsilon - e\varphi) \approx n_0(\epsilon) - e\varphi \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon},$$

corrispondente all'equilibrio statistico del gas elettronico in un campo elettrico costante debole di potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ (n_0 è la distribuzione di Fermi). Da qui ricaviamo la relazione che lega $\sigma_{yy}(\epsilon)$ e $D(\epsilon)$:

$$\sigma_{yy}(\epsilon) = -e^2 g(\epsilon) D(\epsilon) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon}.$$

La conduttività elettrica totale, che include il contributo dagli elettroni di tutte le energie, è

$$\sigma_{yy} = -e^2 \int g(\epsilon) D(\epsilon) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} d\epsilon = -e^2 \sum_{\epsilon} D(\epsilon_s) \frac{\partial n_0(\epsilon_s)}{\partial \epsilon}. \quad (90,5)$$

¹⁾ Quanto alla parte antisimmetrica del tensore di conduttività, le oscillazioni quantistiche si manifestano soltanto in seconda approssimazione rispetto a $1/\omega_B \tau$.

Nell'ultima formula la sommatoria è estesa a tutti gli stati quantistici dell'elettrone; s indica convenzionalmente l'insieme dei numeri quantici degli stati. La formula (90,5) riduce il problema del calcolo della conduttività al calcolo del coefficiente di diffusione degli elettroni in assenza di campo elettrico.

Il coefficiente di diffusione, a sua volta, va espresso in funzione delle caratteristiche degli atti microscopici di diffusione mediante una formula del tipo (21,4):

$$D = \sum (\Delta y)^2 / 2\delta t,$$

dove la sommatoria è estesa agli urti cui l'elettrone è soggetto durante il tempo δt , mentre Δy rappresenta la variazione del valore medio della coordinata y dell'elettrone in seguito agli urti (ricordiamo che il moto dell'elettrone nel piano perpendicolare al campo è finito; nel quadro intuitivo delle orbite quasi-classiche Δy è lo spostamento del centro dell'orbita). Indichiamo con

$$N_{\text{imp}} W_{s's} \delta (\epsilon_s - \epsilon_{s'})$$

la probabilità della transizione dell'elettrone dallo stato s allo stato s' in seguito alla diffusione; la funzione delta esprime l'elasticità della diffusione e il fattore N_{imp} (densità degli atomi di impurità) l'indipendenza della diffusione su atomi disposti caoticamente. Allora il coefficiente di diffusione sarà rappresentato dalla formula

$$D(\epsilon_s) = \frac{1}{2} N_{\text{imp}} \sum_{s'} (y_s - y_{s'})^2 W_{s's} \delta (\epsilon_s - \epsilon_{s'}),$$

dove y_s è il valore medio della coordinata nello stato s . Sostituendo questa espressione nella (90,5), otteniamo per la conduttività

$$\sigma_{yy} = -\frac{e^2}{2} N_{\text{imp}} \sum_{ss'} (y_s - y_{s'})^2 \frac{\partial n_0(\epsilon_s)}{\partial \epsilon} W_{s's} \delta (\epsilon_s - \epsilon_{s'}) \quad (90,6)$$

(S. Titeica, 1935; B. I. Davydov, I. Ja. Pomerančuk, 1939)¹⁾.

Per un'applicazione concreta di questa formula bisogna decifrare il significato della notazione s . La quantizzazione discreta dei livelli energetici dell'elettrone di conduttività in un campo magnetico compare per traiettorie quasi-classiche chiuse nello spazio p (cioè per sezioni chiuse delle superfici isoenergetiche), il che verrà supposto più avanti. In questo caso gli stati quantistici sono definiti da quattro numeri

$$s = (n, P_x, P_z = p_z, \sigma), \quad (90,7)$$

¹⁾ Nel caso di diffusione sulle impurità il principio di Pauli non incide sulla forma delle espressioni; cfr. l'integrale degli urti (78,14) in cui i prodotti nn' legati al principio di Pauli si elidono mutuamente.

dove n è un intero positivo (grande); il numero $\sigma = \pm 1$ assegna il valore della proiezione dello spin elettronico e P_x, P_z sono le componenti della quasi-quantità di moto generalizzata $\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$. Il potenziale vettoriale del campo magnetico è supposto $A_x = -By, A_y = A_z = 0$; per la ciclicità delle coordinate x e z le componenti della quantità di moto generalizzata P_x e P_z si conservano (si veda IX, § 58). I livelli energetici, invece, dipendono solo dai tre numeri quantici n, p_z, σ . Essi sono dati dalle espressioni

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z) = \varepsilon(n, p_z) + \sigma\beta B \xi_n(p_z), \quad (90,8)$$

dove $\varepsilon(n, p_z)$ è la soluzione dell'equazione

$$S(\varepsilon, p_z) = 2\pi \frac{e\hbar B}{c} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (90,9)$$

Nel secondo termine della (90,8) $\beta = e\hbar/2mc$ è il magnetone di Bohr e il fattore $\xi_n(p_z)$ caratterizza la variazione del momento magnetico dell'elettrone in seguito all'interazione spin-orbitale nel reticolo.

Il tensore di conduttività studiato ai §§ 84, 85 rappresenta in realtà il risultato del calcolo dei valori medi delle funzioni esatte $\sigma_{\alpha\beta}(B)$ rispetto alle piccole oscillazioni quantistiche. In particolare, in accordo con la (85,3), il valore medio così calcolato della conduttività trasversale è $\bar{\sigma}_{yy} \propto B^{-2}$. Mostriamo prima di tutto che questo risultato si deduce dalla formula (90,6) e precisiamo il legame esistente tra le grandezze $W_{s's}$ che figurano in questa formula e la funzione $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ nell'integrale quasi-classico degli urti tra elettroni e impurità (78,14).

È stato già detto al § 84 che la condizione di quasi-classicità del moto dell'elettrone garantisce al tempo stesso l'indipendenza del processo di diffusione dal campo magnetico. La probabilità della diffusione in assenza di campo, accompagnata dalla trasformazione della quasi-quantità di moto \mathbf{p} in \mathbf{p}' è stata rappresentata nell'integrale degli urti (78,14) nella forma

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (90,10)$$

Per scrivere questa espressione in forma adatta alla diffusione in un campo magnetico è sufficiente trasformarla in variabili che conservino il loro significato per il moto nel campo:

$$w(P'_x, p'_z, \varepsilon'; P_x, p_z, \varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{dP_x dp_z d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3 v_y} \quad (90,11)$$

(la derivata $v_y = \partial\varepsilon/\partial p_y$ è supposta espressa anch'essa in funzione delle nuove variabili). La coordinata y nel moto lungo una traiettoria quasi-classica è legata alla quasi-quantità di moto generalizzata dalla relazione $P_x = p_x + eBy/c$; perciò il valore medio (secondo la

traiettoria) è

$$\bar{y} = \frac{c}{eB} [P_x - \bar{p}_x(\varepsilon, p_z)] \equiv \frac{\kappa}{B}. \quad (90,12)$$

Il valore medio della conduttività $\bar{\sigma}_{yy}$, calcolato rispetto alle oscillazioni, si ottiene in base alla formula (90,6) sostituendovi la sommatoria sulla variabile discreta s con l'integrazione rispetto alla variabile continua ε . Introducendo per brevità la notazione

$$a(\varepsilon, p'_z, p_z) = \frac{1}{2} \int (\kappa - \kappa')^2 \frac{w dp_x dp'_x}{v_y v'_y (2\pi\hbar)^4}, \quad (90,13)$$

otteniamo

$$\bar{\sigma}_{yy} = -\frac{e^2 N_{\text{imp}}}{B^2} \int a \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta(\varepsilon - \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon' \frac{2dp_z dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} \quad (90,14)$$

(il fattore 2 proviene dalle due direzioni dello spin elettronico; la probabilità della diffusione è supposta indipendente dallo spin in modo che la sua proiezione non varia). L'integrazione rispetto a ε' elimina la funzione delta. Nell'integrazione rispetto a ε , invece, si può supporre costante il fattore lentamente variabile a (considerandone il valore per $\varepsilon = \mu$) e integrare solo la derivata $\partial n_0 / \partial \varepsilon$. Come risultato abbiamo

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{e^2 N_{\text{imp}}}{B^2} \int a \frac{2dp_z dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} \equiv \frac{1}{B^2} \int b(p_z) \cdot 2dp_z. \quad (90,15)$$

Passiamo ora all'inclusione della discretezza dei livelli. Ciò significa che al posto dell'integrazione nella (90,14) rispetto alla variabile continua ε (per P_x e p_z dati) bisogna scrivere la sommatoria su n , sostituendo

$$\int \dots d\varepsilon \rightarrow \hbar\omega_B \sum_n \dots,$$

dove

$$\hbar\omega_B = \frac{\partial \varepsilon(n, p_z)}{\partial n},$$

come risulta con chiarezza dalla (90,9) e dalla definizione della massa ciclotronica m^* . Usando le notazioni sopra introdotte, scriviamo

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & -\frac{e^2 N_{\text{imp}}}{B^2} \int \sum_{nn'\sigma} a(\varepsilon_{n\sigma}, p'_z, p_z) \frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial \varepsilon} \times \\ & \times \delta(\varepsilon_{n\sigma} - \varepsilon_{n'\sigma}) \hbar\omega_B \hbar\omega'_B \frac{dp_z dp'_z}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned} \quad (90,16)$$

(notiamo che, in seguito all'integrazione rispetto alle due variabili p_z e p'_z , si può ritenere simmetrica la funzione a rispetto ad esse).

La parte oscillante di questa espressione, $\tilde{\sigma}_{yy}$, va separata mediante la formula della sommatoria di Poisson (si veda IX, § 63)

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x) dx + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i l x} dx \quad (90,17)$$

e compare qui dalla somma in l ; il valore medio $\bar{\sigma}_{yy}$ proviene dal primo termine integrale.

Supporremo piccola l'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore medio $\bar{\sigma}_{yy}$ (con ciò la grandezza del campo magnetico è soggetta a una determinata condizione; si veda più avanti la formula (90,26)). Allora è sufficiente tener conto della parte oscillante ogni volta soltanto in una delle somme (estesa a n o a n') nella (90,16). Tenendo conto della simmetria di a rispetto a p_z , p'_z e introducendo la notazione b per analogia con la definizione nella (90,15), abbiamo

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \frac{4}{B^2} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \tilde{J}_{l\sigma}, \quad (90,18)$$

dove $\tilde{J}_{l\sigma}$ è la parte oscillante dell'integrale

$$J_{l\sigma} = - \int_0^{\infty} dn \int b(\varepsilon_{n\sigma}, p_z) \frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_{n\sigma}}{\partial n} e^{2\pi i l n} dp_z.$$

Introducendo al posto di n quale variabile d'integrazione la funzione $\varepsilon(n, p_z)$ dalla (90,8), integriamo per parti rispetto a ε (il fattore lentamente variabile b si può ritenere costante). Il termine così integrato non conduce a una dipendenza oscillazionale dal campo (e non rappresenta altro che una piccola correzione a $\bar{\sigma}_{yy}$); omettendolo ricaviamo

$$\tilde{J}_{l\sigma} = 2\pi i l \int_0^{\infty} \int e^{2\pi i l n} \frac{b(\varepsilon, p_z)}{\exp \frac{\varepsilon - \mu_{\sigma}}{T} + 1} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} dp_z d\varepsilon. \quad (90,19)$$

Qui $\mu_{\sigma} = \mu - \sigma \beta \xi B$ e viene introdotta la funzione

$$n(\varepsilon, p_z) = \frac{cS(\varepsilon, p_z)}{2\pi e \hbar B} - \frac{1}{2} \quad (90,20)$$

(cfr. la (90,9)); nell'argomento della funzione $b(\varepsilon_{n\sigma}, p_z)$ si è trascurato il termine $\beta \xi B$ rispetto a ε grande.

L'integrazione rispetto a p_z nella (90,19) è identica a quella nell'integrale (63,8) del volume IX, per lo studio dell'effetto de Haas-van Alphen. L'integrale è definito dalle regioni in prossimità dei punti $p_z = p_{z\text{ex}}(\varepsilon)$ in cui $n(\varepsilon, p_z)$ (cioè l'area della sezione S)

ha valori di estremo quale funzione di p_z . Come risultato otteniamo

$$\tilde{J}_{l\sigma} = \sum_{\text{ex}} \int_0^{\infty} \frac{2\pi i \sqrt{l} \exp\{2\pi i l n_{\text{ex}} \pm i\pi/4\} b_{\text{ex}}(\varepsilon)}{\left[\exp \frac{\varepsilon - \mu_{\sigma}}{T} + 1\right] |\partial^2 n / \partial p_z^2|_{\text{ex}}^{1/2}} \frac{dn_{\text{ex}}}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (90,21)$$

dove

$$n_{\text{ex}}(\varepsilon) = n(\varepsilon, p_{z\text{ex}}(\varepsilon)), \quad b_{\text{ex}}(\varepsilon) = b(\varepsilon, p_{z\text{ex}}(\varepsilon)),$$

e i segni + o - nell'esponente si riferiscono rispettivamente ai casi in cui $p_{z\text{ex}}$ sia un punto di massimo o di minimo della funzione $n(\varepsilon, p_z)$; la sommatoria è estesa a tutti i punti di estremo.

L'integrale (90,21), a sua volta, è completamente analogo all'integrale (63,9) del volume IX e differisce da esso solo per i fattori lentamente variabili b e $dn_{\text{ex}}/d\varepsilon = cm_{\text{ex}}^*/e\hbar B$ nell'espressione integranda; questi fattori (così come il fattore $|\partial^2 n / \partial p_z^2|_{\text{ex}}^{-1/2}$) possono essere sostituiti con i loro valori per $\varepsilon = \mu$, cioè sulla superficie di Fermi. Dopo questa operazione l'integrazione rispetto a ε e la sommatoria a σ conducono infine al risultato

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yy} &= \sum_{\text{ex}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sigma_{yy}^{(l)} \cos \left\{ l \frac{cS_{\text{ex}}}{e\hbar B} \pm \frac{\pi}{4} \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(l)} &= \frac{2^{5/2} \pi^{1/2} (e\hbar)^{1/2} b_{\text{ex}}}{c^{1/2} B^{3/2} l^{1/2}} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{\text{ex}}^{-1/2} \frac{\lambda_l}{\text{sh } \lambda_l} \cos \left(\pi l \xi_{\text{ex}} \frac{m_{\text{ex}}^*}{m} \right), \quad (90,22) \\ \lambda_l &= 2\pi^2 l T / \hbar \omega_B, \quad \omega_B = eB / m_{\text{ex}}^* c, \end{aligned}$$

dove S_{ex} , ξ_{ex} , m_{ex}^* , b_{ex} vanno calcolati per $\varepsilon = \mu$ sulla superficie di Fermi¹⁾.

Se per una data direzione di B esiste una sola sezione estrema della superficie di Fermi, allora esiste una proporzionalità tra le parti oscillanti della conduttività σ_{yy} e della suscettività magnetica longitudinale. Confrontando la (90,22) con la (63,13) del volume IX, troviamo

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \frac{(2\pi)^4 \hbar^3 m_{\text{ex}}^* b_{\text{ex}}}{S_{\text{ex}}^2} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial B}. \quad (90,23)$$

I calcoli esposti si basano sulla piccolezza dell'ampiezza delle oscillazioni della conduttività rispetto al suo valore medio. Per di più, questa ipotesi rappresenta in sostanza la condizione di applicabilità di tutta la teoria esposta ai §§ 84, 85: è chiaro che i valori medi hanno un significato reale solo se sono la parte principale del tensore di conduttività.

¹⁾ Le oscillazioni della conduttività sono state studiate da A. I. Achiezer (1939) e B. I. Davydov e I. Ja. Pomerančuk (1939) per una legge quadratica di dispersione degli elettroni, da A. M. Kosevič e V. V. Andreev (1960) per una legge di dispersione arbitraria.

Per $\hbar\omega_B \sim T$ l'ampiezza delle oscillazioni è definita dai primi termini della somma nella (90,22) in cui $l \sim 1$, $\lambda_l \sim 1$. In accordo con la definizione nella (90,15), $b_{ex} \sim \bar{\sigma} B^2/p_F$, mentre la derivata $\partial^2 S/\partial p_z^2 \sim 1$. Da qui ricaviamo la seguente stima dell'ampiezza delle oscillazioni:

$$\tilde{\sigma}/\bar{\sigma} \sim (\hbar\omega_B/\varepsilon_F)^{1/2}, \quad \hbar\omega_B \sim T. \quad (90,24)$$

Questa relazione è già piccola in virtù della condizione necessaria (90,3).

Se, invece, $T \ll \hbar\omega_B$, la stima cambia. In questo caso l'ampiezza delle oscillazioni è definita dalla somma di un numero grande di termini nella (90,22), nei quali $\lambda_l \sim 1$, cioè $l \sim \hbar\omega_B/T \gg 1$. Il numero di questi termini è dell'ordine di grandezza di l stesso. A differenza della stima precedente qui compare il fattore supplementare $l^{-1/2} \sim (\hbar\omega_B/T)^{1/2}$, in modo che

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_B}{\varepsilon_F} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega_B}{T} \right)^{1/2}. \quad (90,25)$$

La richiesta, che questa relazione sia piccola, conduce alla condizione

$$\hbar\omega_B \ll (\varepsilon_F T)^{1/2}. \quad (90,26)$$

PROBLEMA

Definire la conduttività trasversale del gas elettronico con legge quadratica della dispersione ($\varepsilon = p^2/2m$). Gli elettroni si diffondono su atomi di impurità secondo una legge isotropa con sezione indipendente dalle energie.

Soluzione. Il problema si riduce al calcolo della grandezza $b(p_z)$ che figura nelle (90,15) e (90,23). Per la legge quadratica della dispersione $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; poiché il valore medio della velocità lungo la traiettoria chiusa è nullo, $\bar{\mathbf{v}} = 0$, allora anche $\bar{\mathbf{p}} = 0$. Perciò, secondo la (90,12), $\kappa = cP_x/e$. In accordo con quanto detto nel testo, nel calcolare il valore medio $(\kappa - \kappa')^2$ si può supporre il processo di diffusione indipendente dal campo magnetico. Inoltre, la differenza tra \mathbf{P} e \mathbf{p} è inessenziale: considerando $\mathbf{r} = 0$ come il punto in cui si trova l'atomo diffondente, avremo $\mathbf{P} = \mathbf{p}$.

Nel caso in esame la probabilità di diffusione ha la forma $\nu\sigma_0 d\omega'/4\pi$, dove $d\omega'$ è l'angolo solido delle direzioni della quantità di moto \mathbf{p}' dopo la diffusione e σ_0 la sezione di diffusione totale costante. Questa espressione si può rappresentare nella forma equivalente seguente:

$$\frac{\sigma_0}{4\pi m} dp'_z d\varphi' \delta(\varepsilon - \varepsilon') d\varepsilon',$$

dove φ' è l'angolo azimutale della direzione \mathbf{p}' nel piano xy ; qui essa sostituisce l'espressione (90,11). Analogamente scriviamo l'elemento di volume dello spazio \mathbf{p} nella forma $d^3p \rightarrow m dp_z d\varphi d\varepsilon$. Inoltre,

$$p_x = (2m\varepsilon - p_z^2)^{1/2} \cos \varphi.$$

Ora troviamo

$$a(\varepsilon, p'_z, p_z) = \frac{c^2 \sigma_0}{8\pi e^2} \int (p_x - p'_x)^2 \frac{d\varphi d\varphi'}{2\pi\hbar} = \frac{\sigma_0 c^2}{8e^2 \hbar^2} (4m\varepsilon - p_z^2 - p_z'^2)$$

e, in seguito,

$$b(\varepsilon, p_z) = e^2 N_{\text{imp}} \int_{-\sqrt{2m\varepsilon}}^{\sqrt{2m\varepsilon}} a \frac{dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{c^2 \sqrt{2m\varepsilon}}{16\pi^2 \hbar^3 l} \left(\frac{10}{3} m\varepsilon - p_z^2 \right),$$

dove $l = 1/\sigma_0 N_{\text{imp}}$ è la lunghezza del cammino libero.

Il valore medio della conduttività si calcola mediante la formula (90,15) e vale

$$\bar{\sigma}_{yy} = c^2 p_F N / B^2 l,$$

dove $N = p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3$ è la densità del numero di elettroni. L'area della sezione della sfera di Fermi ha un massimo per $p_z = 0$ e, inoltre, $S_{\text{ex}} = \pi p_F^2$. Perciò

$$b_{\text{ex}} = 5c^2 N / 16l.$$

In accordo con la formula (90,23) troviamo la parte oscillante della conduttività

$$\tilde{\sigma}_{yy} = B^2 \bar{\sigma}_{yy} \frac{5}{6N\varepsilon_F} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial B}.$$

La parte oscillante della magnetizzazione \tilde{M}_z per il modello considerato è data dalla formula (60,6) del volume V.

Capitolo X

TECNICA DEI DIAGRAMMI PER SISTEMI NON IN EQUILIBRIO

§ 91. Suscettività di Matsubara

Lo studio del comportamento di diversi sistemi in un campo esterno variabile debole si riduce di solito al calcolo delle suscettività generalizzate corrispondenti. In questo paragrafo saranno dedotte le formule che legano la suscettività generalizzata a una grandezza ausiliaria che può essere calcolata mediante la tecnica dei diagrammi di Matsubara; con ciò si apre la possibilità di applicazione di questa tecnica allo studio delle proprietà cinetiche dei sistemi (A. A. Abrikosov, I. E. Džalošinskij, L. P. Gorkov, 1962).

Ricordiamo la definizione della suscettività generalizzata $\alpha(\omega)$ (si veda V, § 123). Supponiamo che l'azione esterna sul sistema si descriva con l'introduzione nel suo operatore hamiltoniano di un operatore di perturbazione della forma

$$\hat{V}(t) = -\hat{x}f(t), \quad (91,1)$$

dove \hat{x} è l'operatore di Schrödinger (indipendente dal tempo) di una grandezza fisica, che caratterizza il sistema, e la forza di perturbazione generalizzata $f(t)$ è una data funzione del tempo; è supposto che in assenza di azione esterna il valore medio della grandezza x sia nullo. Allora in prima approssimazione rispetto a f esiste un legame lineare tra le componenti di Fourier del valore medio $\bar{x}(t)$ e la forza $f(t)$; la suscettività generalizzata è il coefficiente in questa relazione:

$$\bar{x}_\omega = \alpha(\omega) f_\omega. \quad (91,2)$$

Secondo la formula di Cubo (si veda V, § 126), la funzione $\alpha(\omega)$ può essere rappresentata in forma operatoriale come

$$\alpha(\omega) = i \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle \hat{x}_0(t) \hat{x}_0(0) - \hat{x}_0(0) \hat{x}_0(t) \rangle dt, \quad (91,3)$$

dove $\hat{x}_0(t)$ è l'operatore di Heisenberg definito in base all'operatore di Hamilton imperturbato del sistema (fatto che si esprime tramite l'indice 0), mentre il valore medio si calcola per lo stato stazionario

imperturbato del sistema o secondo la distribuzione di Gibbs, con l'operatore di Hamilton imperturbato ¹⁾).

Consideriamo ora un sistema formalmente regolato dalle equazioni del moto « matsubariane », che differiscono dalle equazioni reali per la sostituzione del tempo $it \rightarrow \tau$; la nuova variabile τ assume i valori nell'intervallo finito

$$-1/T \leq \tau \leq 1/T. \quad (91,4)$$

Supponiamo che questo sistema sia soggetto alla perturbazione

$$\hat{V}(\tau) = -\hat{x}f(\tau). \quad (91,5)$$

Allora anche il valore medio \bar{x} sarà funzione della variabile τ . Sviluppiamo la funzione $f(\tau)$ in serie di Fourier nell'intervallo (91,4)

$$f(\tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s e^{-i\zeta_s \tau}, \quad \zeta_s = 2\pi s T \quad (91,6)$$

e analogamente la funzione $\bar{x}(\tau)$ ²⁾. Si chiama *suscettività di Matsubara* il coefficiente di proporzionalità tra le componenti di due sviluppi:

$$\bar{x}_s = \alpha_M(\zeta_s) f_s. \quad (91,7)$$

Ora, il nostro scopo consiste, da una parte, nel dedurre per $\alpha_M(\zeta_s)$ una formula analoga alla (91,3) e, dall'altra, nella ricerca di una relazione tra $\alpha_M(\zeta_s)$ e la funzione in esame $\alpha(\omega)$. Iniziamo dalla prima parte del problema.

Sia \hat{H} l'operatore di Hamilton imperturbato del sistema. L'operatore di Matsubara « esatto » della grandezza x si calcola mediante la formula ³⁾

$$\hat{x}^M(\tau) = \hat{\sigma}^{-1}(\tau, 0) \hat{x}_0^M(\tau) \hat{\sigma}(\tau, 0), \quad (91,8)$$

dove $\hat{\sigma}$ è la matrice S di Matsubara,

$$\hat{\sigma}(\tau, 0) = T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\tau \hat{V}_0^M(\tau') d\tau' \right\}, \quad (91,9)$$

¹⁾ In tutto questo capitolo si è posto $\hbar = 1$.

²⁾ Per la grandezza x avente un limite classico deve essere usata una tecnica corrispondente al caso della statistica di Bose; questa è la ragione per cui lo sviluppo (91,6) si effettua nelle « frequenze pari » ζ_s .

³⁾ Tutte le formule e nozioni che seguono più avanti sono state già date al § 38 del volume IX.

e con l'indice 0 sono indicati gli operatori nella « rappresentazione dell'interazione » di Matsubara ¹⁾

$$\hat{x}_0^M(\tau) = \exp(\tau \hat{H}_0) \hat{x} \exp(-\tau \hat{H}_0) \quad (91,10)$$

e analogamente per $\hat{V}_0^M(\tau)$. Nel primo ordine della teoria delle perturbazioni l'espressione (91,9) diventa

$$\hat{\sigma}(\tau, 0) \approx 1 - \int_0^\tau \hat{V}_0^M(\tau') d\tau'. \quad (91,11)$$

Calcoliamo il valore medio secondo la distribuzione di Gibbs

$$\bar{x}(\tau) = \text{Sp} \{ e^{-\hat{H}/T} \hat{x}^M(\tau) \}. \quad (91,12)$$

Secondo la formula (38,6) del volume IX, abbiamo

$$e^{-\hat{H}/T} = e^{-\hat{H}_0/T} \hat{\sigma} \left(\frac{1}{T}, 0 \right) \approx \exp(-\hat{H}_0/T) \left(1 - \int_0^{1/T} \hat{V}_0^M(\tau') d\tau' \right)$$

e secondo le formule (91,8) e (91,11)

$$\hat{x}^M(\tau) \approx \hat{x}_0^M(\tau) - \int_0^\tau \{ \hat{x}_0^M(\tau) \hat{V}_0^M(\tau') - \hat{V}_0^M(\tau') \hat{x}_0^M(\tau) \} d\tau'.$$

Sostituendo queste espressioni nella (91,12) otteniamo con la stessa precisione

$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau) = \text{Sp} \left\{ e^{-\hat{H}_0/T} \left[\int_0^\tau (\hat{V}_0^M(\tau') \hat{x}_0^M(\tau) - \hat{x}_0^M(\tau) \hat{V}_0^M(\tau')) d\tau' - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^{1/T} \hat{V}_0^M(\tau') \hat{x}_0(\tau) d\tau' \right] \right\}. \end{aligned}$$

Nel primo integrale la variabile $\tau' < \tau$ e nel secondo dividiamo la regione d'integrazione negli intervalli da 0 a τ e da τ a $1/T$. Dopo le semplificazioni e la sostituzione di $\hat{V}_0(\tau)$ tramite la (91,5) vediamo che il risultato si può scrivere nella forma

$$\bar{x}(\tau) = \int_0^{1/T} f(\tau') \langle T_\tau \hat{x}_0^M(\tau) \hat{x}_0^M(\tau') \rangle d\tau' \quad (91,13)$$

¹⁾ La formula (91,8) è valida nel caso in cui l'operatore iniziale $\hat{V}(\tau)$ dipenda esplicitamente dalla variabile τ (anche se ciò non è stato supposto nella deduzione in IX, § 38).

(ricordiamo che l'operatore T_τ di cronologizzazione rispetto alla variabile τ dispone i fattori, senza cambiamento del segno del prodotto, nell'ordine di crescita di τ da destra a sinistra); il calcolo del valore medio nella (91,13) si effettua secondo la distribuzione di Gibbs con l'operatore di Hamilton \hat{H}_0 . Il risultato del calcolo della media dipende unicamente dalla differenza $\tau - \tau'$. Infine, rappresentando $f(\tau')$ sotto forma dello sviluppo di Fourier (91,6), otteniamo finalmente la formula cercata che esprime la suscettività di Matsubara:

$$\alpha_M(\zeta_s) = \int_0^{1/T} e^{i\zeta_s \tau} \langle T_\tau \hat{x}_0^M(\tau) \hat{x}_0^M(0) \rangle d\tau. \quad (91,14)$$

Vediamo che $\alpha_M(\zeta_s)$ si esprime mediante la componente di Fourier della funzione di Green matsubariana, costruita in base agli operatori \hat{x} (cfr. la definizione (37,2) in IX). Sottolineiamo la distinzione dalla formula (91,3) per $\alpha(\omega)$, in cui figura un commutatore di ritardo (rispetto al tempo t), anziché il prodotto cronologizzato.

Per risolvere la seconda parte del problema posto, cioè per trovare un legame tra le funzioni $\alpha(\omega)$ e $\alpha_M(\zeta_s)$, occorre, partendo dalle formule (91,3) e (91,14), esprimere queste funzioni mediante gli elementi di matrice dell'operatore \hat{x} . Rinunciamo qui ai calcoli corrispondenti, in quanto praticamente coincidenti con quelli effettuati in relazione ad altri casi analoghi (cfr. V, § 126; IX, §§ 36, 37). Diamo direttamente il risultato

$$\alpha(\omega) = \sum_{m,n} e^{-E_n/T} \frac{|x_{mn}|^2}{\omega - \omega_{mn} + i0} (1 - e^{-\omega_{mn}/T}), \quad (91,15)$$

$$\alpha_M(\zeta_s) = \sum_{m,n} e^{-E_n/T} \frac{|x_{mn}|^2}{i\zeta_s - \omega_{mn}} (1 - e^{-\omega_{mn}/T}). \quad (91,16)$$

Qui x_{mn} sono gli elementi di matrice dell'operatore di Schrödinger \hat{x} rispetto agli stati stazionari del sistema; $\omega_{mn} = E_m - E_n$. Dal confronto di entrambe le espressioni risulta che

$$\alpha_M(\zeta_s) = \alpha(i\zeta_s), \quad \zeta_s > 0. \quad (91,17)$$

Poiché la suscettività generalizzata $\alpha(\omega)$ è reale sul semiasse immaginario superiore ω , la funzione $\alpha_M(\zeta_s)$ è reale per $\zeta_s > 0$. D'altra parte, dalla (91,16) si vede che $\alpha_M(-\zeta_s) = \alpha_M^*(\zeta_s)$. In tal modo, $\alpha_M(\zeta_s)$ è funzione reale pari di ζ_s e si esprime in funzione di $\alpha(\omega)$ mediante la formula

$$\alpha_M(\zeta_s) = \alpha(i|\zeta_s|). \quad (91,18)$$

La relazione (91,18) stabilisce il legame cercato. Per la definizione di $\alpha(\omega)$ bisogna costruire una funzione che sia analitica nel semipiano superiore della variabile ω e i valori della quale nei punti discreti $\omega = i\xi_s$ sul semiasse immaginario superiore coincidano con $\alpha_M(\xi_s)$; questa sarà la suscettività generalizzata cercata.

Il metodo descritto sarà applicato nel prossimo capitolo alle proprietà cinetiche dei superconduttori.

Per concludere mostriamo che la conoscenza di $\alpha(\omega)$ consente di definire la legge di rilassamento della grandezza x verso il suo valore d'equilibrio $x = 0$. A tale scopo supponiamo che il valore iniziale non in equilibrio di x sia generato dalla forza generalizzata $f(t)$ agente per $t < 0$ e in seguito esclusa. Il valore $\bar{x}(t)$ ad un istante t è definito tramite i valori di f durante tutto il tempo antecedente, mediante una formula del tipo

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-t') f(t') dt',$$

inoltre, la funzione $\alpha(t)$ è legata alla suscettività generalizzata mediante la trasformata inversa di Fourier

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

(cfr. V, § 123). Se $f = 0$ per $t > 0$, allora

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \alpha(t-t') f(t') dt'.$$

Il comportamento di $x(t)$ per grandi t è definito dall'andamento asintotico di $\alpha(t)$ per $t \rightarrow \infty$. A sua volta, quest'ultimo è definito dal punto singolare della funzione $\alpha(\omega)$ nel semipiano inferiore, più vicino all'asse reale. In particolare, il rilassamento di x secondo la semplice legge esponenziale $\bar{x} \sim e^{-t/\tau}$, con il tempo di rilassamento τ , corrisponde alla presenza in $\alpha(\omega)$ di un polo semplice per $\omega = -i/\tau$.

§ 92. Funzioni di Green di un sistema non in equilibrio

I problemi della fisica cinetica sono sempre legati allo studio degli stati di non equilibrio. Cionondimeno, l'applicazione del metodo descritto nel paragrafo precedente permette di ridurre, in alcuni casi, i problemi del calcolo delle grandezze cinetiche al calcolo delle funzioni di Green per sistemi termodinamicamente in equilibrio; con ciò compare la possibilità di ricorrere a una tecnica dei diagrammi (come quella di Matsubara) tale che per la sua essenza

stessa sia applicabile ai sistemi in equilibrio. Naturalmente questa possibilità è comunque limitata a questioni fisiche che si riferiscono soltanto a stati debolmente di non equilibrio.

Passiamo ora alla costruzione della tecnica dei diagrammi che sia adatta, in linea di principio, al calcolo delle funzioni di Green dei sistemi che si trovano in stati di non equilibrio qualsiasi. Le equazioni per le funzioni di Green che si ottengono con questa tecnica sono analoghe per il loro significato alle equazioni cinetiche. Applicata ai sistemi in equilibrio questa stessa tecnica consente di ottenere le funzioni di Green e le suscettività generalizzate (per temperature non nulle) direttamente quali funzioni delle frequenze reali continue, senza ricorrere necessariamente al prolungamento analitico (a questo proposito essa può risultare, in casi complicati, più comoda della tecnica di Matsubara)¹⁾.

La funzione di Green di un sistema non in equilibrio è definita allo stesso modo del caso d'equilibrio:

$$iG_{\sigma_1\sigma_2}(X_1, X_2) = \langle n | T \hat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1) \hat{\Psi}_{\sigma_2}^+(X_2) | n \rangle = \\ = \begin{cases} \langle n | \hat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1) \hat{\Psi}_{\sigma_2}^+(X_2) | n \rangle, & t_1 > t_2, \\ \mp \langle n | \hat{\Psi}_{\sigma_2}^+(X_2) \hat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1) | n \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (92,1)$$

L'unica differenza è che il valore medio (indicato con il simbolo $\langle n | \dots | n \rangle$) si calcola ora per un qualsiasi stato quantistico del sistema e non necessariamente per lo stato stazionario, come nel caso d'equilibrio²⁾. Il segno superiore si riferisce (qui e più avanti) alla statistica di Fermi, quello inferiore alla statistica di Bose; nell'ultimo caso (per un sistema di particelle senza spin) si devono omettere, ovviamente, gli indici di spin σ_1, σ_2 . Nel caso della statistica di Bose si suppone che non esista condensazione, vale a dire che o si tratta di sistemi con numero di particelle (fononi, fotoni) non conservativo, o che il sistema si trova a temperature superiori al punto in cui inizia la condensazione. In un sistema disomogeneo non in equilibrio la funzione (92,1) dipende già dalle due coppie di variabili separatamente, $X_1 = (t_1, \mathbf{r}_1)$ e $X_2 = (t_2, \mathbf{r}_2)$, e non soltanto dalla loro differenza $X_1 - X_2$ come nel caso d'equilibrio.

¹⁾ Questa tecnica appartiene a *L. V. Keldyš* (1964). Sotto certi aspetti è simile alla tecnica sviluppata da *R. Mills* (1962) per gli stati d'equilibrio.

²⁾ In IX, § 36, nella definizione della funzione G del sistema in equilibrio per $T \neq 0$ è stato incluso anche il valore medio calcolato secondo la distribuzione di Gibbs. A questo proposito ricordiamo ancora una volta che, in accordo con i principi fondamentali della statistica, il risultato del calcolo della media statistica per un sistema in equilibrio è indipendente dal fatto che sia effettuato rispetto alla funzione d'onda esatta dello stato stazionario del sistema chiuso, oppure mediante la distribuzione di Gibbs per un sistema in « termostato ». L'unica differenza è che nel primo caso il risultato del calcolo della media sarà espresso in funzione dell'energia e del numero di particelle nel sistema e, nel secondo caso, in funzione della temperatura e del potenziale chimico.

La tecnica dei diagrammi deve fornire la possibilità di esprimere la funzione di Green del sistema di particelle interagenti mediante le funzioni di un gas perfetto. In questo caso, tuttavia, automaticamente compare la necessità di introdurre accanto a G altre funzioni. Per non interrompere il filo dei ragionamenti ulteriori, diamo subito la definizione di queste funzioni e ne precisiamo alcune proprietà.

Per ragioni che verranno chiarite nel paragrafo seguente, è opportuno indicare la funzione (92,1) con G^{--} ; scriviamo così questa definizione nella forma ¹⁾

$$iG_{12}^{--} = \langle T \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \rangle = \begin{cases} \langle \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2^+ \rangle, & t_1 > t_2, \\ \mp \langle \hat{\Psi}_2^+ \hat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (92,2)$$

La definizione dell'altra funzione è

$$iG_{12}^{++} = \langle \tilde{T} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \rangle = \begin{cases} \mp \langle \hat{\Psi}_2^+ \hat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 > t_2, \\ \langle \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \rangle, & t_1 < t_2, \end{cases} \quad (92,3)$$

e differisce dalla (92,2) per la sostituzione del simbolo T con \tilde{T} , che denota la disposizione ordinata dei fattori operatoriali nell'ordine cronologico inverso, ossia da destra a sinistra nell'ordine di decrescenza dei tempi.

Ancora due funzioni sono definite come medie dei prodotti non cronologizzati di operatori Ψ :

$$iG_{12}^{+-} = \langle \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \rangle, \quad iG_{12}^{-+} = \mp \langle \hat{\Psi}_2^+ \hat{\Psi}_1 \rangle. \quad (92,4)$$

La differenza di segno in queste definizioni per i sistemi di Fermi è legata a una regola generale, ossia alla necessità del cambiamento di segno per permutazione degli operatori Ψ .

È da notare che la seconda delle funzioni (92,4) coincide per $t_1 = t_2 \equiv t$ con la matrice densità di una particella; la scrittura completa è

$$\mp iG^{-+}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) = \mathcal{N} \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (92,5)$$

(cfr. IX, le (7,17), (31,4)); non importa da quale parte t_2 tenda al limite t_1 in quanto la funzione G^{-+} è continua per $t_2 = t_1$. Quanto al valore della funzione iG^{+-} per $t_1 = t_2$, esso è legato al valore iG^{-+} mediante la formula

$$i\{G^{+-}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) - G^{-+}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2)\} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (92,6)$$

¹⁾ Per rendere meno complicate le notazioni, conveniamo di intendere inclusi gli indici di spin nella notazione convenzionale delle variabili X , cioè $X = (t, \mathbf{r}, \sigma)$. Laddove ciò non può causare nessun equivoco semplificheremo ancora di più le notazioni, denotando i valori degli argomenti X con gli indici rispettivi: $\Psi_1 = \Psi(X_1)$, $G_{12} = G(X_1, X_2)$, ecc. Infine, conveniamo di scrivere il simbolo della media semplicemente come $\langle \dots \rangle$ al posto di $\langle n | \dots | n \rangle$.

che deriva dalla regola di commutazione degli operatori Ψ di Fermi o di Bose.

Le quattro funzioni G così definite sono indipendenti. Esse sono mutuamente legate dalla relazione lineare seguente che deriva immediatamente dalla loro definizione:

$$G^{--} + G^{++} = G^{-+} + G^{+-}. \quad (92,7)$$

Le funzioni G^{--} e G^{++} sono legate anche dalla relazione di « coniugazione antihermitiana » rispetto alla permutazione dei loro argomenti:

$$G_{12}^{--} = -G_{21}^{++*}. \quad (92,8)$$

Le funzioni G^{-+} e G^{+-} , invece, sono di per sé « antihermitiane »:

$$G_{12}^{-+} = -G_{21}^{+-*}, \quad G_{12}^{+-} = -G_{21}^{-+*}. \quad (92,9)$$

Nel seguito giocherà un ruolo importante il legame tra queste funzioni e le funzioni di Green di ritardo o di anticipo. Queste ultime sono definite analogamente a quanto fatto nel caso d'equilibrio (si veda IX, § 36):

$$iG_{12}^R = \begin{cases} \langle \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \pm \hat{\Psi}_2^{\mp 1} \hat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 > t_2, \\ 0, & t_1 < t_2, \end{cases} \quad (92,10)$$

$$iG_{12}^A = \begin{cases} 0, & t_1 > t_2, \\ -\langle \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^+ \pm \hat{\Psi}_2^{\mp 1} \hat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Queste due funzioni sono « coniugate hermitiane » l'una dell'altra:

$$G_{12}^A = G_{21}^{R*}. \quad (92,11)$$

Dal confronto diretto tra le (92,2-4) e (92,10) risulta che

$$G^R = G^{--} - G^{-+} = G^{+-} - G^{++},$$

$$G^A = G^{--} - G^{+-} = G^{-+} - G^{++}. \quad (92,12)$$

Nel caso stazionario e spazialmente omogeneo, in cui tutte le funzioni dipendono unicamente dalle differenze $t = t_1 - t_2$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, esse possono essere soggette allo sviluppo di Fourier rispetto a queste variabili. Dalle (92,8) e (92,11) derivano le seguenti uguaglianze per le componenti di Fourier:

$$G^{--}(\omega, \mathbf{p}) = -[G^{++}(\omega, \mathbf{p})]^*, \quad G^A(\omega, \mathbf{p}) = [G^R(\omega, \mathbf{p})]^*, \quad (92,13)$$

mentre dalla (92,9) segue che le componenti di Fourier $G^{+-}(\omega, \mathbf{p})$ e $G^{-+}(\omega, \mathbf{p})$ sono immaginarie.

Per un sistema di particelle non interagenti la funzione G^{--} verifica l'equazione

$$\hat{G}_{11}^{-1} G_{12}^{(0) --} = \delta(X_1 - X_2), \quad (92,14)$$

dove \hat{G}_0^{-1} è l'operatore differenziale

$$\hat{G}_0^{-1} = i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon (-i\nabla) + \mu = i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \quad (92,15)$$

$(\varepsilon(p) = p^2/2m)$ e

$$\delta(X_1 - X_2) = \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta(t_1 - t_2) \delta(r_1 - r_2); \quad (92,16)$$

l'indice (0) nella funzione G significa che essa si riferisce a un gas perfetto e l'indice 1 nell'operatore \hat{G}_0^{-1} significa la derivazione rispetto alle variabili t_1, r_1 . Ricordiamo che la funzione δ a secondo membro dell'equazione (92,14) è dovuta al salto cui la funzione G^{--} è soggetta per $t_1 = t_2$ ¹⁾. Lo stesso salto lo subiscono le funzioni G^R e G^A e, quindi, $G^{(0)R}$ e $G^{(0)A}$ verificano la stessa equazione. La funzione G^{++} , invece, ha per $t_1 = t_2$ un salto di segno opposto e perciò

$$\hat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)++} = -\delta(X_1 - X_2). \quad (92,17)$$

Infine, le funzioni G^{+-} e G^{-+} sono continue per $t_1 = t_2$; perciò per un gas perfetto esse verificano le equazioni²⁾

$$\hat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)++} = 0, \quad \hat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)-+} = 0. \quad (92,18)$$

Calcoliamo tutte le funzioni G per lo stato omogeneo stazionario del gas perfetto, caratterizzato da una distribuzione n_p delle quantità di moto delle particelle (non necessariamente d'equilibrio). Per rendere più semplici le formule supponiamo che questa distribuzione sia indipendente dallo spin. Allora la dipendenza delle funzioni G dallo spin (nella statistica di Fermi) va segnata sotto forma del fattore $\delta_{\sigma_1 \sigma_2}$; assieme agli indici di spin ometteremo anche questo fattore.

Scriviamo gli operatori Ψ del gas perfetto nella forma degli sviluppi ordinari

$$\hat{\Psi}_0(t, r) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}^2}} \sum_p \hat{a}_p \exp \{i [pr - \varepsilon(p)t + \mu t]\} \quad (92,19)$$

¹⁾ Si veda IX, § 9, dove la deduzione dell'equazione non è legata al supposto calcolo della media per lo stato fondamentale del sistema e resta valida quando la media si calcola per qualsiasi stato quantistico.

²⁾ Se non si deriva rispetto alle prime variabili, ma rispetto alle seconde nelle funzioni G , il segno che precede $i\partial/\partial t$ va cambiato, cioè l'operatore \hat{G}_{01}^{-1} si sostituisce con \hat{G}_{02}^{-1*} :

$$\hat{G}_{02}^{-1*} G_{12}^{(0)--} = \delta(X_1 - X_2) \quad (92,14a)$$

ecc.

e analogamente per $\hat{\Psi}_0^+$ (cfr. IX, (9,3)). Nel sostituire queste espressioni nelle definizioni delle funzioni G , si deve tener presente che gli elementi di matrice diagonali sono non nulli soltanto per i prodotti di operatori di annichilazione e creazione di particelle con \mathbf{p} identico e, inoltre, che

$$\langle \hat{a}_p^+ \hat{a}_p \rangle = n_p, \quad \langle \hat{a}_p \hat{a}_p^+ \rangle = 1 \mp n_p.$$

Ad esempio, troviamo così

$$G^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \pm \frac{i}{\gamma^0} \int n_p \exp \{ i \mathbf{p} \mathbf{r} - i \varepsilon(\mathbf{p}) t + i \mu t \} \frac{\gamma^0 d^3 p}{(2\pi)^3},$$

dove $t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Riscrivendo identicamente questa espressione nella forma

$$G^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \pm 2\pi i \int n_p \exp(i \mathbf{p} \mathbf{r} - i \omega t) \delta(\omega - \varepsilon + \mu) \frac{d\omega d^3 p}{(2\pi)^4},$$

vediamo che

$$G^{(0)-+}(\omega, \mathbf{p}) = \pm 2\pi i n_p \delta(\omega - \varepsilon + \mu). \quad (92,20)$$

Analogamente troviamo

$$G^{(0)+-}(\omega, \mathbf{p}) = -2\pi i (1 \mp n_p) \delta(\omega - \varepsilon + \mu). \quad (92,21)$$

Per il calcolo di G^R è più comodo partire direttamente dall'equazione

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(-i\nabla) + \mu \right] G^{(0)R}(t, \mathbf{r}) = \delta(t) \delta(\mathbf{r}),$$

risolvendola con il metodo di Fourier e tenendo conto che $G^R(\omega, \mathbf{p})$ non deve avere singolarità nel semipiano superiore ω . Da qui ricaviamo immediatamente

$$G^{(0)R}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu + i0]^{-1} \quad (92,22)$$

(la funzione $G^{(0)A}(\omega, \mathbf{p})$, invece, si ricava da qui, secondo la (92,13), semplicemente per coniugazione complessa).

Infine, la (92,12) consente ora di trovare

$$\begin{aligned} G^{(0)--}(\omega, \mathbf{p}) &= [\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu + i0]^{-1} \pm 2\pi i n_p \delta(\omega - \varepsilon + \mu) = \\ &= P \frac{1}{\omega - \varepsilon + \mu} + i\pi (\pm 2n_p - 1) \delta(\omega - \varepsilon + \mu). \end{aligned} \quad (92,23)$$

Sottolineiamo che l'espressione (92,22) non dipende in generale dalle proprietà dello stato (cioè dalla distribuzione n_p) rispetto al quale si calcola la media. Questa proprietà della funzione $G^{(0)R}$ (e di $G^{(0)A}$) non è legata infatti all'omogeneità e alla stazionarietà dello stato del sistema supposte a priori nella deduzione della (92,22): la funzione $G^{(0)R}(X_1, X_2)$ risulta essere automaticamente dipendente solo dalla differenza $X_1 - X_2$.

Applicando a un sistema in equilibrio, nelle espressioni (92,21-23) si deve intendere con n_p la funzione di distribuzione di Fermi o di Bose. Inoltre, le funzioni G saranno espresse in funzione di T e μ ; con ciò si realizza anche il passaggio dal calcolo della media rispetto a uno stato quantistico dato al calcolo della media rispetto alla distribuzione di Gibbs.

PROBLEMA

Trovare le funzioni di Green per lo stato stazionario omogeneo del gas fononico in un liquido.

Soluzione. Analogamente alle definizioni (92,4) abbiamo per il campo fononico

$$iD_{12}^{+-} = \langle \hat{\rho}_1' \hat{\rho}_2' \rangle, \quad iD_{12}^{-+} = \langle \hat{\rho}_2' \hat{\rho}_1' \rangle, \quad (1)$$

dove $\hat{\rho}' = \hat{\rho}' +$ è l'operatore della parte variabile della densità del mezzo. Essendo questo operatore autoaggiunto, le funzioni (1) sono legate dalla relazione

$$D_{12}^{+-} = D_{21}^{-+} \quad (2)$$

(e, ovviamente, come sempre godono della proprietà (92,9)).

Per un gas di fononi non interagenti (si veda IX, (24,10)) abbiamo

$$\hat{\rho}' = \hat{\rho}' + = \sum_{\mathbf{k}} i \left(\frac{\rho_0 k}{2u\gamma^0} \right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\mathbf{k}t)} - \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\mathbf{k}t)}) \quad (3)$$

(ρ_0 è la densità imperturbata, u la velocità del suono). Ponendo la (3) nella (1) e passando dalla sommatoria all'integrazione, abbiamo

$$iD^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{2u} \int \{ \langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}} \rangle e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\mathbf{k}t)} + \langle \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \rangle e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\mathbf{k}t)} \} \frac{k d^3k}{(2\pi)^3},$$

ossia, sostituendo nel secondo termine la variabile d'integrazione $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ed esprimendo i valori medi in funzione dei numeri di riempimento degli stati fononici $N_{\mathbf{k}}$,

$$iD^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \int \frac{\rho_0 k}{2u} \{ N_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} + (1 + N_{-\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

L'espressione integranda (senza fattore $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) è già la componente dello sviluppo di Fourier nelle coordinate. Sviluppando anche rispetto al tempo, otteniamo

$$iD^{(0)-+}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\pi \rho_0 k}{u} \{ N_{\mathbf{k}} \delta(\omega - u\mathbf{k}) + (1 + N_{-\mathbf{k}}) \delta(\omega + u\mathbf{k}) \}. \quad (4)$$

In accordo con la (2) per la funzione $D^{(0)+-}$ abbiamo

$$D^{(0)+-}(\omega, \mathbf{k}) = D^{(0)-+}(-\omega, -\mathbf{k}). \quad (5)$$

Le altre due funzioni di Green vanno definite come

$$iD_{12}^{-+} = \langle \hat{T} \hat{\rho}_1' \hat{\rho}_2' \rangle, \quad iD_{12}^{++} = \langle \hat{T} \hat{\rho}_1' \hat{\rho}_2' \rangle. \quad (6)$$

Inoltre,

$$D_{12}^{-+} = D_{21}^{-+}, \quad D_{12}^{++} = D_{21}^{++}. \quad (7)$$

Per i fononi non interagenti un calcolo analogo dà (cfr. IX, il problema del § 31)

$$D^{(0)--}(\omega, \mathbf{k}) = -[D^{(0)++}(\omega, \mathbf{k})]^* = \frac{\rho_0 k}{2u} \left\{ \left[\frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0} \right] - \right. \\ \left. - 2\pi i [N_{\mathbf{k}} \delta(\omega - uk) + N_{-\mathbf{k}} \delta(\omega + uk)] \right\}. \quad (8)$$

In accordo con la (7), $D^{(0)--}(\omega, \mathbf{k}) = D^{(0)--}(-\omega, -\mathbf{k})$.

Dalla formula (8) segue che nella rappresentazione delle coordinate la funzione $D^{(0)--}(t, \mathbf{r})$ verifica l'equazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u^2 \Delta \right) D^{(0)--}(t, \mathbf{r}) = \rho_0 \delta(t) \Delta \delta(\mathbf{r}), \quad (9)$$

che sostituisce l'equazione (92,14) per le funzioni di Green delle particelle ordinarie.

§ 93. Tecnica dei diagrammi per sistemi non in equilibrio

Ogni tecnica dei diagrammi è basata sulla separazione, dall'operatore di Hamilton del sistema, dell'operatore di interazione: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, dove \hat{H}_0 è l'operatore di Hamilton del sistema di particelle non interagenti. La tecnica dei diagrammi è la teoria delle perturbazioni in \hat{V} .

La sua costruzione per un sistema non in equilibrio segue la stessa via usata nel caso d'equilibrio per $T = 0$ ¹⁾. La funzione di Green $G \equiv G^{--}$ si esprime attraverso gli operatori Ψ nella rappresentazione dell'interazione (cioè per un gas perfetto) mediante la formula

$$iG_{12}^{--} = \langle \hat{S}^{-1} T [\hat{\Psi}_{01} \hat{\Psi}_{02}^+ \hat{S}] \rangle, \quad (93,1)$$

dove

$$\hat{S} \equiv \hat{S}(\infty, -\infty) = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_0(t) dt \right), \quad (93,2)$$

e $\hat{V}_0(t)$ è l'operatore \hat{V} nella rappresentazione dell'interazione. La media si calcola nella (93,1) rispetto a uno stato del sistema di particelle non interagenti. Nel seguito è comodo supporre che questo stato sia stazionario e omogeneo, ma non fondamentale (vedremo nel seguito che questo stato iniziale si può escludere e formulare la teoria in modo tale che le equazioni in generale non dipenderanno da esso). Qui risiede la distinzione dal caso $T = 0$, in cui la media si calcola rispetto allo stato fondamentale. Questa distinzione è molto importante: il calcolo del valore medio dell'operatore \hat{S}^{-1} non si può più

¹⁾ Le considerazioni ulteriori sono basate essenzialmente su quelle di IX, §§ 12, 13.

separare dal calcolo dei valori medi degli altri fattori (come è stato fatto in IX, § 12, passando dalla (12,12) alla (12,14)); il fatto è che uno stato non fondamentale si trasforma sotto l'azione dell'operatore \hat{S}^{-1} non in se stesso, bensì in una sovrapposizione di altri stati eccitati (che si possono considerare intuitivamente come risultato di tutti i possibili processi di diffusione reciproca delle quasi-particelle)¹⁾.

L'espressione (93,1) deve essere sviluppata nelle potenze di \hat{V} . In questo caso è comodo trasformare dapprima \hat{S}^{-1} usando l'unitarietà dell'operatore \hat{S} :

$$\hat{S}^{-1} = \hat{S}^+ = \tilde{T} \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(t) dt \right) \quad (93,3)$$

(qui è usato anche il carattere hermitiano dell'operatore \hat{V}); il simbolo \tilde{T} dell'ordinamento anticronologico è stato già introdotto nel paragrafo precedente.

Sviluppando \hat{S} e \hat{S}^{-1} in serie e sostituendoli nella (93,1), otteniamo una somma di termini distinti, in ciascuno dei quali si deve calcolare la media mediante il teorema di Wick, e a ogni possibile convoluzione a coppia di operatori Ψ si mette in corrispondenza un determinato diagramma²⁾.

Osserviamo prima di tutto che (così come nella tecnica dei diagrammi per $T = 0$, che si suole chiamare « ordinaria ») si devono prendere in considerazione solo i diagrammi connessi, che non contengono nodi vuoti separati. Quanto a questi ultimi, essi si riducono reciprocamente. Ciò risulta con chiarezza dall'esame di alcuni primi diagrammi, in cui si può notare il principio generale di questa riduzione.

Se tutte le convoluzioni, che conducono a un diagramma connesso, si effettuano all'interno del fattore $T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\hat{S}$ nella (93,1), allora otteniamo i termini espressi dai diagrammi ordinari descritti in IX, § 13 (ovviamente, con un'altra forma delle funzioni corrispondenti alle linee continue). Ricordiamo che qui si parla dei diagrammi nella

¹⁾ Osserviamo che per la stessa ragione la tecnica dei diagrammi esposta in IX, §§ 12, 13 è inapplicabile in generale anche per $T = 0$ se esistono campi esterni variabili (cioè quando l'operatore \hat{V} dipende esplicitamente dal tempo già nella rappresentazione di Schrödinger): i campi variabili eccitano lo stato fondamentale del sistema. Sottolineiamo al tempo stesso che la tecnica qui sviluppabile è valida anche in presenza di un campo variabile.

²⁾ Ricordiamo che nel limite macroscopico la validità del teorema di Wick è indipendente dallo stato stazionario omogeneo rispetto al quale si calcola la media; si veda IX, fine del § 13.

rappresentazione delle coordinate; per gli stati non in equilibrio (quando le funzioni G dipendono separatamente dalle variabili X_1 e X_2) il passaggio alla rappresentazione delle quantità di moto è scomodo. Altri termini provengono dalle convoluzioni cui partecipano anche gli operatori Ψ da $\hat{S}^{-1} = \hat{S}^+$. In ogni ordine della teoria delle perturbazioni essi si ottengono dai termini ordinari, mediante la sostituzione di qualunque fattore \hat{V} preso da \hat{S} , con il fattore \hat{V} da \hat{S}^+ . Questi termini sono rappresentati con diagrammi della stessa forma grafica, ma con una regola di lettura un po' modificata. Tali modifiche sono conseguenze di tre circostanze: 1) in \hat{S}^+ gli operatori d'interazione figurano nella forma $+i\hat{V}$ (al posto di $-i\hat{V}$ in \hat{S}); 2) tutti gli operatori Ψ in \hat{S}^+ stanno sempre più a sinistra degli operatori nel prodotto $T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2\hat{S}$; 3) all'interno del fattore \hat{S}^+ gli operatori sono ordinati con il segno del prodotto \tilde{T} (al posto di T).

Vediamo come queste modifiche si rivelano nella costruzione della tecnica dei diagrammi in un caso elementare, ossia per un sistema di particelle (fermioni, ad esempio) che si trovano nel campo esterno $U(t, \mathbf{r}) \equiv U(X)$.

I termini del primo ordine nello sviluppo dell'espressione (93,1) sono

$$\left\langle T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+ \left(-i \int \hat{\Psi}_3^+ U_3 \hat{\Psi}_3 d^4 X_3 \right) \right\rangle + \left\langle \tilde{T} i \int \hat{\Psi}_3^+ U_3 \hat{\Psi}_3 d^4 X_3 \cdot T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+ \right\rangle.$$

Per la situazione qui considerata è caratteristico il secondo termine di questa somma; nel calcolo della media rispetto allo stato fondamentale si dovrebbe considerare solo il primo termine. Nel primo termine tutti e quattro gli operatori Ψ si trovano sotto il segno del prodotto T ; le loro convoluzioni a coppie

$$\overbrace{T\Psi_1\Psi_2^+ (-i\Psi_3^+ U_3 \Psi_3)} \quad (93,4)$$

danno i fattori $G_{32}^{(0) --}$ e $G_{13}^{(0) --}$. Nel secondo termine, invece, gli operatori Ψ spostati non sono ordinati mutuamente con il segno T o \tilde{T}

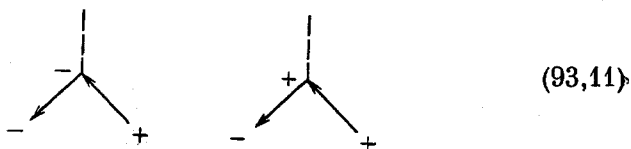
$$\tilde{T} \left(i\Psi_3^+ U_3 \Psi_3 \right) T \left(\Psi_1\Psi_2^+ \right); \quad (93,5)$$

le loro convoluzioni danno i fattori $G_{32}^{(0) +-}$ e $G_{13}^{(0) --}$; inoltre, qui figura $+iU_3$ al posto di $-iU_3$.

Introduciamo gli elementi grafici, che differiscono da quelli nella tecnica dei diagrammi ordinaria per gli indici supplementari $+$ o $-$

(gli indici numerici sono omissi). L'indice \pm a ciascun vertice del diagramma si riferisce agli estremi delle tre linee convergenti.

Analogamente, i termini correttivi in altre funzioni G verranno espressi da diagrammi con altri indici ai due estremi esterni delle linee continue. Così, per la funzione G^{-+} nel primo ordine abbiamo i due diagrammi

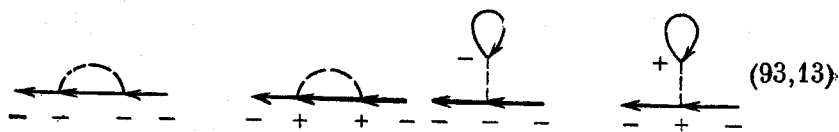


In tal modo, i diagrammi nella tecnica di Keldyś si ottengono dai diagrammi della tecnica ordinaria, attribuendo in tutti i modi possibili nei vertici e negli estremi liberi l'indice supplementare $+$ o $-$. Questa regola resta valida anche nella tecnica dei diagrammi per altri tipi di interazione.

Per un sistema con interazione a coppie tra le particelle, nella tecnica dei diagrammi ordinaria alla linea tratteggiata interna, si mette in corrispondenza il potenziale di interazione di due particelle. Ora, agli estremi di questa linea si attribuisce ancora una coppia di indici uguali $+$ o $-$:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 1+ \\ \text{-----} \\ 2+ \end{array} &= iU(X_1-X_2) \equiv i\delta(t_1-t_2)U(r_1-r_2) \\ \begin{array}{c} 1- \\ \text{-----} \\ 2- \end{array} &= -iU(X_1-X_2) \end{aligned} \quad (93,12)$$

Così, la correzione del primo ordine alla funzione G^{-+} , per un sistema con interazione a coppia, verrà espressa dalla somma di quattro diagrammi:



(al posto dei due diagrammi della tecnica ordinaria in IX, (13,13)). Alla linea continua chiusa su se stessa si mette in corrispondenza, come prima, il fattore $N_0(\mu, T)$ (la densità del gas perfetto), qualunque sia il segno del vertice.

È stato già detto che la tecnica dei diagrammi di Keldyś è applicabile anche ai sistemi in equilibrio per $T \neq 0$. Supponiamo che il campo esterno non esista e passiamo dalla rappresentazione delle coordinate a quella delle quantità di moto, sviluppando tutte le

e analogamente per le altre funzioni (le linee in grassetto sono le funzioni G , i cerchietti le funzioni Σ ; cfr. IX, (14,4)). In forma analitica abbiamo

$$G_{12}^- = G_{12}^{(0)-} + \int \{ G_{13}^{(0)-} \Sigma_{43}^- G_{32}^- + \\ + G_{14}^{(0)-+} \Sigma_{43}^{++} G_{32}^{+-} + G_{14}^{(0)-+} \Sigma_{43}^{+-} G_{32}^{--} + \\ + G_{14}^{(0)-} \Sigma_{43}^{+-} G_{32}^{+-} \} d^4 X_3 d^4 X_4 \quad (94,2)$$

e ancora tre equazioni per le altre funzioni G .

Per una scrittura compatta di queste equazioni è opportuno introdurre le matrici

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{--} & \Sigma^{-+} \\ \Sigma^{+-} & \Sigma^{++} \end{pmatrix}. \quad (94,3)$$

Allora le quattro equazioni della forma (94,2) si scrivono insieme come una sola equazione matriciale

$$G_{12} = G_{12}^{(0)} + \int G_{14}^{(0)} \Sigma_{43} G_{32} d^4 X_3 d^4 X_4; \quad (94,4)$$

i fattori sotto il segno di integrale vanno moltiplicati secondo la regola del prodotto matriciale.

Analogamente si scrivono insieme le equazioni (92,14-18) cui soddisfano le funzioni G del gas perfetto

$$\hat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)} = \sigma_z \delta (X_1 - X_2), \quad (94,5)$$

dove ¹⁾

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Torniamo all'equazione (94,4) e applichiamo ai suoi due membri l'operatore \hat{G}_{01}^{-1} . Tenendo conto della (94,5), otteniamo come risultato un sistema di quattro equazioni integro-differenziali scritte sotto forma di una sola equazione matriciale:

$$\hat{G}_{01}^{-1} G_{12} = \sigma_z \delta (X_1 - X_2) + \int \sigma_z \Sigma_{43} G_{32} d^4 X_3. \quad (94,6)$$

È da notare che questa equazione si può rappresentare in un'altra forma equivalente, se osserviamo che nella scrittura dei diagrammi (94,1) le linee in grassetto si possono rappresentare con lo stesso risultato a sinistra (e non a destra come nella (94,1)). In altre parole, i fattori nella (94,2) si possono scrivere in ogni termine dell'espresso-

¹⁾ La notazione σ_z , propria delle notazioni standardizzate per le matrici di Pauli, qui non ha a che fare, ovviamente, con lo spin.

ne integranda nell'ordine $G_{14}\Sigma_{43}G_{32}^{(0)}$. Applicando l'operatore \hat{G}_{02}^{-1*} alle uguaglianze così rappresentate (si veda la nota a pag. 466), otteniamo

$$\hat{G}_{02}^{-1*}G_{12} = \sigma_z \delta(X_1 - X_2) + \int G_{13}\Sigma_{32}\sigma_z d^4X_3. \quad (94,7)$$

Le autofunzioni energetiche possono essere rappresentate esse stesse sotto forma di una serie di diagrammi a scheletro, agli elementi grafici dei quali, ossia alle linee continue in grassetto, corrispondono le funzioni G esatte. Così, per un sistema di particelle con interazione a coppie abbiamo

$$-i\Sigma^{--} = \text{diagrammi a scheletro} + \dots \quad (94,8)$$

$$-i\Sigma^{--} = \text{diagrammi a scheletro} + \dots \quad (94,9)$$

e analogamente per Σ^{++} e Σ^{+-} ; i termini successivi della serie contengono diagrammi con un numero più grande di linee tratteggiate ¹⁾. In tal modo, le equazioni (94,4) o (94,7) rappresentano un sistema completo, anche se molto complicato, di equazioni per le funzioni G esatte.

Le equazioni (94,6) non contengono affatto funzioni $G^{(0)}$ dipendenti dallo stato « nullo » del sistema di particelle non interagenti ²⁾. Quindi, ogni dipendenza da questo stato scompare. Ma la presenza nelle equazioni di operazioni differenziali implica la non univocità delle soluzioni. Questa non univocità si manifesta nella presenza delle funzioni $G^{(0)}$ nelle equazioni integrali (94,4).

Il sistema di equazioni (94,6) ha, tuttavia, un difetto in quanto non tiene conto in forma esplicita della dipendenza lineare delle funzioni G , espressa dall'uguaglianza (92,7). Per eliminare questo difetto bisogna realizzare la trasformazione lineare della matrice G , in modo tale da annullarne uno degli elementi mediante la for-

¹⁾ Cfr. IX, (14,9-10), dove tutti i diagrammi elencati del primo e del secondo ordine rientrano nei diagrammi a scheletro (94,8).

²⁾ E da notare che in questo stadio si può generalizzare sostanzialmente la tecnica. In assenza di un campo esterno la serie per G con funzioni G_0 , dipendenti solo dalla differenza $x_1 - x_2$, gode anch'essa di questa proprietà. Ma dopo l'esclusione di G_0 si possono considerare anche le soluzioni dell'equazione (94,6) che dipendono da x_1 e x_2 separatamente.

mula (92,7). Questa trasformazione si realizza con la formula

$$G' = R^{-1}GR, \quad (94,10)$$

dove

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che la matrice trasformata è

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & F \end{pmatrix}, \quad (94,11)$$

dove

$$F = G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+}. \quad (94,12)$$

Trasformando in questo modo le matrici $G^{(0)}$ e Σ , lasciamo invariata l'equazione (94,4).

La matrice trasformata di Σ è

$$\Sigma' = R^{-1}\Sigma R = \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma^R \\ \Sigma^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (94,13)$$

dove si sono introdotte le notazioni

$$\Omega = \Sigma^{--} + \Sigma^{++}, \quad \Sigma^R = \Sigma^{--} + \Sigma^{-+}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{--} + \Sigma^{+-}. \quad (94,14)$$

Ciò si verifica con un calcolo diretto tenendo conto dell'uguaglianza

$$\Sigma^{++} + \Sigma^{--} = -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+}), \quad (94,15)$$

che deriva come conseguenza dall'uguaglianza (92,7) (la si può ottenere facilmente uguagliando a zero l'espressione

$$\hat{G}_{01}^{-1} (G^{--} + G^{++} - G^{+-} - G^{-+}),$$

costruita mediante le equazioni (94,6)).

Sviluppando ora l'equazione matriciale trasformata (94,4), otteniamo tre equazioni. Una di esse è

$$G_{12}^A = G_{12}^{(0)A} + \int G_{11}^{(0)A} \Sigma_{13}^A G_{32}^A d^4X_3 d^4X_4. \quad (94,16)$$

La stessa equazione per G^R non dà niente di nuovo in quanto è semplicemente la « coniugata hermitiana » rispetto all'equazione (94,16). Sottolineiamo che questa equazione, sebbene in essa figuri la funzione $G^{(0)A}$ per un gas perfetto, è indipendente dallo stato « nullo », poiché la funzione $G^{(0)A}$ non dipende da questo stato (come è stato notato al § 92).

Infine, la terza equazione per la funzione F , dedotta dalla (94,4), contiene termini con la funzione $F^{(0)}$ dipendente dallo stato « nullo ».

Tuttavia, questi termini scompaiono sotto l'azione dell'operatore differenziale \hat{G}_{01}^{-1} , poiché $\hat{G}_{01}^{-1}F^{(0)} = 0$. Come risultato otteniamo

$$\hat{G}_{01}^{-1}F_{12} = \int \{\Omega_{13}G_{02}^A + \Sigma_{13}^R F_{32}\} d^4X_3. \quad (94,17)$$

Le equazioni (94,16-17) costituiscono un sistema completo di equazioni che descrivono, in via di principio, il comportamento di un sistema non in equilibrio. La seconda di esse, l'equazione integro-differenziale, rappresenta una generalizzazione dell'equazione cinetica di Boltzmann; ricordiamo a questo proposito che, in accordo con le (92,5-6), le funzioni G^{+-} e G^{+-} , e con esse anche F , sono legate direttamente alla funzione di distribuzione delle particelle nel sistema. La soluzione dell'equazione (94,17) contiene un'indeterminazione corrispondente a quella presente nella soluzione dell'equazione cinetica. Quanto all'equazione (94,16), essa è un'equazione integrale pura e, quindi, non dà alcuna indeterminazione supplementare alla soluzione del sistema.

Sottolineiamo, tuttavia, una particolarità teorica delle equazioni (94,16-17), che le distingue nel caso generale da un'equazione cinetica ordinaria: esse contengono due variabili temporali, t_1 e t_2 , invece di una. Nel prossimo paragrafo verrà mostrato in che modo questa distinzione si elimina nel caso quasi-classico.

§ 95. Equazione cinetica nella tecnica dei diagrammi

Mostriamo con un esempio elementare come si realizza il passaggio dalle equazioni del tipo (94,16-17) a un'equazione cinetica quasi-classica ordinaria. Consideriamo un gas di Fermi debolmente imperfetto alle temperature $T \sim \varepsilon_F$, supponendo soddisfatta la condizione di quasi-classicità: gli intervalli di tempo τ e le distanze L , alle quali variano notevolmente tutte le grandezze, soddisfano le disuguaglianze

$$\tau \varepsilon_F \gg 1, \quad L p_F \gg 1 \quad (95,1)$$

(cfr. il § 40). Anche se in questo caso non otterremo, ovviamente, niente di nuovo, la deduzione contiene alcuni aspetti istruttivi, utili per i casi più complicati.

L'equazione cinetica quantistica deve definire la matrice densità ad una particella $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ¹⁾. Per passare al caso quasi-classico è opportuno ricorrere alla sua rappresentazione mista delle coordinate e delle quantità di moto, effettuando lo sviluppo di Fourier rispetto alla differenza $\xi = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e lasciando la dipendenza delle coordina-

¹⁾ Come nel § 40, supponiamo una distribuzione degli elettroni indipendenti dallo spin e omettiamo nella soluzione il fattore di spin $\delta_{\sigma_1 \sigma_2}$ in ρ .

te da $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Inoltre,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{\xi}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{\xi}{2},$$

in modo che l'immagine di Fourier corrispondente si scrive

$$\frac{1}{\mathcal{N}} n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\xi} \rho\left(t, \mathbf{r} + \frac{\xi}{2}, \mathbf{r} - \frac{\xi}{2}\right) d^3\xi. \quad (95,2)$$

La trasformazione inversa è

$$\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} n\left(t, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{p}\right) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (95,3)$$

L'integrazione della funzione $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ rispetto alle coordinate dà la funzione di distribuzione delle quantità di moto delle particelle, come si vede dall'espressione di questo integrale in funzione della matrice densità iniziale:

$$N_p = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3x = \mathcal{N} \int e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2. \quad (95,4)$$

L'integrazione rispetto alle quantità di moto dà la distribuzione delle coordinate, cioè la densità spaziale del numero di particelle, come si può vedere di nuovo dall'espressione in funzione della matrice densità:

$$N(t, \mathbf{r}) = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p = \mathcal{N} \rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (95,5)$$

Quanto alla funzione stessa $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ nel caso quantistico generale, non la si può considerare affatto come funzione di distribuzione delle coordinate e delle quantità di moto contemporaneamente; a prescindere dal fatto che ciò contraddirebbe i postulati fondamentali della meccanica quantistica, la funzione $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ definita dalla (95,2) nel caso generale non è neanche positiva.

Tuttavia, la funzione $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ ha il significato letterale di funzione di distribuzione nell'approssimazione quasi-classica. Per comprendere questo significato, consideriamo l'operatore di una grandezza fisica riferita a una particella singola e dipendente da \mathbf{r} e \mathbf{p} : $\hat{f} = f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = f(\mathbf{r}, -i\nabla)$ ¹⁾. Secondo la definizione della matrice densità, il valore medio della grandezza f è dato dall'integrale

$$\bar{f} = \int [\hat{f}_1 \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}} d^3x,$$

dove \hat{f}_1 agisce sulla variabile \mathbf{r}_1 . Sostituiamo ρ nella forma (95,3) e teniamo conto che per le condizioni (95,1) n è una funzione di \mathbf{r}_1 , che varia più lentamente del fattore $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_1)$. Perciò è sufficiente

¹⁾ Per fissare le idee, si può supporre che tutti gli operatori ∇ si trovino a destra di \mathbf{r} . Nell'approssimazione quasi-classica ciò è inessenziale.

derivare soltanto quest'ultimo, il che si riduce alla sostituzione $-i\nabla_1 \rightarrow \mathbf{p}$. Allora l'espressione \bar{f} diventa

$$\bar{f} = \frac{1}{\mathcal{H}} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (95,6)$$

il che (per l'indeterminazione di f) corrisponde alla definizione della funzione di distribuzione classica.

Nel seguito scriveremo le equazioni per la funzione di Green $G^{++}(X_1, X_2)$, che è legata in modo più stretto (secondo la (92,5)) alla matrice densità. Introduciamo per essa la rappresentazione mista «quadridimensionale»

$$G^{++}(X, P) = \int e^{iP\Xi} G^{++}\left(X + \frac{1}{2}\Xi, X - \frac{1}{2}\Xi\right) d^4\Xi, \quad (95,7)$$

dove $P = (\omega, \mathbf{p})$, $X = (t, \mathbf{r})$, $\Xi = (\xi_0, \boldsymbol{\xi})$ e, inoltre, $t = (t_1 + t_2)/2$, $\xi_0 = t_1 - t_2$. Allora

$$n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = -i \int G^{++}(X, P) \frac{d\omega}{2\pi}; \quad (95,8)$$

l'integrazione rispetto a $d\omega/2\pi$ è equivalente a porre $t_1 = t_2$.

Dopo queste definizioni preliminari passiamo alla deduzione dell'equazione cinetica.

Consideriamo la componente $(-+)$ delle equazioni (94,6) e (94,7) e costruiamo la differenza, termine a termine,

$$\begin{aligned} (\hat{G}_{02}^{-1*} - \hat{G}_{01}^{-1}) G_{12}^{++} = & - \int (\Sigma_{13}^{--} G_{32}^{++} + \Sigma_{13}^{+-} G_{32}^{++} + \\ & + G_{13}^{++} \Sigma_{32}^{++} + G_{13}^{--} \Sigma_{32}^{+-}) d^4X_3. \end{aligned} \quad (95,9)$$

L'operatore agente sulla funzione G_{12}^{++} a primo membro dell'equazione è

$$\begin{aligned} \hat{G}_{02}^{-1*} - \hat{G}_{01}^{-1} = & -i \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) - \frac{1}{2m} (\Delta_1 - \Delta_2) = \\ = & -i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{t}{m} \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \right). \end{aligned}$$

Passiamo ora in ambedue i membri dell'equazione (95,9) alle componenti di Fourier (95,7) e poniamo $t_1 = t_2$ (o, il che è lo stesso, integriamo rispetto a $d\omega/2\pi$). Tenendo conto della (95,8) troviamo che il primo membro dell'equazione (95,9) assume la forma

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$$

coincidente proprio con la forma del primo membro dell'equazione cinetica per la funzione di distribuzione $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Perciò il secondo membro dell'equazione (95,9) dopo la trasformazione di Fourier deve dare l'integrale degli urti St n .

Il passaggio alle componenti di Fourier in questa parte si realizza partendo dalle condizioni di quasi-classicità. L'integrale nella (95,9) è la somma di termini della forma

$$\int \Sigma(X_1, X_3) G(X_3, X_2) d^4 X_3.$$

Esprimiamo i fattori Σ e G in funzione delle differenze e delle semisomme di « quadricordinate »:

$$\int \Sigma\left(X_1 - X_3, \frac{X_1 + X_3}{2}\right) G\left(X_3 - X_2, \frac{X_3 + X_2}{2}\right) d^4 X_3.$$

Nel passare alle componenti di Fourier nei primi argomenti è essenziale la regione di valori delle differenze di coordinate $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|$, $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \sim 1/p$ e delle differenze di tempi $|t_1 - t_3|$, $|t_3 - t_2| \sim 1/\varepsilon$. In accordo con le condizioni (95,1), in questi intervalli Σ e G , quali funzioni dei loro secondi argomenti, variano poco. Perciò questi argomenti si possono sostituire approssimativamente con i valori $X = (X_1 + X_2)/2$:

$$\int \Sigma(X_1 - X_3, X) G(X_3 - X_2, X) d^4 X_3;$$

dopo questa operazione si può passare alla rappresentazione di Fourier per un dato valore X . Come risultato il secondo membro dell'equazione (95,9) assume la forma

$$\begin{aligned} \text{St } n &= - \int \left\{ \Sigma^{--} (G^{--} + G^{++}) + (\Sigma^{--} + \Sigma^{++}) G^{+-} \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \int \left\{ -\Sigma^{--} G^{+-} + \Sigma^{+-} G^{--} \right\} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (95,10) \end{aligned}$$

dove tutte le funzioni nell'espressione integranda hanno gli argomenti identici $(X, P) \equiv (t, \mathbf{r}; \omega, \mathbf{p})$; nella seconda uguaglianza sono state usate le relazioni (92,7) e (94,15).

Applichiamo la formula (95,10) al modello del gas di Fermi quasi perfetto, studiato già in IX, §§ 6, 21. Come in quel caso, supporremo convenzionalmente che il potenziale $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ di interazione tra le particelle soddisfi la condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni; per passare all'interazione propria (che non soddisfa questa condizione) è sufficiente esprimere la risposta in funzione dell'ampiezza di diffusione.

Partendo dallo scopo di trovare l'integrale degli urti nella prima approssimazione non nulla della teoria delle perturbazioni rispetto all'interazione tra le particelle, si può supporre che le funzioni G esatte nella (95,10) siano legate alla funzione di distribuzione n dalle stesse formule (92,20-21) che nel caso del gas perfetto; ciò si-

gnifica che vanno trascurate le piccole correzioni, a causa dell'interazione, all'energia $\varepsilon = p^2/2m$ di una particella del gas ¹⁾. A rigore, le espressioni (92,20-21) si riferiscono allo stato stazionario e omogeneo del gas; nel caso quasi-classico, invece, essendo lenta la variazione di n con le coordinate e con il tempo, si può ricorrere alle stesse espressioni intendendo con n_p la funzione $n(t, r, p)$, in cui t e r fungono da parametri. L'integrazione rispetto a ω elimina la funzione delta e si ottiene infine

$$\text{St } n = i\Sigma^{-+}(\varepsilon - \mu, p; t, r) [1 - n(t, r, p)] + \\ + i\Sigma^{+-}(\varepsilon - \mu, p; t, r) n(t, r, p). \quad (95,11)$$

Già dalla forma stessa di questa espressione è chiaro che il primo termine in essa descrive l'« arrivo » di particelle, che è possibile soltanto per $1 - n \neq 0$; il secondo termine descrive l'« uscita » proporzionale a n . Restano da calcolare le autofunzioni energetiche Σ^{-+} e Σ^{+-} .

Il primo contributo che non scompare in queste funzioni proviene dai diagrammi del secondo ordine (si veda la (94,9)); così

$$-i\Sigma^{-+} = \quad \text{a)} \quad + \quad \text{b)} \quad (95,12)$$

dove $P'_1 = P + P_1 - P'$. Dopo la sostituzione di U con U_0 i contributi a Σ da questi due diagrammi sono legati dall'uguaglianza $\Sigma_a = -2\Sigma_b$ (il segno meno è dovuto alla chiusura del nodo nel diagramma *a* e il coefficiente 2 alla sommatoria degli spin in questo nodo; cfr. i calcoli analoghi in IX, § 21). Sviluppando il diagramma *b* in forma analitica, otteniamo

$$i\Sigma^{-+}(P) = \int G^{-+}(P') G^{+-}(P_1) G^{-+}(P'_1) U^2(p_1 - p') \frac{d^4 P_1 d^4 P'}{(2\pi)^6}.$$

In un gas degenere la lunghezza d'onda delle particelle ($\sim 1/p$) è automaticamente grande rispetto al raggio d'azione delle forze di interazione in virtù della rarefazione del gas (si veda IX, § 6); ciò consen-

¹⁾ Proprio questa omissioni consente di non considerare le altre componenti dell'equazione (94,6), cioè supporre soddisfatte identicamente in un'approssimazione necessaria.

te di sostituire a $U(p_1 - p')$ il valore per $p_1 - p' = 0$:

$$U_0 \equiv \int U(r) d^3x.$$

Sostituendo per le funzioni G^{-+} e G^{+-} le espressioni (92,20-21) ed eliminando le due funzioni delta con l'integrazione rispetto alle componenti « temporali » dei quadrivettori P_1 e P' , possiamo vedere che il primo termine nella (95,11) coincide effettivamente con il termine « d'arrivo » nell'integrale degli urti (74,5) (inoltre, $w = 2\pi U_0^2$). Si calcola analogamente Σ^{+-} e si trova che anche il secondo termine nella (95,11) coincide con il termine « d'uscita » nello stesso integrale degli urti.

Capitolo XI

SUPERCONDUTTORI

§ 96. *Proprietà alle alte frequenze dei superconduttori.* *Formula generale*

Nel volume IX, § 51 sono state dedotte le formule che legano la corrente in un superconduttore al potenziale vettoriale del campo elettromagnetico in esso. Qui queste formule saranno generalizzate al caso di un campo variabile con il tempo. Come in IX, studieremo questo problema nei limiti del modello BCS considerando gli elettroni nel metallo come un gas isotropo con debole attrazione tra le particelle ¹⁾.

Come sempre nei metalli (e tanto più nei superconduttori), nelle equazioni di Maxwell si può trascurare la corrente di spostamento, scrivendo cioè

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (96,1)$$

Ne segue che in questa approssimazione

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (96,2)$$

Per la descrizione del campo consideriamo una gauge in cui il potenziale scalare $\varphi = 0$. Il legame lineare tra le componenti di Fourier dello sviluppo (nel tempo e nelle coordinate) della densità di corrente e il potenziale vettoriale del campo è scritto nella forma

$$j_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) A_\beta(\omega, \mathbf{k}), \quad (96,3)$$

che verifica identicamente l'equazione (96,2), cioè la condizione $\mathbf{kj}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. La parte longitudinale (lungo \mathbf{k}) del vettore \mathbf{A} scompare dalla relazione (96,3) e in generale dalle equazioni in modo che la si può porre nulla, supponendo cioè che $\mathbf{kA}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Per un tale vettore \mathbf{A} il legame tra la corrente e il campo si riduce a

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}). \quad (96,4)$$

Il nostro scopo è di calcolare la funzione $Q(\omega, \mathbf{k})$. Questa grandezza appartiene alla categoria delle suscettività generalizzate e per la soluzione del problema ricorriamo al metodo esposto al § 91.

¹⁾ I risultati di questo paragrafo e del prossimo appartengono a J. Bardeen, D. C. Mattis (1958) e a A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. M. Chalatnikov (1958).

Seguendo questo metodo, introduciamo in modo formale nell'operatore di Hamilton del superconduttore il « potenziale vettoriale » dipendente dalla variabile di Matsubara τ (e dalle coordinate)¹⁾:

$$A(\tau, \mathbf{r}) = A(\zeta_s, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \zeta_s \tau)}, \quad \zeta_s = 2\pi s T. \quad (96,5)$$

Mediante le equazioni di Gorkov calcoliamo la correzione lineare rispetto ad A alla funzione di Green di Matsubara:

$$\mathcal{G}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) = \mathcal{G}^{(0)}(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathcal{G}^{(1)}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2); \quad (96,6)$$

in virtù dell'« omogeneità in τ » e dell'omogeneità spaziale del superconduttore imperturbato, la funzione $\mathcal{G}^{(0)}$ dipende unicamente dalla differenza dei suoi argomenti. La densità della corrente $\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r})$ si esprime attraverso la funzione di Green mediante la formula

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -\frac{ie}{m} [(\nabla' - \nabla) \mathcal{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')]_{\substack{\mathbf{r}'=\mathbf{r} \\ \tau'=\tau+0}} - \frac{e^2 N}{mc} A(\tau, \mathbf{r}), \quad (96,7)$$

dove N è la densità del numero di particelle²⁾. Questa relazione con il campo (96,5) avrà infatti la forma

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}) A(\tau, \mathbf{r}). \quad (96,8)$$

Il coefficiente Q_M in essa è la suscettività di Matsubara e , secondo la (91,18),

$$Q(i|\zeta_s|, \mathbf{k}) = Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}). \quad (96,9)$$

Per la definizione della funzione cercata $Q(\omega, \mathbf{k})$ si dovrà realizzare il prolungamento analitico dai punti $\omega = i|\zeta_s|$ a tutto il semipiano superiore.

L'andamento del calcolo di Q_M è analogo ai calcoli in IX, § 51. Ricordiamo che nella gauge dei potenziali con $\text{div } A = 0$ la correzione alla fessura Δ nello spettro energetico non esiste e le equazioni di Gorkov linearizzate per le funzioni di Green \mathcal{G} e $\overline{\mathcal{F}}$ hanno la forma³⁾

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right] \mathcal{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') + \Delta \overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') = \\ = -\frac{ie}{mc} A(\tau, \mathbf{r}) \nabla \mathcal{G}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right] \overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') - \Delta \mathcal{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') = \\ = \frac{ie}{mc} A(\tau, \mathbf{r}) \nabla \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (96,10)$$

¹⁾ In questo paragrafo poniamo $\hbar = 1$.

²⁾ Si veda IX, (51, 17). Nel confronto con le formule in IX, § 51 ora si deve tener presente che e indica una grandezza positiva, cioè la carica elementare.

³⁾ Indichiamo l'operatore di Laplace ∇^2 per distinguerlo dalla fessura Δ !

Per il campo della forma (96,5) si può subito individuare la dipendenza di $\mathcal{G}^{(1)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ dalle somme $\tau + \tau'$ e $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$, ponendo

$$\mathcal{G}^{(1)} = g(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp \left[\frac{i}{2} \mathbf{k} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') - \frac{i}{2} \zeta_s (\tau + \tau') \right] \quad (96,11)$$

e analogamente per $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ con la funzione f al posto di g . Così, dopo questa sostituzione la prima delle equazioni (96,10) diventa

$$\begin{aligned} & \left[- \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \zeta_s \right) + \frac{1}{2m} \left(\nabla + \frac{i}{2} \mathbf{k} \right)^2 + \mu \right] g + \Delta f = \\ & = - \frac{ie}{mc} A(\zeta_s, \mathbf{k}) \exp \left[\frac{i}{2} \mathbf{k} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{i}{2} \zeta_s (\tau - \tau') \right] \nabla \mathcal{G}^{(0)}. \end{aligned}$$

Sviluppiamo ora tutte le grandezze in serie di Fourier di $\tau - \tau'$ e in integrali di $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$g(\tau, \mathbf{r}) = T \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \int g(\zeta_{s'}, \mathbf{p}) \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\zeta_{s'}\tau] \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (96,12)$$

ecc. Come risultato otteniamo per le componenti di Fourier il sistema di due equazioni algebriche

$$\begin{aligned} & \left[i \left(\zeta_{s'} + \frac{\zeta_s}{2} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right)^2 + \mu \right] g(\zeta_{s'}, \mathbf{p}) + \Delta f(\zeta_{s'}, \mathbf{p}) = \\ & = \frac{e}{mc} \mathbf{p} A(\zeta_s, \mathbf{k}) \mathcal{G}^{(0)} \left(\zeta_{s'} - \frac{\zeta_s}{2}, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right), \\ & \left[-i \left(\zeta_{s'} + \frac{\zeta_s}{2} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right)^2 + \mu \right] f(\zeta_{s'}, \mathbf{p}) - \\ & - \Delta f(\zeta_{s'}, \mathbf{p}) = - \frac{e}{mc} \mathbf{p} A(\zeta_s, \mathbf{k}) \overline{\mathcal{F}}^{(0)} \times \\ & \times \left(\zeta_{s'} - \frac{\zeta_s}{2}, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right). \end{aligned} \quad (96,13)$$

Le funzioni di Green « imperturbate » $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ per un sistema di Fermi si sviluppano in serie di Fourier con « frequenze dispari »: $(2s' + 1)\pi T$. Perciò dalla (96,13) segue che le « frequenze » $\zeta_{s'}$ assumono i valori

$$\zeta_{s'} = (2s' + 1 - s)\pi T.$$

Le funzioni $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ sono date dalle espressioni (si veda IX, (42,7-8))

$$\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = - \frac{i\zeta_s + \eta}{\zeta_s^2 + \varepsilon^2}, \quad \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\zeta_s^2 + \varepsilon^2}, \quad (96,14)$$

dove

$$\eta = \frac{p^2}{2m} - \mu \approx v_F (p - p_F), \quad \varepsilon^2 = \Delta^2 + \eta^2 \quad (96,15)$$

(la costante Δ è supposta reale). Queste formule consentono di ridurre facilmente la soluzione del sistema (96,13) alla forma

$$g(\zeta'_s, p) = \frac{e}{mc} p A(\zeta_s, p) \{ \mathcal{G}^{(0)}(P_+) \mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \\ + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+) \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-) \}, \quad (96,16)$$

dove

$$P_{\pm} = \left(\zeta'_s \pm \frac{\zeta_s}{2}, p \pm \frac{k}{2} \right). \quad (96,17)$$

Usando le (96,7), (96,11-12), otteniamo la densità di corrente

$$\mathbf{j}(\zeta_s, \mathbf{k}) = -\frac{2eT}{m} \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \int p g(\zeta'_s, p) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} - \frac{Ne^2}{mc} \mathbf{A}(\zeta_s, \mathbf{k})$$

con la funzione g data dalla (96,16). Tenendo conto della trasversalità dei vettori \mathbf{j} e \mathbf{A} rispetto a \mathbf{k} , calcoliamo la media, sotto il segno di integrale, secondo le direzioni del vettore \mathbf{p}_{\perp} nel piano perpendicolare a \mathbf{k} . Le funzioni $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ nella (96,16) sono indipendenti dalla direzione di \mathbf{p}_{\perp} ; il calcolo del valore medio del fattore $\mathbf{p}_{\perp}(\mathbf{p}_{\perp} \mathbf{A})$ lo trasforma in $A p^2 \sin^2 \theta/2$, dove θ è l'angolo tra \mathbf{p} e \mathbf{k} . Come risultato otteniamo infine la seguente espressione per la suscettività di Matsubara:

$$Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2 T}{m^2 c} \int \sum_{s'=-\infty}^{\infty} p^2 \sin^2 \theta \times \\ \times [\mathcal{G}^{(0)}(P_+) \mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+) \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-)] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (96,18)$$

Occupiamoci ora del prolungamento analitico di questa funzione dalla serie discreta di punti $\zeta_s = 2s\pi T$ a tutto il semipiano destro della variabile complessa ζ (cioè al semipiano superiore della variabile $\omega = i\zeta$). Il problema si riduce al prolungamento analitico dell'espressione integranda nell'integrale rispetto a $d^3 p$; consideriamo, ad esempio, il suo primo termine

$$J_M(\zeta_s) \equiv T \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_+ \left(\zeta'_s + \frac{\zeta_s}{2} \right) \mathcal{G}_- \left(\zeta'_s - \frac{\zeta_s}{2} \right) = \\ = T \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_+((2s'+1)\pi T) \mathcal{G}_-((2s'+1)\pi T - \zeta_s) \quad (96,19)$$

(per brevità omettiamo l'indice (0) e sostituiamo agli argomenti $p_{\pm} = p \pm k/2$ gli indici \pm). Questa espressione può essere rappresentata sotto forma dell'integrale

$$J_M(\zeta_s) = \frac{1}{4\pi i} \oint \mathcal{G}_+(z) \mathcal{G}_-(z - \zeta_s) \operatorname{tg} \frac{z}{2T} dz \quad (96,20)$$

esteso ai tre contorni chiusi C_1, C_2, C_3 (fig. 32) che in generale abbracciano tutto l'insieme infinito di poli del fattore $\operatorname{tg}(z/2T)$, che esso ha nei punti $z = (2s' + 1)\pi T$ (punti nella figura); i residui dell'espressione integranda in ciascuno di questi poli forniscono i termini

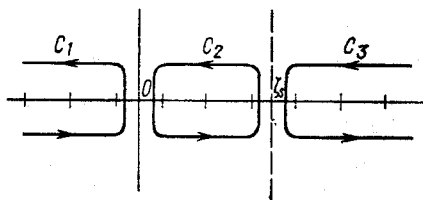


Fig. 32

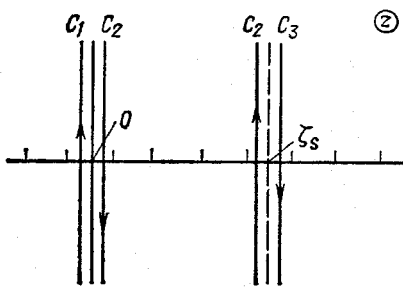


Fig. 33

corrispondenti alla somma (96,19) (all'infinito $\mathcal{G}(z) \propto 1/z$ in modo che l'integrale è convergente). Nella scelta dei contorni si è tenuto conto che la funzione $\mathcal{G}(z)$ è analitica in ciascuno dei due semipiani

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} G^R(iz), & \operatorname{Re} z > 0, \\ G^A(iz), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

dove G^R e G^A sono due funzioni analitiche (le funzioni di Green di ritardo e di anticipo, si veda IX, § 37); l'asse immaginario z è, in generale, una sezione per la funzione $\mathcal{G}(z)$.

Sviluppiamo ora i contorni in modo tale che passino verticalmente lungo entrambe le sponde delle linee di taglio $\operatorname{Re} z = 0$ e $\operatorname{Re} z = \zeta_s$ (fig. 33; i tratti di chiusura infinitamente lontani non sono rappresentati). Nella coppia di linee C_1, C_2 cambiamo la variabile d'integrazione ponendo $z = i\omega'$ e nella coppia C_2, C_3 poniamo $z - \zeta_s = i\omega'$. Allora per $\zeta_s > 0$ abbiamo

$$J_M(\zeta_s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{tg} \frac{i\omega'}{2T} [G_+^R(\omega') - G_+^A(\omega')] G_-^A(\omega' - i\zeta_s) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \frac{i\omega' + \zeta_s}{2T} [G_-^R(\omega') - G_-^A(\omega')] G_+^R(\omega' + i\zeta_s) \right\} d\omega'. \quad (96,21)$$

Nel dedurre questa espressione il valore di ζ_s era ancora fissato: $\zeta_s = 2\pi sT$. Ma per questi valori

$$\operatorname{tg} \frac{i\omega' + \zeta_s}{2T} = \operatorname{tg} \frac{i\omega'}{2T} = i \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T}.$$

Dopo questa sostituzione l'analiticità dell'espressione (96,21) per tutti i valori $\zeta_s > 0$ è evidente in virtù dell'analiticità delle funzioni G^A e G^R nei semipiani corrispondenti. Ponendo ora $i\zeta_s = \omega$, otteniamo la seguente espressione prolungata analiticamente ¹⁾:

$$J(\omega) \equiv J_M(-i\omega) = -\frac{i}{4\pi} \int \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \{ [G_+^R(\omega') - G_+^A(\omega')] \times \\ \times G_-^A(\omega' - \omega) + [G_-^R(\omega') - G_-^A(\omega')] G_+^R(\omega' + \omega) \} d\omega'. \quad (96,22)$$

Allo stesso modo si realizza il prolungamento del secondo termine nell'espressione integranda della (96,18) e si ottiene un risultato che differisce dalla (96,22) solo per la sostituzione delle funzioni G^R e G^A con F^{+R} , F^{+A} ²⁾. Tutte queste funzioni sono date dalle espressioni (si veda IX, § 41)

$$G^R(\omega, p) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon + i0} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon + i0}, \\ F^{+R}(\omega, p) = \frac{\Delta}{2\varepsilon} \left[\frac{1}{\omega + \varepsilon + i0} - \frac{1}{\omega - \varepsilon + i0} \right], \quad (96,23)$$

dove

$$\left. \begin{matrix} u_p^2 \\ v_p^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\eta}{\varepsilon} \right).$$

Le funzioni G^A , F^{+A} , invece, differiscono da G^R , F^{+R} solo per il segno che precede $i0$. Perciò

$$G^R - G^A = 2 \operatorname{Im} G^R = -\pi [u_p^2 \delta(\omega - \varepsilon) + v_p^2 \delta(\omega + \varepsilon)], \\ F^{+R} - F^{+A} = \frac{\pi \Delta}{2\varepsilon} [\delta(\omega - \varepsilon) - \delta(\omega + \varepsilon)]$$

e l'integrazione nella (96,22) si riduce all'eliminazione delle funzioni delta.

¹⁾ Tale metodo di prolungamento analitico appartiene a G. M. Eliašberg (1962).

²⁾ Per la definizione della funzione di Green F^+ (corrispondente alla funzione della temperatura \mathcal{F}) si veda IX, § 41. Le definizioni delle funzioni F^{+R} e F^{+A} differiscono da F^+ per la sostituzione del prodotto T con un commutatore, analogamente al legame tra G^R , G^A e G .

Dopo una serie di trasformazioni algebriche semplici, ma piuttosto lunghe, si ottiene infine la seguente espressione ¹⁾:

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} \frac{e^2}{4m^2c} \int p^2 \sin^2 \theta \operatorname{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} \times \\ \times \left\{ \left[1 + \frac{\eta_+ \eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \omega - i0} + \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- + \omega + i0} \right] + \right. \\ \left. + \left[1 - \frac{\eta_+ \eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - i0} + \frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- + \omega + i0} \right] \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (96,24)$$

dove

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2} \right)^2 - \mu, \quad \varepsilon_{\pm}^2 = \Delta^2 + \eta_{\pm}^2. \quad (96,25)$$

I due termini tra parentesi graffe nell'espressione (96,24) hanno origine e significato notevolmente distinti. Il primo è dispari in \mathbf{p} ; perciò l'integrale di questo termine si annulla per $T = 0$ (quando il fattore $\operatorname{th} (\varepsilon_+/2T) = 1$). Questa parte di Q è legata alla dinamica senza urti delle eccitazioni elementari. La sua parte immaginaria, esistente per tutti i \mathbf{k} e ω , è legata allo smorzamento senza urti di Landau.

L'integrale del secondo termine resta non nullo anche per $T = 0$. Questa parte di Q è legata alla generazione o alla scissione delle coppie di Cooper. I poli dell'espressione integranda in questa parte si trovano per $\varepsilon_+ + \varepsilon_- = \pm \omega$. Per la loro esistenza (e quindi per la comparsa della dissipazione, ossia della parte immaginaria di Q) la frequenza deve superare 2Δ , cioè l'energia di legame della coppia di Cooper.

§ 97. Proprietà alle alte frequenze dei superconduttori.

Casi limite

Passiamo allo studio della formula generale (96,24). Qui il numero di casi limite è molto grande a causa della presenza dei quattro parametri $\hbar\omega$, $\hbar kv_F$, Δ , T tra i quali possono esistere le relazioni più disparate. Consideriamone alcune.

Per $\hbar\omega \gg \Delta$ la presenza di una fessura nello spettro del superconduttore è inessenziale. Ponendo in prima approssimazione $\Delta =$

¹⁾ In IX, § 51 è stata sottolineata la necessità di effettuare con prudenza il calcolo della somma e degli integrali della forma (96,18), a causa della lentezza con cui decresce l'espressione integranda. Nell'ordine di operazioni qui indicato questa difficoltà non esiste più. Ne è prova il fatto che l'espressione definitiva (96,24) soddisfa la condizione necessaria: $Q=0$ per $\Delta=0$ e $\omega=0$ (metallo normale in campo costante); si veda la nota a pag. 492.

= 0, otterremo la formula per la costante dielettrica trasversale del gas di Fermi elettronico normale; non ci soffermiamo sui corrispondenti calcoli ¹⁾).

Caso di London

Consideriamo il caso limite di London in cui

$$\hbar k v_F \ll \Delta_0, \quad (97,1)$$

dove Δ_0 è il valore di $\Delta(T)$ per $T = 0$. In questo caso supponiamo che $\Delta \ll T$, il che esclude la regione di temperature troppo basse. Riteniamo la frequenza piccola nel senso che $\omega \ll k v_F$.

Per $k \rightarrow 0$

$$1 - \frac{\eta_+ \eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \propto k^2.$$

Perciò il secondo termine tra parentesi graffe nella (96,24) è piccolo e lo si può trascurare. Nel primo termine, invece, la prima espressione tra parentesi quadre si sostituisce con 2; dopo questa sostituzione e tenendo conto della disparità della seconda espressione tra parentesi quadre quale funzione di p , scriviamo

$$Q(\omega, k) = \frac{N e^2}{m c} - \frac{e^2}{2 m^2 c} \int \left[\text{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} - \text{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} \right] \frac{p^2 \sin^2 \theta}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \hbar \omega - i0} \frac{d^3 p}{(2\pi \hbar)^3}.$$

Osservando che $\text{th}(\varepsilon/2T) = 1 - 2n_0(\varepsilon)$, dove

$$n_0(\varepsilon) = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1} \quad (97,2)$$

è la funzione di distribuzione delle eccitazioni elementari nel gas di Fermi superconduttore (cioè la distribuzione di Fermi con il potenziale chimico nullo), scriviamo

$$\text{th} \frac{\varepsilon_+}{2T} - \text{th} \frac{\varepsilon_-}{2T} = -2[n_0(\varepsilon_+) - n_0(\varepsilon_-)] \approx -2\hbar \mathbf{k} \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

dove

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\hbar \mathbf{p}}{m \varepsilon}.$$

Allora

$$Q(\omega, k) = \frac{N e^2}{m c} + \frac{e^2}{m^2 c} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\mathbf{k} \mathbf{v} p^2 \sin^2 \theta}{\mathbf{k} \mathbf{v} - \omega - i0} \frac{d^3 p}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (97,3)$$

¹⁾ Il legame tra $Q(\omega, k)$ e la costante dielettrica trasversale $\varepsilon_t(\omega, k)$ va precisato nel seguente modo. Esprimendo la densità della corrente in funzione del vettore polarizzazione mediante la formula $-i\omega \mathbf{P} = \mathbf{j}$ e introducendo al posto di A l'intensità del campo elettrico $\mathbf{E} = i\omega A/c$, riscriviamo la relazione (96,4) nella forma $\mathbf{P} = -c\omega^{-2} Q \mathbf{E}$. Da qui si vede che

$$-cQ/\omega^2 = (\varepsilon_t - 1)/4\pi.$$

Per $\omega = 0$ questa espressione coincide, come ci si doveva aspettare, con il valore di London $N_s e^2 / mc$, dove $N_s(T)$ è la densità degli elettroni superconduttori ¹⁾. Perciò si può riscrivere la (97,3) nella forma equivalente seguente:

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{m^2 c} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{p^2 \sin^2 \theta}{k v - \omega - i0} \frac{d^3 p}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (97,4)$$

Il secondo termine in questa espressione descrive il contributo alla costante dielettrica da parte delle eccitazioni elementari nel gas di Fermi ²⁾.

Per $\omega \ll kv$ si può trascurare ω al denominatore dell'espressione integranda nella (97,4):

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{4\pi^2 c \hbar^3 k} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \theta d \cos \theta}{\cos \theta - i0} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{p^4}{m^2 v} dp. \quad (97,5)$$

L'integrale rispetto a $\cos \theta$ si calcola in base al residuo nel polo $\cos \theta = i0$ e vale $i\pi$. L'integrale rispetto a p , riscritto nella forma

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{p^2 \varepsilon}{\eta} d\eta,$$

diverge logaritmicamente per $|\eta| \ll \Delta$. Tagliandolo per i valori $|\eta| \sim \omega \Delta / kv_F$ (per cui $kv \sim \omega$), otteniamo con precisione logaritmica

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\Delta} p_F^2 \Delta \cdot 2 \int_{\omega \Delta / kv_F}^{\Delta} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Quindi

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} - i \frac{e^2 p_F^2 \Delta \omega \ln(kv_F/\omega)}{2\pi c \hbar^3 T k (e^{\Delta/T} + 1)(e^{-\Delta/T} + 1)}. \quad (97,6)$$

La parte immaginaria di Q definisce la dissipazione; il suo segno negativo corrisponde al segno positivo della parte immaginaria della costante dielettrica.

L'espressione (97,6) diventa inapplicabile per $T \rightarrow T_c$ quando N_s e Δ tendono a zero. Qui il contributo principale all'integrale rispetto a p nella (97,5) proviene dalla regione $\eta \sim T \gg \Delta$, nella quale si può porre $\Delta = 0$. In seguito otteniamo

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = -i \frac{3\pi}{4} \frac{N e^2}{mc} \frac{\omega}{kv_F},$$

¹⁾ Ciò si prova facilmente mediante le formule dedotte nel § 40 del volume IX nel calcolare $\rho_s = m N_s$. E da notare che $Q(0, \mathbf{k})$ si annulla (assieme a N_s) per $T \rightarrow T_c$, come è stato già detto nella nota a pag. 490.

²⁾ Questo risulta dal confronto della (97,4) con la formula (2) per la costante dielettrica trasversale del plasma elettronico senza urti nel problema 2 del § 31. Nel confrontare si deve tener presente che il caso di London corrisponde al limite quasi-classico, in modo che la formula per il gas degenerare differisce dalla formula per il plasma di Maxwell soltanto per la forma della distribuzione e per la legge della dispersione $\varepsilon(p)$.

dove $N = p_F^3/3\pi^2\hbar^3$ è la densità degli elettroni. Questa espressione corrisponde semplicemente all'effetto skin anomalo in un metallo normale (con la legge di dispersione $\varepsilon = p^2/2m$)¹⁾.

Caso di Pippard

In un campo magnetico statico il caso limite di Pippard corrisponde alla disuguaglianza

$$\hbar kv_F \gg \Delta_0 \sim T_c. \quad (97,7)$$

Considerando un campo elettromagnetico variabile, aggiungiamo anche la condizione

$$kv_F \gg \omega. \quad (97,8)$$

I calcoli in questo caso si rendono notevolmente più semplici se sottraiamo preliminarmente dall'espressione (96,24) per $Q(\omega, k)$ il suo valore statico $Q(0, k)$; questa operazione si riduce all'eliminazione del termine costante Ne^2/mc e alla sottrazione da ogni termine $(\varepsilon_+ \pm \varepsilon_- \pm \hbar\omega)^{-1}$ nell'espressione integranda dello stesso termine con $\omega = 0$. La differenza $Q(\omega, k) - Q(0, k)$ risulta essere proporzionale a $1/k$. Allo stesso modo dipende da k il valore di Pippard $Q(0, k)$:

$$Q(0, k) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\pi^2}{4\hbar v_F} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \quad (97,9)$$

(si veda IX, (51,21)). Perciò si può scrivere $Q(\omega, k)$ nella forma

$$Q(\omega, k) = \frac{c}{4\pi k} [\beta + \gamma(\omega)], \quad (97,10)$$

dove $\gamma(\omega)$ è una funzione da calcolare che si annulla per $\omega = 0$. È da notare che in virtù della stessa dipendenza da k resta valida anche la formula IX, (52,6) per la profondità di penetrazione δ , nella quale si deve soltanto sostituire β con $\beta + \gamma(\omega)$. Ma essendo $\gamma(\omega)$ complesso (si veda più avanti), in questo caso è naturale ricorrere non alla δ stessa, bensì alla grandezza ad essa legata, ossia all'impedenza superficiale $\xi(\omega) = -i\omega\delta/c$.

Nell'integrale che definisce la differenza $Q(\omega, k) - Q(0, k)$ sono importanti (così come per il calcolo di $Q(0, k)$ in IX, § 51) i piccoli valori di $\cos \theta$, inoltre, l'integrale converge rapidamente all'aumentare di $\cos \theta$; ciò consente di porre $\sin \theta = 1$ e di estendere l'integrazione rispetto a $\cos \theta$ da $-\infty$ a ∞ .

Trasformiamo l'integrale rispetto a

$$d^3p = 2\pi p^2 dp d\cos \theta \approx 2\pi p_F^2 m d\eta d\cos \theta$$

¹⁾ Si veda la formula (86,16). Nel confrontare si deve tener conto dell'indipendenza di K da ϕ in questo caso e anche del fatto che Q lega j ad A e non a E , come fa σ nella (86,16).

($\eta = p^2/2m - \mu$) in quello rispetto alle nuove variabili

$$x_1 = \varepsilon_+/\Delta, \quad x_2 = \varepsilon_-/\Delta.$$

Abbiamo

$$\eta_+ + \eta_- \approx 2\eta, \quad \eta_+ - \eta_- \approx \hbar k v_F \cos \theta.$$

Perciò l'integrazione rispetto a $d\eta$ $d \cos \theta$ si può sostituire con l'integrazione rispetto a $d\eta_+ d\eta_- / \hbar k v_F$ nei limiti da $-\infty$ a ∞ per ogni variabile η_+ e η_- . In questo caso scompariranno dall'espressione integranda tutti i termini contenenti il prodotto $\eta_+ \eta_-$ e perciò dispari rispetto a queste variabili. Dopo questa operazione si può passare all'integrazione rispetto alle variabili x_1 e x_2 nell'intervallo da 1 a ∞ per ciascuna di esse sostituendo

$$d\eta \, d \cos \theta \rightarrow 4 \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_-}{\hbar k v_F \eta_+ \eta_-} d\varepsilon_+ d\varepsilon_- = \frac{4\Delta^2 x_1 x_2 dx_1 dx_2}{\hbar k v_F [(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)]^{1/2}}.$$

In seguito a queste trasformazioni troviamo

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) = & -3\pi \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{\hbar v_F} J, \\ J = & \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx_1 dx_2}{[(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)]^{1/2}} \operatorname{th} \frac{x_1 \Delta}{2T} \times \\ & \times \left\{ (x_1 x_2 + 1) \left[\frac{1}{x_1 - x_2 - \tilde{\omega} - i0} + \frac{1}{x_1 - x_2 + \tilde{\omega} + i0} - P \frac{2}{x_1 - x_2} \right] + \right. \\ & \left. + (x_1 x_2 - 1) \left[\frac{1}{x_1 + x_2 - \tilde{\omega} - i0} + \frac{1}{x_1 + x_2 + \tilde{\omega} + i0} - \frac{2}{x_1 + x_2} \right] \right\}, \quad (97,11) \end{aligned}$$

dove $\tilde{\omega} = \hbar \omega / \Delta$. Limitiamoci alla considerazione della parte immaginaria di questa espressione, che definisce l'assorbimento dell'energia del campo.

La parte immaginaria delle espressioni integrande nella (97,11) si separa secondo la regola (29,8) e in seguito le funzioni delta si eliminano per integrazione rispetto a una delle variabili x_1 o x_2 ; inoltre si deve controllare che il punto in cui si annulla l'argomento delle funzioni delta appartenga effettivamente alla regione d'integrazione. Dopo semplici trasformazioni otteniamo per $\omega > 0$

$$\begin{aligned} J'' \equiv \operatorname{Im} J = & \pi \int_1^\infty \frac{x(x + \tilde{\omega}) + 1}{(x^2 - 1)^{1/2} [(x + \tilde{\omega})^2 - 1]^{1/2}} \times \\ & \times \left[\operatorname{th} \frac{(x + \tilde{\omega}) \Delta}{2T} - \operatorname{th} \frac{x \Delta}{2T} \right] dx + \\ & + \pi \int_1^{\tilde{\omega}-1} \frac{x(\tilde{\omega} - x) - 1}{(x^2 - 1)^{1/2} [(x - \tilde{\omega})^2 - 1]^{1/2}} \operatorname{th} \frac{x \Delta}{2T} dx; \quad (97,12) \end{aligned}$$

il secondo termine esiste soltanto per $\tilde{\omega} > 2$. Si può vedere analogamente che $J''(-\tilde{\omega}) = J''(\tilde{\omega})$. L'integrale (97,12) dipende dai due parametri Δ/T e ω/Δ , che possono avere diverse relazioni l'uno con l'altro e con l'unità. Consideriamo alcuni casi limite qui possibili.

Per $T = 0$. Allora il primo integrale nella (97,12) si annulla. Il secondo integrale, invece, è non nullo per $\omega > 2\Delta_0$, vale a dire che esiste una soglia di assorbimento nell'« energia di legame » per le coppie di Cooper. L'esistenza di questa soglia, che si manifesta direttamente nella fessura dello spettro, è una proprietà specifica dei superconduttori.

Nell'intorno della soglia, per $\tilde{\omega} - 2 \ll 1$, in tutta la regione d'integrazione x è vicino a 1. Ponendo $\tilde{\omega} - 2 = \delta$, $x - 1 = z\delta$, troviamo

$$J'' \approx \frac{\pi\delta}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = \frac{\pi^2\delta}{2} = \pi^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - 1 \right).$$

Riunendo le formule scritte sopra troviamo così la seguente espressione della parte immaginaria di Q per $T = 0$ nell'intorno della soglia di assorbimento:

$$Q'' = -\frac{3\pi^2 N e^2}{4mc} \frac{\Delta_0}{\hbar v_F k} \left(\frac{\hbar\omega}{2\Delta_0} - 1 \right). \quad (97,13)$$

Per una temperatura non nulla consideriamo il caso di piccole frequenze, $\hbar\omega \ll \Delta$, supponendo inoltre che $\Delta(T) \sim T$ (escludendo in questo modo le temperature sia nell'intorno dello zero che nell'intorno di T_c). Ora, il secondo integrale nella (97,12) è assente.

Nel primo integrale, invece, è importante la regione $x - 1 \sim \tilde{\omega} \ll 1$. Sviluppando nell'espressione integranda la differenza tra due \hbar in potenze di $\tilde{\omega}$ e introducendo la variabile $x - 1 = u$, troviamo con precisione logaritmica

$$J'' \approx \frac{\pi\hbar\omega}{2T} \text{ch}^{-2} \frac{\Delta}{2T} \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{du}{\sqrt{u(u+\tilde{\omega})}} = \frac{\pi\hbar\omega}{2T} \text{ch}^{-2} \frac{\Delta}{2T} \ln \frac{\Delta}{\hbar\omega}.$$

Infine otteniamo

$$Q'' = -\frac{3\pi}{8} \frac{N e^2}{mc} \frac{\omega}{v_F k} \frac{\Delta}{T} \text{ch}^{-2} \frac{\Delta}{2T} \ln \frac{\Delta}{\hbar\omega}. \quad (97,14)$$

§ 98. Conducibilità termica dei superconduttori

La natura fisica della conducibilità termica elettronica dei superconduttori è analoga alla natura della conducibilità termica o della viscosità del liquido di Bose superfluido. In ambedue i casi

si tratta dei coefficienti cinetici della componente normale del liquido quantistico, ossia dell'insieme delle eccitazioni elementari in esso. Studiamo questo problema nei limiti dello stesso modello BCS (*B.T. Geilikman*, 1958).

Partiamo dall'equazione cinetica per la funzione di distribuzione delle quasi-particelle in un superconduttore, in cui esista un gradiente della temperatura

$$\mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \text{St } n, \quad (98,1)$$

dove $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ è la velocità delle quasi-particelle. L'energia della quasi-particella è

$$\varepsilon = [v_F^2 (p - p_F)^2 + \Delta^2(T)]^{1/2} \quad (98,2)$$

e dipende essa stessa dalla temperatura attraverso la fessura energetica $\Delta(T)$. Perciò in presenza del gradiente della temperatura l'energia ε diventa anch'essa funzione delle coordinate e la derivata $-\partial \varepsilon / \partial \mathbf{r}$ funge da forza agente sulla quasi-particella; a ciò è dovuta la comparsa del secondo termine a primo membro dell'equazione (98,1).

Come al solito, poniamo $n = n_0(\varepsilon) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, dove

$$n_0(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} + 1)^{-1} \quad (98,3)$$

è la funzione di distribuzione d'equilibrio. Conservando a primo membro dell'equazione solo i termini con n_0 , abbiamo

$$\mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial n_0}{\partial T} - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right] \mathbf{v} \nabla T.$$

Nella differenza tra parentesi quadre i termini contenenti la derivata rispetto a Δ si elidono e, quindi, resta

$$-\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \mathbf{v} \nabla T = \frac{\mathbf{v} \nabla T}{T^2} \frac{\varepsilon}{(e^{\varepsilon/T} + 1)(e^{-\varepsilon/T} + 1)}.$$

L'integrale degli urti dipende dal meccanismo di diffusione delle quasi-particelle. Consideriamo il caso in cui questo meccanismo fondamentale è rappresentato dalla diffusione elastica sugli atomi fissi di impurità; supponiamo isotropa la legge della diffusione. Allora l'integrale degli urti si riduce all'espressione (si veda la (11,3))

$$\text{St } n = -v \delta n,$$

dove $v = v N_{\text{imp}} \sigma_t$ è la frequenza efficace degli urti, N_{imp} la densità del numero di atomi di impurità, σ_t la sezione di trasporto della diffusione della quasi-particella su un atomo di impurità. Quest'ultima è una grandezza costante dell'ordine delle dimensioni atomiche.

Così, l'equazione cinetica diventa

$$\frac{\mathbf{v} \nabla T}{v} \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta n}{l}, \quad (98,4)$$

dove $l = 1/N_{\text{imp}} \sigma_l$ è la lunghezza costante del cammino libero.

Il flusso di calore si calcola come l'integrale

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v} \delta n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (98,5)$$

(il fattore 2 è dovuto alle due direzioni dello spin della quasi-particella). Ma alla funzione di distribuzione $n = n_0 + \delta n$ è legata anche la corrente elettrica nel superconduttore di densità:

$$\mathbf{j}_n = \mathbf{j} - \mathbf{j}_s = -\frac{e}{m} \int \mathbf{p} \delta n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} - e(N - N_s) \mathbf{v}_s$$

(nel modello in esame $\mathbf{j} = -e\mathbf{i}/m$, e \mathbf{i} è dato dalla formula (77,7)). Fra l'altro, il coefficiente di conducibilità termica è definito rispetto al flusso termico per la condizione $\mathbf{j} = 0$. In questo caso, tuttavia, la condizione suindicata non richiede di procedere ad alcuna modifica dell'equazione (98,4). Infatti, la densità totale della corrente nel superconduttore è la somma $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$ delle correnti normale e superconduttrice. La corrente \mathbf{j}_n che compare in presenza del gradiente della temperatura è compensata automaticamente (per circuito elettrico aperto) dalla corrente superconduttrice $\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_n$. In questo caso è importante che il moto degli elettroni superconduttori non sia legato al trasporto di calore. La funzione di distribuzione d'equilibrio delle quasi-particelle « sullo sfondo » del moto superfluido con velocità $\mathbf{v}_s = -\mathbf{j}_s/eN_s$ differisce dalla funzione (98,3) per la sostituzione di ε con $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s$ (cfr. il § 77); questa sostituzione dovrebbe essere realizzata anche nell'equazione cinetica (98,1). Ma la grandezza \mathbf{v}_s è proporzionale a \mathbf{j}_n e, quindi, al piccolo gradiente ∇T ; perciò tale sostituzione implicherebbe la comparsa a primo membro dell'equazione cinetica di termini infinitesimi supplementari solo del secondo ordine, che dovrebbero essere omessi lo stesso passando alla (98,4).

Ponendo δn dalla (98,4) nella (98,5) e calcolando la media rispetto alle direzioni \mathbf{p} , otteniamo per il coefficiente di conducibilità termica l'espressione

$$\kappa = -\frac{l}{3T} \int v \varepsilon^2 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2 \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

oppure, sostituendovi $v dp = d\varepsilon$, $p^2 \approx p_F^2$,

$$\kappa = -\frac{lp_F^2}{3\pi^2\hbar^3T} \cdot 2 \int_{\Delta}^{\infty} \varepsilon^2 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (98,6)$$

Infine, dopo sostituzioni evidenti abbiamo

$$\kappa = \frac{2lp_F^2\Delta^3}{3\pi^2\hbar^3T^2} \int_1^\infty \frac{u^2 du}{(e^{u\Delta/T} + 1)(e^{-u\Delta/T} + 1)}. \quad (98,7)$$

Per $T \rightarrow 0$ e $\Delta \rightarrow \Delta_0$ il coefficiente di conducibilità termica tende a zero secondo la legge

$$\kappa = \frac{2lp_F^2\Delta^2}{3\pi^2\hbar^3T} e^{-\Delta/T}. \quad (98,8)$$

Per $T \rightarrow T_c$ e $\Delta \rightarrow 0$ esso tende (come si vede dalla (98,6)) al valore

$$\kappa = \frac{4lp_F^2T}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \varepsilon n_0(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{lp_F^2T}{9\hbar^3},$$

corrispondente al metallo normale.

CINETICA DELLE TRANSIZIONI DI FASE

§ 99. *Cinetica delle transizioni di fase di prima specie.* *Formazione dei germi*

Ricordiamo le tesi fondamentali della teoria termodinamica della formazione di germi in una transizione di fase (si veda V, § 162).

La transizione di una fase metastabile in una stabile si realizza con una crescita fluttuante nel mezzo omogeneo di piccole accumulazioni della nuova fase, ossia di germi. L'effetto della comparsa della superficie di separazione, che è svantaggioso dal punto di vista energetico, fa sì, tuttavia, che per dimensioni del germe insufficientemente grandi esso diventa instabile e scompare nuovamente. Sono stabili solo germi di dimensione a , a partire da una determinata dimensione a_{cr} (per un dato stato della fase metastabile); questa dimensione si chiama *critica* e anche i germi della dimensione critica sono detti critici ¹⁾. I germi critici sono supposti come formazioni macroscopiche contenenti un grande numero di molecole. Perciò tutta la teoria è valida unicamente per gli stati metastabili non troppo vicini alla frontiera di instabilità assoluta della fase (avvicinandosi a questa frontiera le dimensioni dei germi critici decrescono, tendendo a una grandezza dell'ordine delle dimensioni molecolari).

Per un trattamento termodinamico puro si può porre solo il problema del calcolo della probabilità della crescita fluttuante di germi di dimensioni diverse in un mezzo supposto in equilibrio. L'ultima circostanza ha un'importanza teorica. Poiché lo stato della fase metastabile non corrisponde in realtà all'equilibrio statistico, questo trattamento si riferisce unicamente a tempi piccoli rispetto al tempo (alla probabilità inversa) di formazione dei germi critici, dopo il quale inizia in effetti la transizione alla fase nuova, cioè la distruzione dello stato metastabile. Questa è la ragione per cui il calcolo termodinamico della probabilità di comparsa è possibile soltanto per germi di dimensioni $a < a_{cr}$, germi di dimensioni più grandi si sviluppano nella fase nuova; in altre parole, tali fluttuazioni grandi non appartengono, in generale, all'insieme di stati microscopici corrispondenti allo stato macroscopico in esame (metastabile).

¹⁾ In V, § 162 con germi si intendevano solo le accumulazioni della nuova fase proprio di questa dimensione critica.

Anziché parlare della probabilità termodinamica di formazione dei germi, parleremo di una funzione che le è proporzionale, ossia della funzione di distribuzione « d'equilibrio » (nel senso indicato) dei germi di diverse dimensioni esistenti nel mezzo; la indicheremo con $f_0(a)$ ($f_0 da$ è il numero di germi con dimensioni appartenenti all'intervallo da nell'unità di volume del mezzo). In accordo con la teoria termodinamica delle fluttuazioni abbiamo

$$f_0(a) \propto \exp \left\{ -\frac{R_{\min}(a)}{T} \right\}, \quad (99,1)$$

dove R_{\min} è il lavoro minimo da compiere per creare un germe di data dimensione. Questo lavoro è composto delle parti volumetrica e superficiale e ha la forma (per un germe sferico di raggio a)

$$R_{\min} = -\frac{8\pi a^3 \alpha}{3a_{\text{cr}}} + 4\pi a^2 \alpha,$$

dove α è il coefficiente di tensione superficiale e il raggio critico a_{cr} è espresso in funzione delle grandezze termodinamiche di entrambe le fasi (si veda V, § 162, il problema 2). Il valore $a = a_{\text{cr}}$ corrisponde al massimo della funzione $R_{\min}(a)$; nel suo intorno

$$R_{\min} = \frac{4\pi}{3} \alpha a_{\text{cr}}^2 - 4\pi \alpha (a - a_{\text{cr}})^2. \quad (99,2)$$

Al massimo di R_{\min} corrisponde un minimo esponenzialmente acuto della funzione di distribuzione. Trascurando la dipendenza da a , notevolmente più lenta del fattore davanti all'esponente, abbiamo

$$f_0(a) = f_0(a_{\text{cr}}) \exp \left\{ -\frac{4\pi \alpha}{T} (a - a_{\text{cr}})^2 \right\}, \quad (99,3)$$

dove ¹⁾

$$f_0(a_{\text{cr}}) = \text{costante} \cdot \exp \left\{ -\frac{4\pi \alpha a_{\text{cr}}^2}{3T} \right\}.$$

In accordo con quanto detto sopra, il valore $a = a_{\text{cr}}$ corrisponde alla frontiera oltre la quale inizia la formazione di massicce quantità della fase nuova. Più precisamente, si dovrebbe parlare non del punto di frontiera $a = a_{\text{cr}}$, bensì di un'intera regione critica di valori a attorno a questo punto, di larghezza $\delta a \sim (T/4\pi\alpha)^{1/2}$. Lo

¹⁾ Il fattore davanti all'esponente in $f_0(a_{\text{cr}})$ non può essere espresso in funzione delle sole caratteristiche macroscopiche delle fasi. Per una stima qualitativa si può supporre che questo fattore sia proporzionale alla densità N_1 del numero di particelle nella fase fondamentale (fase 1) e alla derivata $d\mathcal{N}/da$, dove \mathcal{N} è il numero di particelle nel germe della fase nuova (fase 2). Ponendo $N_1 \sim 1/v_1$, $\mathcal{N} \sim a_{\text{cr}}^3/v_2$ (dove v_1 e v_2 sono i volumi riferiti a una molecola in ciascuna delle fasi), otteniamo la seguente stima costante: $\sim a_{\text{cr}}^3/v_1 v_2$.

sviluppo fluttuante dei germi in questa regione di dimensioni può ancora rigettarli indietro, con probabilità notevole, nella regione precritica; i germi passati per la regione critica si svilupperanno impetuosamente nella fase nuova.

Poiché la teoria termodinamica è limitata allo stadio che precede di fatto la transizione di fase, essa non può dare risposta alle questioni inerenti all'andamento di questo processo e alla sua velocità. Qui occorre un'analisi cinetica dell'evoluzione dei germi che alla fine conduce alla loro trasformazione nella fase nuova ¹⁾.

Indichiamo con $f(t, a)$ la funzione di distribuzione « cinetica » delle dimensioni dei germi. L'« atto elementare » che cambia le dimensioni del germe è l'acquisizione o la perdita di una molecola; si deve ritenere piccolo questo cambiamento, poiché i germi stessi, nella teoria considerata, rappresentano formazioni macroscopiche. Questa circostanza permette di descrivere la crescita dei germi mediante un'equazione cinetica del tipo di quella di Fokker-Planck,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial s}{\partial a}, \quad (99,4)$$

dove s è la densità del flusso nello « spazio delle dimensioni », avente la forma

$$s = -B \frac{\partial f}{\partial a} + Af. \quad (99,5)$$

La grandezza B funge da « coefficiente di diffusione dei germi rispetto alle dimensioni ». Il coefficiente A è legato a B da una relazione che deriva dalla condizione di annullamento di s per la distribuzione d'equilibrio. Considerando quest'ultima nella forma (99,1) e trascurando la variazione lenta del fattore davanti all'esponente, troviamo

$$A = -\frac{B}{T} R'_{\ln}(a). \quad (99,6)$$

Cerchiamo una soluzione stazionaria dell'equazione cinetica, corrispondente al processo continuo di transizione di fase. In questa soluzione, $s = \text{costante}$; ed è questo valore costante del flusso (diretto verso l'aumento delle dimensioni) a dare il numero di germi passanti (in 1 s attraverso 1 cm³ del mezzo) per la regione critica, cioè a definire la velocità del processo.

Riscriviamo l'espressione del flusso (99,5) esprimendolo (tenendo conto dell'espressione (99,6)) mediante il rapporto f/f_0 al posto della funzione stessa f . Allora la condizione di costanza del flusso assume la forma

$$-Bf_0 \frac{\partial}{\partial a} \frac{f}{f_0} = s. \quad (99,7)$$

¹⁾ La teoria qui esposta appartiene a *Ja. B. Zeldovič* (1942).

Di qui abbiamo

$$\frac{f}{f_0} = -s \int \frac{da}{Bf_0} + \text{costante}.$$

I valori costanti di s e del secondo termine sono definiti dalle condizioni al contorno per a piccoli e grandi. La probabilità delle fluttuazioni aumenta rapidamente al diminuire delle dimensioni, ragione per cui i germi di piccole dimensioni compaiono con probabilità maggiore. Si può anche supporre che la riserva di questi germi sia completata così rapidamente che il loro numero continui a rimanere in equilibrio, malgrado la fuoruscita costante con il flusso s . Questa situazione trova un'espressione nella condizione al contorno $f/f_0 \rightarrow 1$ per $a \rightarrow 0$. Quanto alla condizione al contorno per a grandi, la si può stabilire osservando che nella regione sovracritica la funzione f_0 definita dalla formula (99,1) (in realtà qui inapplicabile) cresce infinitamente, mentre la funzione di distribuzione reale $f(a)$ resta finita. Questa situazione è espressa dalla condizione $f/f_0 = 0$ posta in qualche parte della regione sovracritica; non importa dove (si veda più avanti), e perciò la indichiamo convenzionalmente con $a \rightarrow \infty$ ¹⁾.

La soluzione soddisfacente ambo le condizioni poste è

$$\frac{f}{f_0} = s \int_a^\infty \frac{f_0 da}{Bf_0}, \quad (99,8)$$

dove la costante s è definita dall'uguaglianza

$$\frac{1}{s} = \int_0^\infty \frac{da}{Bf_0}. \quad (99,9)$$

La funzione integranda ha un massimo stretto per $a = a_{cr}$. Ricorrendo nell'intorno di questo punto all'espressione (99,3), si può estendere l'integrazione rispetto ad $a - a_{cr}$ della (99,9) da $-\infty$ a ∞ , a prescindere dal fatto dove si trova (all'esterno della regione critica) il limite superiore degli integrali nelle (99,8-9), cioè dove è posta la condizione al contorno. Come risultato otteniamo

$$s = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{T}} B(a_{cr}) f_0(a_{cr}). \quad (99,10)$$

Questa formula esprime il numero di germi « vitali » (passanti per la regione critica) che si formano, nelle condizioni stazionarie, entro

¹⁾ Ragionamenti analoghi sono stati applicati alla soluzione di un altro problema al § 24.

1 s in 1 cm³ della fase metastabile in funzione del numero d'equilibrio di germi critici, definiti dalla teoria termodinamica.

Per la funzione stessa $f(a)$ nella regione subcritica la formula (99,8) dà semplicemente $f(a) \approx f_0(a)$. Nella regione sovracritica, invece, dalla (99,8) si può vedere soltanto che $f \ll f_0$ in accordo con la condizione al contorno posta. È evidente dal quadro fisico del processo che in questa regione la funzione di distribuzione è costante: capitato in questa regione il germe cresce monotonamente e praticamente non torna mai indietro. Ciò premesso, nell'espressione del flusso (99,5) si può trascurare qui il termine contenente la derivata $\partial f / \partial a$, scrivendo cioè $s = Af$. Per il significato stesso del flusso s , il coefficiente A , in questo caso, funge da velocità nello spazio delle dimensioni da/dt . Ma la crescita di un germe sovracritico è descritto da equazioni macroscopiche che consentono di definire la derivata da/dt in modo indipendente

$$A = \left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{macro}}, \quad (99,11)$$

dove l'indice significa il risultato di questo calcolo ¹⁾.

In seguito, mediante la (99,6) troviamo

$$B(a) = - \frac{T}{R'_{\min}(a)} \left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{macro}} = \frac{T}{8\pi\alpha(a - a_{\text{cr}})} \left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{macro}}. \quad (99,12)$$

A rigore, la funzione $B(a)$ così calcolata si riferisce alla regione $a > a_{\text{cr}}$, mentre ci interessa (per poter sostituire nella (99,10)) il valore $B(a_{\text{cr}})$. Siccome la funzione $B(a)$ non ha alcuna singolarità nel punto $a = a_{\text{cr}}$, la si può applicare a questo punto. Notiamo in proposito che per $a \rightarrow a_{\text{cr}}$ la derivata $(da/dt)_{\text{macro}}$ si annulla (il germe si trova in equilibrio, anche se instabile); la sua divisione in $a - a_{\text{cr}}$ conduce a un valore finito.

La formula (99,12) dà la possibilità in linea di principio di calcolare il coefficiente $B(a_{\text{cr}})$ e, quindi, anche la velocità di formazione dei germi, senza ricorrere a un'analisi microscopica. Così, per il processo di ebollizione si deve considerare, mediante le equazioni idrodinamiche, la crescita di una bolla di vapore nel liquido; per il

¹⁾ Può sorgere la questione della corrispondenza della formula (99,11) con la definizione « microscopica » (21,4), secondo la quale come velocità $\sum \delta a / \delta t$ (somma rispetto agli atti elementari di crescita) funge non la grandezza stessa A , bensì la somma $\tilde{A} = A + B'(a)$. Ma la derivata $B'(a)$ è piccola (all'esterno della regione critica) rispetto al valore (99,6) contenente il grande fattore R'_{\min}/T e perciò deve essere omessa. Grandezze di questo ordine sono state già trascurate nel dedurre la (99,6) quando il fattore davanti all'esponente nella (99,1) è stato supposto costante.

processo di precipitazione di una sostanza sciolta da una soluzione satura, bisogna considerare la crescita del granello deposto per mezzo di un apporto con un meccanismo di diffusione di sostanza da parte della soluzione circostante.

PROBLEMA

Definire il « coefficiente di diffusione rispetto alle dimensioni » per il deposito di sostanza da parte di una soluzione satura (ma ancora debole); i germi sono supposti sferici.

Soluzione. Ricordiamo le formule termodinamiche. Il raggio critico del germe per il suo deposito dalla soluzione satura è

$$a_{cr} = \frac{2\alpha v'}{\mu' - \mu_0'}$$

(si veda V, § 162, il problema 2), dove in questo caso μ_0' e v' sono rispettivamente il potenziale chimico e il volume molecolare della sostanza del germe e μ' è il potenziale chimico della sostanza sciolta nella soluzione; quest'ultimo è dato dalla formula $\mu' = T \ln c + \psi(P, T)$, dove c è la concentrazione. Introducendo la concentrazione della soluzione satura $c_{0\infty}$ sopra la superficie piana della sostanza solubile in accordo con $T \ln c_{0\infty} + \psi = \mu_0'$, abbiamo

$$\mu' - \mu_0' = T \ln \frac{c}{c_{0\infty}} \approx \frac{T(c - c_{0\infty})}{c_{0\infty}};$$

l'ultima uguaglianza si riferisce alle soluzioni deboli. Quindi, il raggio critico

$$a_{cr} = \frac{2\alpha v' c_{0\infty}}{T(c - c_{0\infty})}. \quad (1)$$

Quanto alla formula

$$c_{0a} = c_{0\infty} \left(1 + \frac{2\alpha v'}{Ta} \right) = c_{0\infty} + \frac{a_{cr}}{a} (c - c_{0\infty}), \quad (2)$$

essa definisce la concentrazione c_{0a} della soluzione satura sopra la superficie sferica (di raggio a) della sostanza solubile.

L'apporto della sostanza al germe sovracritico in crescita si realizza mediante diffusione dalla soluzione circostante. In regime stazionario la distribuzione a simmetria sferica della concentrazione $c(r)$ attorno al germe di raggio a è definita dalla soluzione dell'equazione di diffusione

$$D \Delta c(r) = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r c(r) = \frac{\partial c(r)}{\partial t} \equiv 0$$

con le condizioni al contorno $c(\infty) = c$ (valore assegnato della concentrazione della soluzione satura) e $c(a) = c_{0a}$. Ne segue che

$$c(r) = c - (c - c_{0a}) \frac{a}{r}$$

e il flusso di diffusione nella direzione del germe è

$$I = 4\pi r^2 D \frac{dc}{dr} = 4\pi D a (c - c_{0a}) = 4\pi D (c - c_{0\infty}) (a - a_{cr});$$

nell'ultima uguaglianza si è usata la formula (2).

Se la concentrazione è definita come numero di molecole sciolte nell'unità di volume, allora I è il numero di molecole deposte in 1 s sulla superficie del germe. Allora

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{macro}} = \frac{Iv'}{4\pi a^2} = \frac{Dv'}{a^2} (a - a_{cr}) (c - c_{0\infty})$$

e, secondo la (99,12),

$$B(a_{cr}) = \frac{TDv'(c - c_{0\infty})}{8\pi\alpha a_{cr}^2} = \frac{Dv'^2 c_{0\infty}}{4\pi a_{cr}^2}.$$

§ 100. Cinetica delle transizioni di fase di prima specie.

Stadio di coalescenza

La cinetica della transizione di fase studiata al paragrafo precedente si riferisce unicamente al suo stadio iniziale: il volume generale di tutti i germi della fase nuova deve essere così piccolo che la formazione e la crescita non incidano sensibilmente sul « grado di metastabilità » della fase fondamentale e che, quindi, la dimensione critica dei germi definita da questo grado si possa supporre una grandezza costante. In questo stadio avviene la formazione fluttuante dei germi della fase nuova, mentre la crescita di ciascuno di essi è indipendente dal comportamento degli altri germi. Per fissare le idee, parleremo più avanti del processo di deposito di sostanza sciolta da una soluzione satura; in questo caso il grado di metastabilità è rappresentato dal grado di saturazione della soluzione.

Nello stadio tardo, quando la saturazione della soluzione diventa molto piccola, il carattere del processo cambia notevolmente. Qui praticamente è esclusa la formazione fluttuante di germi nuovi, poiché le dimensioni critiche sono grandi. L'aumento delle dimensioni critiche, che accompagna la diminuzione progressiva del grado di saturazione della soluzione, fa sì che i più piccoli granelli della nuova fase tra quelli esistenti diventano subcritici e si sciolgono nuovamente. In tal modo, il ruolo decisivo in questo stadio è giocato dal processo di « divorazione » dei granelli piccoli da parte di quelli grandi, ossia la crescita dei granelli più grandi a causa dello scioglimento di quelli più piccoli (processo di *coalescenza*). Questo stadio sarà considerato più avanti, nel presente paragrafo. È supposto, inoltre, che la concentrazione iniziale della soluzione sia così piccola

che i granelli depositati sono distanti gli uni dagli altri in modo che si può trascurare la loro « interazione » diretta ¹⁾.

Considereremo una soluzione solida, in cui i granelli depositati sono fissi e crescono soltanto in seguito a diffusione dalla soluzione circostante. Proponendoci di dimostrare il metodo e le proprietà qualitative fondamentali del processo, faremo inoltre alcune altre ipotesi di semplificazione, cioè trascureremo le tensioni elastiche attorno ai granelli depositati, che supporremo sferici.

La concentrazione d'equilibrio della soluzione nell'intorno della superficie di un granello di raggio a è data dalla formula termodinamica

$$c_{0a} = c_{0\infty} \left(1 + \frac{2\alpha v'}{Ta} \right), \quad (100,1)$$

dove $c_{0\infty}$ è la concentrazione della soluzione satura sopra la superficie piana della sostanza solubile, α il coefficiente di tensione superficiale sulla frontiera tra le fasi, v' il volume molecolare della sostanza solubile (si veda il problema del paragrafo precedente). Definiamo la concentrazione in base alla quantità di sostanza sciolta in 1 cm³. Per questa definizione il flusso di diffusione $i = D \partial c / \partial r$ nell'intorno della superficie del granello coinciderà con la velocità di variazione del suo raggio:

$$\frac{da}{dt} = D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

(D è il coefficiente di diffusione della sostanza sciolta). Siccome la concentrazione è supposta piccola, questa velocità è talmente esigua da poter considerare la distribuzione della concentrazione attorno al granello coincidente ad ogni istante con la distribuzione stazionaria $c(r)$, corrispondente a un dato valore a :

$$c(r) = c - (c - c_{0a}) \frac{a}{r}$$

(c è la concentrazione media della soluzione). Ne segue che il flusso di diffusione è $i(r) = Da(c - c_{0a})/r^2$ e, inoltre, tenendo conto della (100,1),

$$i(a) = \frac{da}{dt} = \frac{D(c - c_{0a})}{a} = \frac{D}{a} \left(\Delta - \frac{\sigma}{a} \right),$$

dove si sono introdotti il parametro $\sigma = 2\alpha v' c_{0\infty} / T$ e la saturazione della soluzione $\Delta = c - c_{0\infty}$. La grandezza

$$a_{cr}(t) = \sigma / \Delta(t) \quad (100,2)$$

¹⁾ La teoria esposta appartiene a I. M. Lifšits e V. V. Slezov (1958).

è il raggio critico: per $a > a_{cr}$ il granello cresce ($da/dt > 0$) e per $a < a_{cr}$ si scioglie ($da/dt < 0$). Più avanti (fino alla formulazione dei risultati definitivi) misureremo il tempo nelle unità $a_{cr}^3(0)/D\sigma$, dove $a_{cr}(0)$ è il valore del raggio critico corrispondente all'inizio della coalescenza. Otteniamo così l'equazione

$$\frac{da}{dt} = \frac{a_{cr}^3(0)}{a} \left(\frac{1}{a_{cr}} - \frac{1}{a} \right). \quad (100,3)$$

Inoltre, introduciamo la funzione di distribuzione delle dimensioni dei granelli, $f(t, a)$, normalizzata in modo tale che l'integrale

$$N(t) = \int_0^{\infty} f(t, a) da$$

rappresenti il numero di granelli nell'unità di volume. Considerando $v_a = da/dt$ come velocità di spostamento dei granelli nello spazio delle dimensioni, scriviamo l'equazione di continuità in questo spazio

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} (fv_a) = 0. \quad (100,4)$$

Infine, la conservazione della quantità totale di sostanza sciolta è data dall'equazione

$$\Delta + q = \text{costante} \equiv Q, \quad q(t) = \frac{4\pi}{3} \int a^3 f(t, a) da, \quad (100,5)$$

dove Q è la saturazione iniziale totale, q il volume di granelli depositati (in 1 cm^3 della soluzione).

Le equazioni (100,3-5) costituiscono il sistema completo di equazioni per il problema in esame. Trasformiamole introducendo variabili più adatte allo studio.

Introduciamo la grandezza adimensionale

$$x(t) = a_{cr}(t)/a_{cr}(0). \quad (100,6)$$

Per $t \rightarrow \infty$ la saturazione $\Delta(t)$ tende a zero e il raggio critico, rispettivamente, all'infinito. Perciò al variare di t da 0 a ∞ varia monotonamente da 0 a ∞ anche la grandezza

$$\tau = 3 \ln x(t), \quad (100,7)$$

che consideriamo ora come nuova variabile temporale. Come funzione incognita nell'equazione (100,3) introduciamo il rapporto

$$u = a/a_{cr}(t). \quad (100,8)$$

In seguito l'equazione diventa

$$\frac{du^3}{d\tau} = \gamma(u-1) - u^3, \quad (100,9)$$

dove

$$\gamma = \gamma(\tau) = \frac{dt}{x^2 dx} > 0. \quad (100,10)$$

Iniziando l'analisi delle equazioni, prima di tutto mostriamo che per $\tau \rightarrow \infty$ la funzione $\gamma(\tau)$ deve tendere a un limite finito.

Il secondo membro dell'equazione (100,9) ha un massimo per $u^2 = \gamma/3$ e assume in esso il valore $\gamma [2/3 (\gamma/3)^{1/2} - 1]$. Perciò, a seconda del valore γ , il grafico della velocità $du^3/d\tau$ quale funzione di u può avere una delle tre forme rappresentate nella fig. 34. Per $\gamma = \gamma_0 = 27/4$ la curva è tangente all'asse delle ascisse nel punto $u = u_0 = 3/2$.

Ciascuno dei punti dell'asse delle ascisse, che rappresenta lo stato del granello, si muove a destra o a sinistra a seconda del segno della derivata $du^3/d\tau$. Per $\gamma > \gamma_0$ tutti i punti a sinistra di u_1 si muovono verso sinistra e scompaiono dopo aver raggiunto l'origine delle coordinate. I punti $u > u_1$, invece, si muovono verso il punto u_2 avvicinandosi asintoticamente ad esso da destra o da sinistra. Ciò vuol dire che tutti i granelli con $u > u_1$, cioè di raggio $a > u_1 a_{cr}$, acquisirebbero asintoticamente (per $\tau \rightarrow \infty$) la dimensione $a = a_{cr} u_2$ che tende all'infinito con a_{cr} ; in tal modo, il volume generale q di gra-

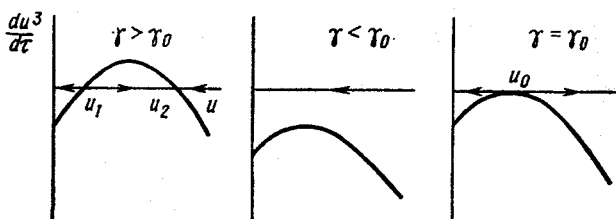


Fig. 34

nelli depositati tenderebbe anch'esso all'infinito, in modo che l'equazione della conservazione della materia (100,5) non può essere soddisfatta. Per $\gamma < \gamma_0$ tutti i punti si muovono a sinistra e scompaiono dopo aver raggiunto in un tempo finito l'origine delle coordinate; in questo caso $q(\tau) \rightarrow 0$ e l'equazione (100,5) di nuovo non può essere soddisfatta.

Quindi, la funzione $\gamma(\tau)$ deve tendere al limite γ_0 avvicinandosi a questo valore dal basso: avvicinandosi dall'alto (oppure per l'uguaglianza esatta $\gamma = \gamma_0$) tutti i punti con $u > u_0$ nel loro moto verso sinistra « si arresterebbero » lo stesso nel punto $u = u_0$ (in cui

la velocità $du^3/d\tau = 0$) e l'equazione (100,5) non potrebbe essere soddisfatta così come nel caso $\gamma(\infty) > \gamma_0$. Dunque, deve essere

$$\gamma(\tau) = \frac{27}{4} [1 - \varepsilon^2(\tau)], \quad (100,11)$$

dove $\varepsilon \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$. Inoltre, i punti provenienti da destra penetrano più lentamente attraverso il « punto di arresto » $u = u_0$. La velocità di questa penetrazione è definita dalla funzione $\varepsilon(\tau)$ che nuovamente deve essere definita mediante l'equazione del moto (100,9) e l'equazione di conservazione della materia (100,5).

Nell'intorno del punto $u = u_0$ l'equazione (100,9) con γ dalla (100,11) diventa

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{2}{3} \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Introducendo la nuova variabile come rapporto $z = (u - 3/2)/\varepsilon$ di due grandezze piccole, riscriviamo questa equazione come segue:

$$\frac{3}{2\varepsilon} \frac{dz}{d\tau} = -z^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} z\eta, \quad \eta = \frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}. \quad (100,12)$$

La sua analisi, analoga a quella effettuata sopra per l'equazione (100,9), conduce alla conclusione che asintoticamente per $\tau \rightarrow \infty$ la funzione $\eta(\tau)$ deve tendere al limite finito $\eta_0 = 2/\sqrt{3}$ (questo è il valore di η , per cui la curva della dipendenza da z del secondo membro dell'equazione (100,12) è tangente all'asse delle ascisse nel « punto di arresto » $z_0 = \sqrt{3}/2$). Dall'uguaglianza asintotica $\eta = \eta_0$ deriva l'espressione limite della funzione

$$\varepsilon(\tau) = \sqrt{3}/2\tau. \quad (100,13)$$

Per $\tau^2 \gg 1$ si può trascurare il termine correttivo nella (100,11). Allora dall'equazione $1/\gamma = x^2 (dx/dt) = 4/27$ ricaviamo la legge limite della dipendenza del raggio critico dal tempo:

$$x(t) = \frac{a_{cr}(t)}{a_{cr}(0)} = \left(\frac{4t}{9}\right)^{1/3}. \quad (100,14)$$

Poiché $\tau = \ln x^3$, la condizione di applicabilità del risultato (100,14), espressa mediante il tempo vero e proprio t , si scrive $\ln^2 t \gg 1$. È da notare che anche se il valore relativo delle correzioni a γ_0 decresce rapidamente all'aumentare di τ e la prima approssimazione (la legge (100,14)) diventa sempre più precisa, il comportamento della soluzione in prossimità del punto di arresto è definito da queste correzioni.

Passiamo al calcolo della funzione di distribuzione delle dimensioni dei granelli. La distribuzione nelle variabili u , τ è legata a quella nelle variabili a , t dalla relazione

$$\varphi(\tau, u) du = f(t, a) da, \quad f = \varphi / a_{cr}. \quad (100,15)$$

L'equazione di continuità per questa funzione è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial u} (v_u \varphi) = 0, \quad v_u = \frac{du}{d\tau}. \quad (100,16)$$

Ovunque, tranne nell'intorno vicino ($\sim \varepsilon$) del punto u_0 , la velocità v_u è data dall'equazione (100,9) con $\gamma = 27/4$:

$$v_u = \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{3u^2} \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 (u+3) \quad (100,17)$$

La soluzione dell'equazione (100,16) ha la forma

$$\varphi(\tau, u) = \frac{\chi(\tau - \tau(u))}{-v_u}, \quad \tau(u) = \int_0^u \frac{du}{v_u}, \quad (100,18)$$

dove χ è una funzione qualsiasi da definire.

Abbiamo visto che tutti i punti sull'asse u , rappresentanti i granelli, muovendosi da destra a sinistra attraversano l'intorno del punto di arresto, inoltre, quanto più tardi finiscono in questa regione tanto più a lungo vi restano. Quindi, questo intorno funge da fuoriuscita per i punti $u > u_0$ e da sorgente per la regione $u < u_0$.

La funzione di distribuzione a destra del punto u_0 per $\tau \rightarrow \infty$ è definita dai punti provenienti da una regione infinitamente lontana e corrispondenti ai granelli sulla « coda » della loro distribuzione iniziale (per $\tau = 0$). Poiché il numero di granelli in questa distribuzione, ovviamente, decresce rapidamente (in pratica esponenzialmente) all'aumentare delle loro dimensioni, la funzione di distribuzione nella regione $u > u_0$ (all'esterno dell'intorno del punto u_0) tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$.

Nell'equazione di conservazione della materia (100,5) il termine $\Delta(\tau) \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$. Esprimendo l'integrale q mediante le variabili τ , u (ricordiamo che $a^3 = u^3 x^3 a_{cr}^3(0) = u^3 e^{\tau} a_{cr}^3(0)$), otteniamo l'equazione

$$\kappa e^{\tau} \int_0^{\infty} u^3 \varphi(\tau, u) du = 1, \quad \kappa = \frac{4\pi a_{cr}^3(0)}{3Q}, \quad (100,19)$$

si deve sostituire φ dalla (100,18) con v_u dalla (100,17)¹⁾. Si vede immediatamente che l'espressione a primo membro dell'uguaglianza (100,19) può essere una grandezza dipendente da τ se la funzione χ ha la forma

$$\chi(\tau - \tau(u)) = Ae^{-\tau + \tau(u)}.$$

La funzione $\tau(u)$ si calcola con un'integrazione elementare, per cui si ottiene

$$\varphi(\tau, u) = Ae^{-\tau} P(u), \quad (100,20)$$

dove

$$P(u) = \frac{3^4 e}{2^{5/3}} \frac{u^2 \exp[-1/(1-2u/3)]}{(u+3)^{7/3} (3/2-u)^{11/3}}, \quad u < \frac{3}{2}, \quad (100,21)$$

$$P(u) = 0, \quad u > 3/2.$$

La costante A è definita dalla sostituzione inversa della (100,20) nell'equazione (100,19); il calcolo numerico dell'integrale così ottenuto dà $A = 0,9/\kappa$. La funzione $P(u)$ è normalizzata automaticamente ad 1:

$$\int_0^{u_0} P(u) du = \int_0^{3/2} \frac{e^{\tau(u)}}{-v_u} du = - \int_0^{-\infty} e^{\tau} d\tau = 1.$$

Perciò il numero di granelli nell'unità di volume è

$$N = \int_0^{u_0} \varphi(\tau, u) du = Ae^{-\tau} = \frac{9A}{4t}. \quad (100,22)$$

È facile trovare anche il valore medio \bar{u} (secondo la distribuzione (100,21)). A tal fine consideriamo l'integrale

$$\int_0^{u_0} P(u)(u-1) du = \int_0^{u_0} e^{\tau(u)}(u-1) \frac{du}{-v_u} = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} [u(\tau)-1] d\tau.$$

Sostituendovi $u(\tau) - 1$ dalla (100,9) otteniamo

$$\frac{4}{27} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \left[u^3(\tau) + \frac{du^3(\tau)}{d\tau} \right] d\tau = \frac{4}{27} u^3(\tau) e^{\tau} \Big|_{-\infty}^0 = 0.$$

¹⁾ Non ci soffermiamo sulla dimostrazione del fatto che il contributo relativo all'integrale dall'intorno del punto u_0 (in cui l'espressione (100,17) non è applicabile) tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$.

Quindi

$$\bar{u} = \int_0^{u_0} P(u) u \, du = \int_0^{u_0} P(u) \, du = 1,$$

vale a dire che $\bar{a} = a_{\text{cr}}(t)$, cioè le dimensioni medie coincidono con quelle critiche.

Riunendo le formule dedotte, scriviamo ancora una volta i risultati ottenuti tornando alle variabili iniziali, ossia al raggio a del granello e al tempo misurabile t . Il valore medio del raggio del granello cresce con il tempo secondo la legge asintotica

$$\bar{a} = \left(\frac{4\sigma D}{9} t \right)^{1/3}. \quad (100,23)$$

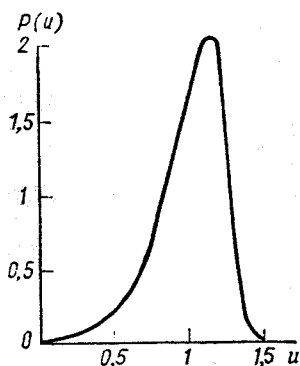


Fig. 35

dello stadio di coalescenza). Il numero totale di granelli (nell'unità di volume) decresce con il tempo secondo la legge

$$N(t) = 0,5Q/D\sigma t. \quad (100,24)$$

La soprasaturazione della soluzione, invece, tende a zero come

$$\Delta(t) = (9\sigma^2/Dt)^{1/3}. \quad (100,25)$$

Per una comprensione corretta di queste leggi sottolineiamo che in tale analisi il volume generale della soluzione è stato supposto illimitato, perciò la riserva totale di sostanza sciolta è anch'essa illimitata. In un volume finito il processo termina, ovviamente, in un tempo finito quando tutta la sostanza sciolta viene depositata sotto forma di solido.

§ 101. Rilassamento del parametro d'ordine nell'intorno del punto di una transizione di fase di seconda specie

Come è noto, la variazione dello stato di un corpo per una transizione di fase di seconda specie è descritta dal parametro d'ordine η , non nullo da una parte del punto di transizione (nella fase « asim-

metrica ») e nullo dall'altra parte (nella fase « simmetrica »). Nel vol. V, capitolo XIV abbiamo studiato le proprietà dell'equilibrio termodinamico dei corpi nell'intorno dei punti di transizione. Ora, occupiamoci del processo di rilassamento del parametro d'ordine in un sistema non in equilibrio.

Il valore d'equilibrio del parametro d'ordine (che indichiamo qui con $\bar{\eta}$) è definito dalla minimizzazione del potenziale termodinamico corrispondente. Proponendoci di studiare sia il caso spazialmente omogeneo che quello disomogeneo, ricorriamo al potenziale Ω che è funzione della temperatura T e del potenziale chimico μ (per un dato volume del corpo); cfr. V, § 146.

In un corpo spazialmente omogeneo il valore η è definito dal minimo di $\Omega(T, \mu, \eta)$ (potenziale termodinamico dell'unità di volume) quale funzione del parametro η per T e μ dati:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \quad (101,1)$$

Se questa condizione non è soddisfatta, inizia il processo di rilassamento, cioè il parametro η varia con il tempo tendendo a $\bar{\eta}$. In uno stato debolmente non in equilibrio, cioè per valori non nulli ma piccoli della derivata $\partial \Omega / \partial \eta$, la velocità del rilassamento, ossia la derivata $d\eta/dt$ è anch'essa piccola. Nella teoria di Landau, nella quale le fluttuazioni del parametro d'ordine si trascurano, si deve supporre che il legame tra queste due derivate si riduca alla semplice proporzionalità

$$\frac{d\eta}{dt} = -\gamma \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \quad (101,2)$$

con il coefficiente γ costante (*L.D. Landau, I.M. Khalatnikov, 1954*).

Nella teoria di Landau il potenziale termodinamico nell'intorno del punto di transizione ha la forma

$$\Omega = \Omega_0(T, \mu) + (T - T_c) \alpha \eta^2 + b \eta^4 \quad (101,3)$$

con il coefficiente b positivo; se alla fase asimmetrica corrisponde la regione $T < T_c$, allora anche $\alpha > 0$ (si veda V, (146,3)). Il valore d'equilibrio del parametro d'ordine nella fase asimmetrica, ossia la soluzione dell'equazione (101,1), è

$$\bar{\eta} = \left[\frac{\alpha(T_c - T)}{2b} \right]^{1/2}. \quad (101,4)$$

L'equazione del rilassamento (101,2) assume la forma

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\gamma [(T - T_c) \alpha \eta + 2b\eta^3]$$

ossia, linearizzando rispetto alla piccola differenza $\delta\eta = \eta - \bar{\eta}$,

$$\frac{d\delta\eta}{dt} = -\frac{\delta\eta}{\tau_0}, \quad (101,5)$$

dove

$$\tau_0 = 1/4\gamma\alpha (T_c - T), \quad T < T_c. \quad (101,6)$$

Per $t \rightarrow \infty$ la differenza $\delta\eta$ deve tendere a zero; perciò deve essere $\tau_0 > 0$ e, quindi, anche $\gamma > 0$.

Analogamente si studia il rilassamento nella regione $T > T_c$. Qui $\bar{\eta} = 0$ e l'espressione linearizzata della derivata si scrive

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = -2\alpha(T - T_c)\delta\eta.$$

Rispettivamente al posto della (101,6) si ottiene

$$\tau_0 = 1/2\gamma\alpha (T - T_c), \quad T > T_c. \quad (101,7)$$

La grandezza τ_0 rappresenta il tempo di rilassamento del parametro d'ordine. Si vede che questo tempo tende all'infinito per $T \rightarrow T_c$. Questa circostanza ha un'importanza di principio per tutta la teoria delle transizioni di fase. Come è stato detto in V, § 143, essa garantisce l'esistenza di stati macroscopici corrispondenti a un equilibrio incompleto per valori d'equilibrio dati di η . Grazie a questa circostanza ha senso la teoria esposta nel paragrafo presente e successivo, nella quale il rilassamento del parametro d'ordine viene considerato indipendentemente dal rilassamento delle altre caratteristiche macroscopiche del corpo.

In un sistema spazialmente disomogeneo si deve considerare il potenziale termodinamico totale dato dall'integrale

$$\Omega_{\text{tot}} = \int \{\Omega_0 + \alpha(T - T_c)\eta^2 + b\eta^4 + g(\nabla\eta)^2\} dV \quad (101,8)$$

(si veda V, (146,5)). La condizione d'equilibrio corrispondente si ottiene facendo variare l'integrale rispetto a η e uguagliando a zero la variazione. Trasformando per parti l'integrale della variazione del termine con il gradiente, otteniamo la condizione d'equilibrio sotto forma dell'equazione

$$2\alpha(T - T_c)\eta + 4b\eta^3 - 2g\Delta\eta \approx \frac{\delta\eta}{\gamma\tau_0} - 2g\Delta\delta\eta = 0$$

(per fissare le idee, consideriamo qui la fase asimmetrica, ossia la regione $T < T_c$). Ciò premesso, compare un termine supplementare anche nell'equazione del rilassamento:

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} = - \left\{ \frac{\delta \eta}{\tau_0} - 2\gamma g \Delta \delta \eta \right\}. \quad (101,9)$$

Per ciascuna delle componenti spaziali di Fourier della funzione $\delta \eta(t, \mathbf{r})$ ricaviamo di qui l'equazione

$$\frac{d \delta \eta_{\mathbf{k}}}{dt} = - \frac{\delta \eta_{\mathbf{k}}}{\tau_{\mathbf{k}}}, \quad \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\tau_0} + 2\gamma g k^2. \quad (101,10)$$

Si vede che il tempo di rilassamento per le componenti con $\mathbf{k} \neq 0$ resta finito per $T \rightarrow T_c$, ma cresce al diminuire di k .

Infine, se introduciamo in Ω il termine $-\eta h$, che descrive l'azione del campo esterno sulla transizione (si veda V, (146,5)), allora l'equazione del rilassamento diventa

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} = - \frac{\delta \eta}{\tau_0} + 2\gamma g \Delta \delta \eta + \gamma h. \quad (101,11)$$

Ponendo il campo periodico,

$$h \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

ricaviamo la relazione

$$\delta \eta_{\mathbf{k}} = \chi(\omega, \mathbf{k}) h$$

con la suscettività generalizzata

$$\chi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\gamma}{\tau_{\mathbf{k}}^{-1} - i\omega}. \quad (101,12)$$

È da notare che questa espressione ha un polo per $\omega = -i\tau_{\mathbf{k}}^{-1}$, il che è in accordo con l'affermazione generale fatta alla fine del § 91. Per $\omega = 0, \mathbf{k} = 0$ questa espressione si trasforma in $\chi(0, 0) = 1/4\alpha(T_c - T)$ in pieno accordo con la formula (144,8) del volume V.

Secondo il teorema della fluttuazione dissipativa, la suscettività generalizzata definisce il correlatore spettrale delle fluttuazioni del parametro d'ordine secondo la formula (nel limite classico $\hbar\omega \ll T$)

$$(\delta \eta^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega} \operatorname{Im} \chi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\gamma T}{\omega^2 + \tau^{-2}}. \quad (101,13)$$

Ricordiamo che questa è la componente di Fourier spazio-temporale del correlatore $\langle \delta\eta(0, 0) \delta\eta(t, \mathbf{r}) \rangle$; quanto ai prodotti medi delle componenti di Fourier delle fluttuazioni, essi sono legati alla funzione $(\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}}$ dalla relazione

$$\langle \delta\eta_{\omega\mathbf{k}} \delta\eta_{\omega'\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}}.$$

L'integrazione della (101,13) rispetto a $d\omega/2\pi$ fornisce la componente di Fourier spaziale del correlatore simultaneo $\langle \delta\eta(0, 0) \delta\eta(0, \mathbf{r}) \rangle^1$:

$$(\delta\eta^2)_{\mathbf{k}} = \int (\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{T}{2gk^2 + 4\alpha(T_c - T)}. \quad (101,14)$$

§ 102. Invarianza di scala dinamica

La teoria esposta al paragrafo precedente non tiene conto delle fluttuazioni del parametro d'ordine. Pertanto la sua applicabilità è limitata dalle stesse condizioni della teoria termodinamica delle transizioni di fase di Landau. Queste condizioni vengono violate in prossimità del punto di transizione, ossia nella regione « di fluttuazione ».

In questa regione le proprietà cinetiche (così come quelle termodinamiche pure; si veda V, § 148) del corpo si possono descrivere mediante un insieme di « indici critici » che definiscono le leggi di variazione delle diverse grandezze all'avvicinarsi al punto di transizione. È possibile ottenere alcune relazioni tra questi indici estendendo ai fenomeni cinetici l'ipotesi dell'invarianza di scala formulata per le proprietà termodinamiche in V, § 149; questa estensione si chiama *invarianza di scala dinamica*.

Il carattere di singolarità delle grandezze termodinamiche nel punto di transizione dipende dal numero di componenti del parametro d'ordine, che descrive la transizione, e dalla struttura dell'operatore di Hamilton efficace formato con queste componenti (si veda V, § 147). Per le grandezze cinetiche la varietà dei casi possibili cresce per la varietà possibile di forme delle « equazioni del moto » che descrivono il rilassamento. Discutiamo dapprima il caso elementare del parametro d'ordine a una componente (B.I. Halperin, P.C. Hohenberg, 1969)².

¹ Nel confrontare la (101,14) con la formula (146,8) in V si deve ricordare che in quest'ultima si considerano le componenti dello sviluppo non in integrali di Fourier, bensì in serie in un volume finito V.

² Si può trattare, ad esempio, del rilassamento del modulo del vettore magnetizzazione in un ferromagnete (nell'intorno del suo punto di Curie) in cui le interazioni relativistiche forti fissano la direzione cristallografica di questo vettore.

Una via teorica (anche se realmente irrealizzabile) che conduce alla definizione delle leggi del rilassamento consiste nel calcolo della suscettività generalizzata esatta $\chi(\omega, k; T)$ (con l'inclusione delle fluttuazioni) per il parametro d'ordine η sotto l'azione del campo esterno. L'andamento della variazione di η con il tempo per rilassamento è definito (come ciò è stato spiegato al § 91) dai punti singolari di χ quale funzione della variabile complessa ω . Se la singolarità più vicina all'asse reale è un polo semplice nel punto $\omega = -i\tau^{-1}(k; T)$ dell'asse immaginario, ogni componente di Fourier del parametro d'ordine si smorza secondo una legge esponenziale con il tempo di rilassamento $\tau(k; T)$. Accanto agli indici critici che definiscono il comportamento delle grandezze termodinamiche, introduciamo due indici y e z che caratterizzano la funzione $\chi(\omega, k; T)$:

$$\tau \propto |T - T_c|^{-y} \quad \text{per } k = 0, \quad (102,1)$$

$$\tau \propto k^{-z} \quad \text{per } T = T_c, \quad (102,2)$$

dove $y > 0$, $z > 0$ poiché il tempo di rilassamento diventa infinito per $k = 0$, $T = T_c$.

Sembra assai verosimile affermare che nell'intorno del punto di una transizione di fase di seconda specie (nella regione di fluttuazione) il tempo di rilassamento sia indipendente dalla temperatura se misurato in unità $\tau_0 \equiv \tau(0; T)$, e le lunghezze $1/k$ in unità $r_c(T)$, il raggio di correlazione delle fluttuazioni del parametro d'ordine. In altre parole, la funzione $\tau(k; T)$ deve avere la forma

$$\tau(k; T) = |T - T_c|^{-y} f(kr_c), \quad (102,3)$$

dove la funzione f dipende dalla temperatura soltanto attraverso $r_c(T)$ nel prodotto kr_c e $f(0) = \text{costante}$.

Poiché $r_c \rightarrow \infty$ per $T \rightarrow T_c$, allora in accordo con la definizione dell'indice critico z deve essere $f(\xi) \propto \xi^{-z}$ per $\xi \rightarrow \infty$. In questo caso la dipendenza di τ dalla temperatura va separata sotto forma del prodotto

$$|T - T_c|^{-y} |T - T_c|^v,$$

dove v è l'indice critico del raggio di correlazione ¹⁾

$$r_c \propto |T - T_c|^{-v}. \quad (102,4)$$

¹⁾ La notazione degli indici critici delle grandezze termodinamiche qui e più avanti coincide con la loro notazione in V, § 148.

Ma τ deve rimanere finito per $T \rightarrow T_c$ (e $k \neq 0$). Ne segue che deve essere

$$y = zv. \quad (102,5)$$

In tal modo, l'ipotesi dell'invarianza di scala consente di legare reciprocamente i due indici nelle (102,4-2).

Così come nel caso statico, ci sono tutte le ragioni per credere che gli indici critici siano uguali da ambo le parti del punto di transizione. Infatti, la disomogeneità spaziale ($k \neq 0$) smussa la transizione di fase nel senso di eliminare la singolarità di tutte le grandezze per $T = T_c$ (sotto questo aspetto la disomogeneità influisce sulla transizione di fase come un campo esterno). In altre parole, il punto $T = T_c$ perde la propria individualità, in modo che non esistono ragioni per distinguere i valori dell'indice z al tendere di T a T_c dall'alto o dal basso. In virtù della relazione (102,5), lo stesso si riferisce anche all'indice y .

Analogamente si possono legare a z altri indici critici. Consideriamo, ad esempio, la dipendenza della suscettività χ da ω per $k = 0$ nel punto $T = T_c$.

In accordo con l'invarianza di scala, la funzione $\chi(\omega, k; T_c)$ può essere rappresentata nella forma

$$\chi = |T - T_c|^{-\gamma} f(\omega\tau_0, k\tau_c), \quad f(0, 0) = \text{costante},$$

dove γ è l'indice critico per la suscettività nel caso $k = 0$ e $\omega = 0$. Per $k = 0$ e $T \rightarrow T_c$ la suscettività deve tendere a un limite finito (per $\omega \neq 0$). Tenendo conto che $\tau_0 \sim |T - T_c|^{-\nu}$, troviamo che a tal fine deve essere

$$f(\xi, 0) \sim \xi^{-\gamma/\nu} \quad \text{per} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Così si definisce la dipendenza cercata di χ da ω :

$$\chi \sim \omega^{-\gamma/\nu} \quad \text{per} \quad k = 0, T = T_c. \quad (102,6)$$

Quindi, nel caso considerato le condizioni di invarianza di scala consentono di stabilire un legame tra gli indici critici cinetici e termodinamici, che sono però insufficienti per definire i primi partendo dai secondi.

§ 103. Rilassamento nell'elio liquido nell'intorno del punto lambda

Consideriamo ora sistemi con « degenerazione », in cui il parametro d'ordine ha più (n) componenti η_i , ma l'operatore di Hamilton efficace dipende (nel sistema omogeneo) unicamente dalla somma

dei loro quadrati. In altre parole, se consideriamo l'insieme delle grandezze η_i come un vettore a n dimensioni, allora l'operatore di Hamilton efficace non dipende dalla sua direzione.

Come esempio caratteristico serve un ferromagnete di scambio puro, la cui energia non dipende dalla direzione del vettore magnetizzazione. Un altro esempio è il liquido superfluido (elio liquido), in cui come parametro d'ordine funge la funzione d'onda condensata

$$\Xi = \sqrt{n_0} e^{i\Phi} \quad (103,1)$$

(si veda IX, §§ 26, 27). Questa grandezza complessa rappresenta l'insieme di due grandezze indipendenti, ma l'energia del liquido omogeneo dipende unicamente dal quadrato del modulo $|\Xi|^2 = n_0$, cioè dalla densità del condensato.

Le proprietà specifiche dei sistemi « degeneri » sono condizionate dall'esistenza nel loro spettro oscillatorio di un ramo (*moda molle*) legato alle oscillazioni della direzione del « vettore del parametro d'ordine »; la frequenza di queste oscillazioni si annulla nel punto della transizione di fase. La legge della loro dispersione si può trovare dalle equazioni macroscopiche del moto e, d'altra parte, questa legge deve soddisfare le condizioni dell'invarianza di scala. Ciò permette, come vedremo più avanti, di esprimere completamente gli indici critici in funzione di quelli termodinamici. Facciamo questa operazione in relazione all'elio liquido (*R. A. Ferrell, N. Menyhard, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy, 1967*).

In questo caso la *moda molle* è il secondo suono. Nell'intorno del punto di transizione esso rappresenta oscillazioni comuni della velocità superfluida v_s e dell'entropia; l'ampiezza delle oscillazioni della velocità normale nel secondo suono $v_n \sim v_s \rho_s / \rho_n$ e nell'intorno del punto della transizione di fase (il punto λ) è piccola con ρ_s . Ricordiamo che la velocità superfluida è legata alla fase della funzione d'onda condensata ($\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \Phi / m$) in modo che le oscillazioni di \mathbf{v}_s indicano le oscillazioni della fase o, in altre parole, della direzione del « vettore del parametro d'ordine ». La legge di dispersione di queste oscillazioni è

$$\omega = u_2 k, \quad (103,2)$$

dove

$$u_2 = \sqrt{\frac{TS^2\rho_s}{C_p\rho_n}} \approx \sqrt{\frac{T_\lambda S_\lambda^2\rho_s}{C_p\rho}} \quad (103,3)$$

è la velocità del secondo suono (S è l'entropia, C_p il calore specifico dell'unità di massa del liquido); nell'intorno del punto λ si possono sostituire T e S con i loro valori T_λ e S_λ in questo stesso punto, e la

densità ρ_n della componente normale del liquido con la sua densità totale ρ ¹⁾.

Per $T \rightarrow T_\lambda$ la densità ρ_s tende a zero secondo la legge

$$\rho_s \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}, \quad (103,4)$$

dove α è l'indice critico del calore specifico:

$$C_p \propto |T_\lambda - T|^{-\alpha} \quad (103,5)$$

(si veda IX, (28,3)). Quanto alla legge con tendere a zero la velocità u_2 , essa dipende dal segno dell'indice α . Se $\alpha > 0$ in modo che $C_p \rightarrow \infty$, allora

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(1+\alpha)/3}, \quad \alpha > 0.$$

Se, invece, $\alpha < 0$, allora C_p tende a un limite finito (ricordiamo che l'indice critico definisce solo il comportamento della parte singolare del calore specifico nell'intorno del punto di transizione!); allora

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/6}, \quad \alpha < 0. \quad (103,6)$$

Più avanti supporremo che $\alpha < 0$ (come ciò si verifica infatti per l'elio liquido: $\alpha \approx -0,02$).

Lo smorzamento del secondo suono è descritto dalla parte immaginaria della frequenza. Lontano dal punto λ , al di sotto di esso, questa parte è piccola, ma cresce a misura che ci si avvicina al punto λ ; nel suo immediato intorno, per $kr_c \sim 1$, lo smorzamento diventa dell'ordine di grandezza dell'unità (cioè $\text{Im } \omega \sim |\omega|$). Sopra il punto λ , invece, a sufficiente distanza da esso, avremo un'onda termica smorzantesi ordinaria (soluzione dell'equazione della conducibilità termica) con la legge di dispersione

$$\omega = i \frac{\kappa}{\rho C_p} k^2, \quad (103,7)$$

dove κ è il coefficiente di conducibilità termica.

¹⁾ Ricordiamo (si veda VI, § 130) che le velocità del suono primo e secondo nell'elio liquido si calcolano come radici dell'equazione di dispersione

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S + \frac{\rho_s T S^2}{\rho_n C_p} \right] + \frac{\rho_s T S^2}{i \rho_n C_p} \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial \rho} \right)_S = 0.$$

All'esterno dell'intorno immediato del punto λ il coefficiente di dilatazione termica è piccolo, così come la differenza $C_p - C_v$, in modo che si può porre $C_p \approx C_v$. Per $T \rightarrow T_\lambda$, C_p differisce sensibilmente da C_v . In questo caso, tuttavia, ρ_s tende a zero e, tenendo conto di questo valore piccolo, si ottiene la (103,3).

Applichiamo ora l'ipotesi dell'invarianza di scala, secondo la quale nell'intorno del punto λ la legge di dispersione deve avere la forma

$$\omega = k^2 f(kr_c).$$

Si può scrivere questa dipendenza altrimenti come ¹⁾

$$\omega = k^2 f\left(\frac{T - T_\lambda}{k^{1/\nu}}\right) \quad (103,8)$$

(con un'altra funzione f), dove ν è l'indice critico del raggio di correlazione.

La validità delle leggi di dispersione (103,2) e (103,7) non è limitata da alcuna condizione di lontananza dal punto λ , ma per una temperatura assegnata è limitata dalla condizione $kr_c \ll 1$, vale a dire che la lunghezza d'onda deve essere grande rispetto al raggio di correlazione; in caso contrario, le equazioni macroscopiche sulle quali queste leggi sono basate non possono essere applicate.

Consideriamo dapprima la regione di temperature sotto il punto di transizione. La condizione, che per $kr_c \ll 1$ la legge della dispersione deve essere lineare rispetto a k , definisce l'espressione limite della funzione $f(\xi)$ nella (103,8):

$$f(\xi) \propto (-\xi)^{\nu(z-1)} \quad \text{per } \xi \rightarrow -\infty.$$

Con ciò si definisce anche la dipendenza della legge di dispersione dalla temperatura:

$$\omega \propto k (T_\lambda - T)^{\nu(z-1)}. \quad (103,9)$$

Confrontando questo risultato con la (103,6) troviamo

$$\nu(z-1) = \frac{2-\alpha}{6}.$$

Gli indici critici ν e α sono mutuamente legati dalla relazione

¹⁾ Queste relazioni devono essere valide nella regione di fluttuazione, ciò che richiede in ogni caso che la disuguaglianza $|T - T_\lambda| \ll T_\lambda$ sia soddisfatta. Esistono, tuttavia, delle indicazioni che nell'elio liquido questa disuguaglianza deve essere soddisfatta con grande margine, il che significherebbe l'esistenza nella teoria di un piccolo parametro numerico.

$3\nu = 2 - \alpha$ (si veda V, (149,2)); di qui ¹⁾

$$z = 3/2. \quad (103,10)$$

Per $T \rightarrow T_\lambda$ la frequenza deve tendere a un limite finito; a tal fine deve essere $f(0) = \text{costante}$. Quindi, la legge della dispersione del secondo suono nel punto λ stesso è

$$\omega \propto k^2. \quad (103,11)$$

In questo caso la parte immaginaria di ω è dello stesso ordine di grandezza che la parte reale. Per $T \neq T_\lambda$ la legge di dispersione (103,11) è valida per le onde corte che soddisfano la condizione $kr_c \gg 1$.

Infine, consideriamo la regione di temperature $T > T_\lambda$. Qui per $kr_c \ll 1$ la dipendenza di ω da k deve essere quadratica. A tal fine deve essere

$$f(\xi) \propto \xi^{\nu(z-2)} \quad \text{per} \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$\omega \propto k^2 (T - T_\lambda)^{\nu(z-2)}.$$

Confrontando con la (103,7) ed esprimendo ν in funzione di α , troviamo la dipendenza dalla temperatura del coefficiente di conducibilità termica nella forma

$$\kappa \propto (T - T_\lambda)^{-(2-\alpha)/6}. \quad (103,12)$$

Questo coefficiente tende all'infinito per $T \rightarrow T_\lambda$ secondo una legge vicina a $(T - T_\lambda)^{-1/3}$.

Nel secondo suono abbiamo a che fare con le oscillazioni della fase Φ della funzione d'onda condensata. Perciò la grandezza $1/\text{Im } \omega$ ha anche il significato di tempo di rilassamento della fase. Per $k \rightarrow 0$ essa, naturalmente, diventa infinita in quanto in un liquido omogeneo la variazione della fase non è legata alla variazione dell'energia e perciò la fase non può essere soggetta a rilassamento.

Il tempo di rilassamento del valore assoluto $|\Xi| = \sqrt{n_0}$, cioè della densità del condensato, non coincide in generale con il tempo di rilassamento della fase. Ma in virtù dell'invarianza di scala si può affermare che ambedue i tempi sono comparabili come ordine di grandezza, per $kr_c \sim 1$. Secondo la (103,9) per questo tempo

¹⁾ Per $\alpha < 0$ si avrebbe $z = 3/(2-\alpha)$.

abbiamo

$$\tau \sim \frac{1}{\omega (1/r_c)} \propto r_c (T_\lambda - T)^{-v(z-1)} \propto (T_\lambda - T)^{-vz}.$$

Con il valore z dalla (103,10) troviamo

$$\tau_i \propto (T_\lambda - T)^{-1+\alpha/2}. \quad (103,13)$$

Il tempo di rilassamento della densità del condensato resta finito anche per $k \rightarrow 0$, non diventando affatto infinito come per la fase. Perciò la legge della dipendenza dalla temperatura (103,13) per il rilassamento della densità del condensato resta valida anche per $k = 0$ (V. L. Pokrovskij, I. M. Chalatnikov, 1969)¹⁾.

¹⁾ Per $\alpha > 0$ si avrebbe $\tau \propto (T_\lambda - T)^{-1}$ in esatta coincidenza con la legge (101,6) dedotta nei limiti della teoria di Landau. Questa coincidenza, tuttavia, è in un certo senso casuale.

INDICE ANALITICO ¹⁾

- Adattamento 81
- Assorbimento del suono nel liquido di Bose 384
- Atmosferiche fischianti 282

- Caso di London 491
 - di Pippard 493
- Centri conduttori delle orbite 303
- Coefficienti termoelettrici 217, 288, 296, 387, 390, 400, 411
- Condizione di unitarietà 20, 354
- Conduttività elettrica di un plasma 213, 216, 292
 - — — relativistico 251
- Conservazione del momento angolare 30
- Correlatore della densità 104, 107, 108
 - della corrente 124
- Costante dielettrica longitudinale e trasversale 149, 161
 - — — del plasma relativistico 163
- Curvatura della superficie di Fermi 434

- Degenerazione dello spettro fononico 347
- Deriva elettrica 304

- Diffusione dei germi rispetto alle dimensioni 501, 503
 - rispetto all'energia 130
 - nello spazio dei vettori quantità di moto 116, 203, 410, 414
 - termica 56
 - trasversale 312, 313
- Dispersione spaziale in un campo magnetico 264
 - —, condizioni che permettono di trascurare 150, 267

- Effetto Hall 290, 425
 - Knudsen 82
 - Leduc-Righi 290
 - meccanico-calorico 75
 - Šubnikov-de Haas 449
 - — — in un modello isotropo 456
 - termomeccanico 74
 - Zenfitlebhen 63
- Equazione di Vlasov 146
 - di Gorkov 485
 - di Korteweg-de Vries 190
 - — — per onde ionico-acustiche 196
- Equilibrio dettagliato nell'emissione di un fotone 237, 238
 - — nella diffusione da una parete 79
 - locale 29

¹⁾ Questo indice analitico completa, senza però ripeterlo, l'indice generale del libro. Esso contiene i termini e i concetti che non compaiono nell'indice generale.

- Formule cinetiche dei gas per i coefficienti cinetici 39, 41, 57
- Frequenza ciclotronica 262
 - giromagnetica 262
 - di Langmuir 159
 - — del plasma degenerare 202
 - di Larmor 262
 - di plasma 159
- Funzione di dissipazione 361, 364
 - spettrale delle fluttuazioni 107
- Funzioni di Green del gas fononico 468
 - — di Matsubara 485
 - — di ritardo e di anticipo 465
- Gas nel modello di sferette solide 52, 59, 102
- Germi critici 499, 505
- Impedenza superficiale 432, 438, 442, 492
- Indici critici 516-520
- Instabilità di un fascio in un campo magnetico 325
 - globale 334
- Integrale degli urti di Balescu-Lenard 226, 233, 259
 - — di Boltzmann 23
- Legge di Wiedemann-Franz 390, 398
- Logaritmo coulombiano 207, 208
- Lunghezza del cammino libero 25
 - — in dielettrici 342, 355
 - — nel liquido di Fermi 374
 - — nel plasma 212
- Magnetizzazione di un plasma 308
- Matrice densità 198, 478
- Metalli compensati 404, 428, 447
- Mobilità in un gas 57
 - di un elettrone 122, 123
- Moda molle 518
- Numero di Knudsen 66
 - di Reynolds 67
- Onde collidenti senza urto 186
 - elicoidali 282, 443
 - magnetoacustiche 281, 449
 - di plasma in un plasma degenerare 202
 - — — nel plasma relativistico 167
- Onde di Van Alphen 281
- Oscillazioni ad alta frequenza 278
 - a bassa frequenza 278
- Particelle di risonanza 241, 368
- Plasma elettronico 161
 - magneticamente attivo 260
 - — — relativistico 275
- Polinomi di Sonin 47
- Precisione logaritmica migliorata 230-233
- Principio variazionale per l'equazione cinetica 50
- Processi umklapp 337, 344, 351-354, 401-405
- Profondità di penetrazione 432, 439, 442, 493
- Punto di arresto 508
- Raggio di Debey 139, 143, 182
 - di Larmor 263
- Regola di aggiramento di Landau 152, 265, 388, 436
- Riflessione speculare di elettroni 439

- Risonanza ciclotronica 266, 272, 286
— — nel plasma relativistico 275
— di plasma 279
Risposta al segnale 324
- Sbalzo di temperatura 71
Schermatura 162, 201
— dinamica 226
Scivolamento termico 72
Seconda viscosità di un gas ultrarelativistico 42
Secondo suono in un dielettrico 357
Sezione di trasporto 55, 206, 313
Sforzi di Maxwell viscosi 68
Singolarità di Kohn 201
Smorzamento ciclotronico di Landau 271
- Smorzamento delle oscillazioni della
funzione di distribuzione 209
— delle onde di plasma con urto 218
Solitoni per cattura adiabatica 188
Soluzioni « parassite » 32, 344, 404
Soppianto di un campo magnetico da
parte del plasma 302
Stabilità del plasma isotropo 158
Stringimento del contorno d'integrazione 154
Suono nullo 377
- Teorema di Liouville 21, 89, 252
Termini di Burnett 67
Trascinamento di elettroni da parte
di fononi 401, 411, 419
Trasformazione di Fourier unilaterale 170